Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 345-353
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132038

一类奇数阶泛函微分方程周期解的存在性

林梦媛，吴　进，陈柏立*

广东工业大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2023年1月22日；录用日期：2023年2月21日；发布日期：2023年2月28日

摘　要

本文运用Mawhin延拓定理，研究了一类奇数阶泛函微分方程周期解的存在性问题，得到了新的判定准则。

关键词

奇数阶，泛函微分方程，周期解，Mawhin延拓定理

Existence of Periodic Solutions for a Class of Odd Order Functional Differential Equations

Mengyuan Lin, Jin Wu, Baili Chen*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Jan. 22nd, 2023; accepted: Feb. 21st, 2023; published: Feb. 28th, 2023

Abstract

Using Mawhin's continuation theorem we study the existence of periodic solutions for a class of odd order functional differential equations, and establish a new criterion.

Keywords

Odd Order, Functional Differential Equations, Periodic Solutions, Mawhin's Continuation Theorem

*通讯作者。

文章引用: 林梦媛, 吴进, 陈柏立. 一类奇数阶泛函微分方程周期解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 345-353.
DOI: 10.12677/pm.2023.132038

1. 引言

由于泛函微分方程在许多数学模型中有着深刻的应用，因此吸引了国内外大量的学者进行研究[1] [2]。其中，周期解问题一直得到学者们的关注，但大部分都只是利用不动点理论、重合度理论或者临界点理论等等讨论了低阶的泛函微分方程[3]-[15]，涉及到高阶的却不多[16] [17] [18]。

本文将利用 Mawhin 延拓定理讨论一类奇数阶泛函微分方程

$$x^{(2n+1)}(t)+\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)+g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)=p(t) \tag{1}$$

周期解的存在性，其中 $\tau(t)$、$a_i(t)\left(i=0,1,2,\cdots,n\right)$ 和 $p(t)$ 都是定义在 R 上具有正周期 T 的实连续函数。并且 $a_0(t)>0$，$a_{2k-1}(t)>0\ \left(k=1,2,\cdots,n\right)$，$g(x)$ 是定义在 R 上的实连续函数。

在第二节中，我们先给出一些预备知识，以及针对周期解存在性的条件做假设。在第三节中，我们将利用 Mawhin 延拓定理[19]，证明方程(1)的周期解存在性。

2. 预备知识

为了证明主要结果，我们需要介绍 Mawhin 延拓定理[19]。

令 X 和 Y 是两个 Banach 空间，且 $L:DomL\subset X\to Y$ 是一个线性映射，$N:X\to Y$ 是一个连续映射。若映射 L 满足：1) $dimKerL=codimImL<+\infty$；2) ImL 在 Y 上是闭的。则称映射 L是指标为零的 Fredholm 算子。若映射 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子，则存在连续的投影算子 $P:X\to X$ 和 $Q:Y\to Y$，使得 $ImP=KerL$ 和 $ImL=KerQ=Im(I-Q)$ 成立。令 K_p 表示 $L|_{DomL\cap KerP}:(I-P)X\to ImL$ 的逆，若 $QN(\bar{\Omega})$ 是有界的且 $K_p(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 是紧的，则称映射 N 是 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧的，其中 Ω 是 X 上的有界开子集。

引理 2.1 (Mawhin延拓定理) [19]令 L 是一个具有零指标的 Fredholm 算子，N 是一个在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧的非线性算子。如果

1) 对每个 $\lambda\in(0,1)$ 及 $x\in\partial\Omega,\ Lx\neq\lambda Nx$；

2) 对每个 $x\in\partial\Omega\cap KerL,\ QNx\neq 0$ 及 $\deg\left(QN,\Omega\cap KerL,0\right)\neq 0$；

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}\cap DomL$ 上至少有一个解。

在呈现我们主要结果之前，先作出如下假设：

(H_1)：$M_{2k-1}=\max\limits_{t\in[0,T]}a_{2k-1}(t)\geq a_{2k-1}(t)\geq m_{2k-1}=\min\limits_{t\in[0,T]}a_{2k-1}(t)>0\ \left(k=1,2,\cdots,n\right)$；

(H_2)：$M_{2k-2}=\max\limits_{t\in[0,T]}\left|a_{2k-2}(t)\right|\left(k=2,\cdots,n-1\right),M_0=\max\limits_{t\in[0,T]}a_0(t)\geq a_0(t)\geq m_0=\min\limits_{t\in[0,T]}a_0(t)>0$；

(H_3)：$M_{2n-1}<\left(\dfrac{\pi}{T}\right)^2,\dfrac{M_{2n-2i+1}}{M_{2n-2i-1}}<\left(\dfrac{\pi}{T}\right)^2\left(i=2,3,\cdots,n\right)$；

(H_4)：存在正常数 r 使得 $\dfrac{m_0-r}{2}>\dfrac{T\delta M_0^2}{T\delta M_0+M_1}$，且 $A-DB>0$ 和 $1-A^*>0$。其中 $\delta=\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}\Big/\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1$，$A=1-A^*$，

$$A^*=M_{2n-1}\left(\frac{T}{2}\right)^2+M_{2n-2}\left(\frac{T}{2}\right)^3+\cdots+M_1\left(\frac{T}{2}\right)^{2n},$$

$$B=\left(M_{2n-1}-m_{2n-1}\right)\left(\frac{T}{2}\right)+M_{2n-2}\left(\frac{T}{2}\right)^{2}+\cdots+M_{2}\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-2}+\left(M_{1}-m_{1}\right)\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-1},$$

$$D=\frac{T}{m_0-r}\left(\frac{M_0M_1}{T\delta M_0+M_1}+\frac{m_0+r}{2}\right).$$

3. 主要结果的证明

定理 3.1 若假设(H_1)~(H_4)成立，且满足

$$\lim_{|x|\to\infty}\sup\left|\frac{g(x)}{x}\right|\le r, \tag{2}$$

$$\lim_{|x|\to\infty}\operatorname{sgn}(x)g(x)=+\infty, \tag{3}$$

则方程(1)至少存在一个 T 周期解。

为了证明定理 3.1，我们要做如下准备工作。令

$$X:=\left\{x \middle| x\in C^{2n}(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\right\},$$

和 $x^{(0)}(t)=x(t)$，并在空间 X 上定义如下范数：

$$\|x\|=\max_{0\le j\le 2n}\max_{t\in[0,T]}\left|x^{(2n)}(t)\right|.$$

类似地，令 $Y:=\left\{y \middle| y\in C(R,R),y(t+T)=y(t),\forall t\in R\right\}$，在空间 Y 上定义如下范数：

$$\|y\|_0=\max_{t\in[0,T]}|y(t)|.$$

显然，$(X,\|\cdot\|)$ 和 $(Y,\|\cdot\|_0)$ 都是 Banach 空间。

分别定义算子 $L:X\to Y$ 和 $N:X\to Y$，如下

$$Lx(t)=x^{(2n+1)}(t),t\in R;\ Nx(t)=p(t)-\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)-g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right),t\in R. \tag{4}$$

易知算子 L 是一个指标为零的 Fredholm 算子，再定义投影算子 P、Q 分别为

$$Px(t)=x(0)=x(T),\ \forall t\in R,\ x\in X;\ Qy(t)=\frac{1}{T}\int_0^T y(s)\mathrm{d}s,\ \forall t\in R,\ y\in Y. \tag{5}$$

容易验证，算子 N 是一个在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的非线性算子。

考虑如下的辅助方程

$$x^{(2n+1)}(t)+\lambda\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)+\lambda g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)=\lambda p(t), \tag{6}$$

其中 $0<\lambda<1$。

引理 3.2 [20]令 $x(t)\in C^n(R,R)\cap C_T$，则

$$x^{(i)}\le\frac{1}{2}\int_0^T\left|x^{(i+1)}(s)\right|\mathrm{d}s,i=1,2,\cdots,n-1.$$

其中 $n\ge2$，且 $C_T:=\left\{x \middle| x\in C(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\right\}$。

引理 3.3 [21]设 M,λ 是两个正数，且满足 $0<M<\left(\frac{\pi}{T}\right)^2$ 和 $0<\lambda<1$，则对任意的函数 $\varphi(t)\left(t\in[0,T]\right)$，方程

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda Mx(t)=\lambda\varphi(t) \\ x(0)=x(T),x'(0)=x'(T) \end{cases}$$

有唯一解，其表达形式如下：

$$x(t)=\int_0^T G(t,s)\lambda\varphi(s)\mathrm{d}s,$$

其中，$\alpha=\sqrt{\lambda M}$，

$$G(t,s)=\begin{cases} \omega(t-s), & (k-1)T\le s\le t\le kT, \\ \omega(T+t-s), & (k-1)T\le t\le s\le kT(k\in N). \end{cases}$$

和

$$\omega(t)=\frac{\cos\alpha\left(t-\dfrac{T}{2}\right)}{2\alpha\sin\dfrac{\alpha T}{2}}.$$

引理 3.4 若定理 3.1 中的条件被满足，且 $x(t)$ 是方程(6)的一个 T 周期解，则存在独立于 λ 的常数 $D_i(i=0,1,\cdots,2n)$，使得

$$x^{(i)}\le D_i, t\in[0,T], i=0,1,\cdots,2n. \tag{7}$$

证明：设 $x(t)$ 是方程(6)的一个 T 周期解。令

$$\varepsilon=\frac{m_0-r}{2}-\frac{T\delta M_0^2}{T\delta M_0+M_1}.$$

由(2)知，存在一个正常数 $\bar{M}_1>0$，使得

$$\left|g(x(t))\right|\le r\left|x(t)\right|,\left|x(t)\right|>\bar{M}_1,t\in R. \tag{8}$$

令

$$E_1=\left\{t\middle|t\in[0,T],\left|x(t)\right|\rangle\bar{M}_1\right\},\ E_2=[0,T]\setminus E_1. \tag{9}$$

和

$$\rho=\max\nolimits_{E_2} g(x). \tag{10}$$

由(6)、(8)、(9)和(10)式和引理 3.2，有

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(2n)}\right\|_0 &\le\frac{1}{2}\int_0^T\left|x^{(2n+1)}(t)\right|\mathrm{d}t \\
&\le\frac{\lambda}{2}\int_0^T\left[\left|\sum\nolimits_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)\right|+\left|g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|+\left|p(t)\right|\right]\mathrm{d}t \\
&\le\frac{\lambda T}{2}\left[M_{2n-1}\left\|x^{(2n-1)}\right\|_0+M_{2n-2}\left\|x^{(2n-2)}\right\|_0+\cdots+M_0\left\|x^{(0)}\right\|_0\right]+\frac{\lambda}{2}\int_0^T\left|g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|\mathrm{d}t+\frac{\lambda T}{2}\|p\|_0 \\
&\le\frac{T}{2}\left[M_{2n-1}\frac{T}{2}+M_{2n-2}\left(\frac{T}{2}\right)^2+\cdots+M_1\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-1}\right]\left\|x^{(2n)}\right\|_0+\frac{T}{2}M_0\|x\|_0 \\
&\quad+\frac{1}{2}\left[\int_{E_1}\left|g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|\mathrm{d}t+\int_{E_2}\left|g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)\right|\mathrm{d}t\right]+\frac{T}{2}\|p\|_0 \\
&\le A^*\left\|x^{(2n)}\right\|_0+\frac{T}{2}(M_0+r+\varepsilon)\|x\|_0+\frac{T}{2}\left(\rho+\|p\|_0\right) \\
&=A^*\left\|x^{(2n)}\right\|_0+\frac{m_0-r}{2}D\|x\|_0+\frac{T}{2}C.
\end{aligned} \tag{11}$$

其中，$C=\rho+\|p\|_0$，$D=\dfrac{T}{m_0-r}\left(\dfrac{M_0M_1}{T\delta M_0+M_1}+\dfrac{m_0+r}{2}\right)$。

由假设(H_4)和(11)式，有

$$\left\|x^{(2n)}\right\|_0\le\left(1-A^*\right)^{-1}\left(\frac{m_0-r}{2}D\|x\|_0+\frac{T}{2}C\right).\tag{12}$$

由(6)式和引理 3.3，得

$$\begin{aligned}x^{(2n-1)}(t)&=\lambda\int_0^T G_1(t,t_1)\left[\left(M_{2n-1}-a_{2n-1}(t_1)\right)x^{(2n-1)}(t_1)+p(t_1)-g\left(x\left(t_1-\tau(t_1)\right)\right)\right]\mathrm{d}t_1\\&\quad-\lambda\int_0^T G_1(t,t_1)\sum_{i=0}^{2n-2}a_i(t_1)x^{(i)}(t_1)\mathrm{d}t_1,\end{aligned}\tag{13}$$

其中，$\alpha_1=\sqrt{\lambda M_{2n-1}}$，

$$G_1(t,t_1)=\begin{cases}\omega_1(t-t_1), & (k-1)T\le t_1\le t\le kT,\\ \omega_1(T+t-t_1), & (k-1)T\le t\le t_1\le kT\ (k\in N).\end{cases}$$

和

$$\omega_1(t)=\frac{\cos\alpha_1\left(t-\dfrac{T}{2}\right)}{2\alpha_1\sin\dfrac{\alpha_1 T}{2}},\ \int_0^T G_1(t,t_1)\mathrm{d}t_1=\frac{1}{\lambda M_{2n-1}}.$$

由(13)式和引理 3.3，得

$$\begin{aligned}x^{(2n-3)}(t)&=\lambda\int_0^T G_2(t,t_1)\int_0^T G_1(t_1,t_2)\left[p(t_2)-g\left(x\left(t_2-\tau(t_2)\right)\right)\right]\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\\&\quad+\lambda\int_0^T G_2(t,t_1)\int_0^T G_1(t_1,t_2)\left(M_{2n-1}-a_{2n-1}(t_2)\right)x^{(2n-1)}(t_2)\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1\\&\quad+\lambda\int_0^T G_2(t,t_1)\left[\frac{M_{2n-3}}{M_{2n-1}}x^{(2n-3)}(t_1)-\lambda\int_0^T G_1(t_1,t_2)a_{2n-3}(t_2)x^{(2n-3)}(t_2)\mathrm{d}t_2\right]\mathrm{d}t_1\\&\quad-\lambda\int_0^T G_2(t,t_1)\int_0^T G_1(t_1,t_2)\left[\sum_{i=0}^{2n-4}a_i(t_2)x^{(i)}(t_2)+a_{2n-2}(t_2)x^{(2n-2)}(t_2)\right]\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1,\end{aligned}\tag{14}$$

其中，$\alpha_2=\sqrt{\dfrac{M_{2n-1}}{M_{2n-3}}}$，

$$G_2(t,t_2)=\begin{cases}\omega_2(t-t_2), & (k-1)T\le t_2\le t\le kT,\\ \omega_2(T+t-t_2), & (k-1)T\le t\le t_2\le kT\ (k\in N).\end{cases}$$

和

$$\omega_2(t)=\frac{\cos\alpha_2\left(t-\dfrac{T}{2}\right)}{2\alpha_2\sin\dfrac{\alpha_2 T}{2}},\ \int_0^T G_2(t,t_2)\mathrm{d}t_2=\frac{M_{2n-1}}{M_{2n-3}}.$$

利用数学归纳法，可以得到

$$
\begin{aligned}
&x'(t)\\
&=\lambda\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[p(t_n)-g\left(x\left(t_n-\tau(t_n)\right)\right)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\lambda\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left(M_{2n-1}-a_{2n-1}(t_n)\right)x^{(2n-1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_2(t_{n-2},t_{n-1})\left[\frac{M_{2n-3}}{M_{2n-1}}x^{(2n-3)}(t_{n-1})-\lambda\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_{2n-3}(t_n)x^{(2n-3)}(t_n)\mathrm{d}t_n\right]\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_3(t_{n-3},t_{n-2})\left[\frac{M_{2n-5}}{M_{2n-3}}x^{(2n-5)}(t_{n-2})-\lambda\int_0^T G_2(t_{n-2},t_{n-1})\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_{2n-5}(t_n)x^{(2n-5)}(t_n)\mathrm{d}t_n\mathrm{d}t_{n-1}\right]\mathrm{d}t_{n-2}\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\cdots+\cdots\\
&+\int_0^T G_n(t,t_1)\left[\frac{M_1}{M_3}x^{(1)}(t_1)-\lambda\int_0^T G_{n-1}(t_1,t_2)\int_0^T G_{n-2}(t_2,t_3)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_1(t_n)x^{(1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_2\right]\mathrm{d}t_1\\
&-\lambda\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}(t_n)x^{(2k)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1-\lambda\int_0^T G_n(t,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[a_0(t_n)x^{(0)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中，$\alpha_i=\sqrt{\dfrac{M_{2n-2i+1}}{M_{2n-2i+3}}},2\le i\le n$，

$$
G_i(t,t_1)=\begin{cases}\omega_i(t-t_i), & (k-1)T\le t_i\le t\le kT,\\ \omega_i(T+t-t_i), & (k-1)T\le t\le t_i\le kT(k\in N).\end{cases}
$$

和

$$
\omega_i(t)=\frac{\cos\alpha_i\left(t-\dfrac{T}{2}\right)}{2\alpha_i\sin\dfrac{\alpha_i T}{2}},\ \int_0^T G_i(t,t_i)\mathrm{d}t_i=\frac{M_{2n-2i+3}}{M_{2n-2i+1}},2\le i\le n.
$$

再根据(15)式和常数变易法，

$$
\begin{aligned}
x(t)=&\left(\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1\right)\int_0^t\Phi(t,s)\left\{\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[p(t_n)-g\left(x\left(t_n-\tau(t_n)\right)\right)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\right.\\
&+\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left(M_{2n-1}-a_{2n-1}(t_n)\right)x^{(2n-1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_2(t_{n-2},t_{n-1})\left[\frac{M_{2n-3}}{M_{2n-1}}x^{(2n-3)}(t_{n-1})-\lambda\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_{2n-3}(t_n)x^{(2n-3)}(t_n)\mathrm{d}t_n\right]\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\cdots+\cdots\\
&+\int_0^T G_n(s,t_1)\left[\frac{M_1}{M_3}x^{(1)}(t_1)-\lambda\int_0^T G_{n-1}(t_1,t_2)\int_0^T G_{n-2}(t_2,t_3)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_1(t_n)x^{(1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_2\right]\mathrm{d}t_1\\
&\left.-\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}(t_n)x^{(2k)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\right\}\mathrm{d}s\\
&+\left(\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1\right)\int_o^t\Phi(t,s)\left\{\frac{M_0}{M_1}x(s)-\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[a_0(t_n)x^{(0)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\right\}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^T\Phi(t,s)\left\{\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[p(t_n)-g\left(x\left(t_n-\tau(t_n)\right)\right)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\right.\\
&+\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left(M_{2n-1}-a_{2n-1}(t_n)\right)x^{(2n-1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_2(t_{n-2},t_{n-1})\left[\frac{M_{2n-3}}{M_{2n-1}}x^{(2n-3)}(t_{n-1})-\lambda\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_{2n-3}(t_n)x^{(2n-3)}(t_n)\mathrm{d}t_n\right]\mathrm{d}t_{n-1}\cdots\mathrm{d}t_1\\
&+\cdots+\cdots\\
&+\int_0^T G_n(s,t_1)\left[\frac{M_3}{M_1}x^{(1)}(t_1)-\lambda\int_0^T G_{n-1}(t_1,t_2)\int_0^T G_{n-2}(t_2,t_3)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)a_1(t_n)x^{(1)}(t_n)\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_2\right]\mathrm{d}t_1\\
&-\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}(t_n)x^{(2k)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\Bigg\}\mathrm{d}s\\
&+\int_0^T \Phi(t,s)\left\{\frac{M_0}{M_1}x(s)-\lambda\int_0^T G_n(s,t_1)\cdots\int_0^T G_1(t_{n-1},t_n)\left[a_0(t_n)x^{(0)}(t_n)\right]\mathrm{d}t_n\cdots\mathrm{d}t_1\right\}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中

$$
\Phi(t,s)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}(s-t)}}{\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1},\Phi(t,s)\le\Phi(t,t+T)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}}{\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1}=\delta,
$$

且

$$
\int_0^t\Phi(t,s)\mathrm{d}s=\frac{M_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{M_0}{M_1}T}\right)}{M_0\left(\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1\right)}\le\frac{M_1}{M_0\left(\mathrm{e}^{\frac{M_0}{M_1}T}-1\right)}.
$$

由(8)、(9)、(10)、(16)式和引理 3.2，得

$$
\begin{aligned}
\|x\|_0\le&\left(\frac{1}{M_0}+\frac{T\delta}{M_1}\right)\Bigg\{\|p\|_0+\rho+\left[M_0-m_0+(r+\varepsilon)\right]\|x\|_0+\Bigg[(M_{2n-1}-m_{2n-1})\left(\frac{T}{2}\right)+M_{2n-2}\left(\frac{T}{2}\right)^2\\
&+(M_{2n-3}-m_{2n-3})\left(\frac{T}{2}\right)^3+M_{2n-4}\left(\frac{T}{2}\right)^4+\cdots+\cdots(M_3-m_3)\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-3}+M_2\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-2}\\
&+(M_1-m_1)\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-1}\Bigg]\left\|x^{(2n)}\right\|_0\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{17}
$$

经化简后，有

$$
\begin{aligned}
&\frac{M_0M_1}{T\delta M_0+M_1}\|x\|_0-(M_0-m_0+r+\varepsilon)\|x\|_0\le\|p\|_0+\rho+\Bigg[(M_{2n-1}-m_{2n-1})\left(\frac{T}{2}\right)+M_{2n-2}\left(\frac{T}{2}\right)^2\\
&+(M_{2n-3}-m_{2n-3})\left(\frac{T}{2}\right)^3+\cdots+M_2\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-2}+(M_1-m_1)\left(\frac{T}{2}\right)^{2n-1}\Bigg]\left\|x^{(2n)}\right\|_0,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

因此，根据假设(H_4)、(18)式和 ε 的取值，可得

$$
\|x\|_0\le\frac{2\left(B\left\|x^{(2n)}\right\|_0+C\right)}{m_0-r}.
\tag{19}
$$

结合(12)式和(19)式，得

$$
(1-A^*)\left\|x^{(2n)}\right\|_0\le D\left(B\left\|x^{(2n)}\right\|_0+C\right)+\frac{TC}{2},
\tag{20}
$$

因此有

$$\left(A-DB\right)\left\|x^{(2n)}\right\|_0 \le DC+\frac{TC}{2}, \tag{21}$$

其中，$C=\rho+\|p\|_0, D=\dfrac{T}{m_0-r}\left(\dfrac{M_0M_1}{T\delta M_0+M_1}+\dfrac{m_0+r}{2}\right)$.

再由假设(H_4)和(21)式，得到

$$\left\|x^{(2n)}\right\|_0 \le \frac{DC+TC/2}{A-DB}=D_{2n}. \tag{22}$$

联立(19)和(22)式，得

$$\|x\|_0 \le \frac{2\left(BD_{2n}+C\right)}{m_0-r}=D_0. \tag{23}$$

最后，由(22)、(23)式和引理 3.2，得到

$$\left\|x^{(i)}\right\|_0 \le D_i,\ \left(0\le i\le 2n\right).$$

引理 3.4 得证。

定理 3.1 的证明： 设 $x(t)$ 是方程(6)的一个 T 周期解。由引理 3.4 知，存在独立于 λ 的常数 $D_i\left(i=0,1,\cdots,2n\right)$，使得(7)式成立。由(3)式知，存在正常数 $M_2>0$，使得

$$\operatorname{sgn}(x)g(x)>0,\ |x(t)|>M_2,\ t\in R. \tag{24}$$

取一正常数 $\bar{D}>\max_{0\le i\le 2n}\{D_i\}+M_2$，令

$$\Omega:=\left\{x\in X\,\middle|\,\|x\|<\bar{D}\right\}.$$

此时L是指标为零的 Fredholm 算子，N 是在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧的非线性算子。对任意有界的周期解 $x(t)$，当 $x\in\partial\Omega\bigcap DomL$，$\lambda\in(0,1)$时，有 $Lx\ne\lambda Nx$。

当 $x\in\partial\Omega\bigcap KerL$ 时，有 $x=\bar{D}$ 或 $x=-\bar{D}$，再结合(3)和(5)式可得

$$\begin{aligned}&x^{(i)}(t)=0,\ i=1,2,\cdots,n-1,\\&-\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{i=0}^{2n-1}a_0(t)\bar{D}+g\left(\bar{D}\right)-p(t)\right]dt<0,\\&\frac{1}{T}\int_0^T\left[\sum_{i=0}^{2n-1}a_0(t)\bar{D}-g\left(-\bar{D}\right)+p(t)\right]dt>0.\end{aligned} \tag{25}$$

然后由上式可知，当 $x\in\partial\Omega\bigcap KerL$ 时，有

$$QNx=\frac{1}{T}\int_0^T\left[-\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)-g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)+p(t)\right]dt\ne 0. \tag{26}$$

故对任意的 $x\in\partial\Omega\bigcap KerL$ 和 $\eta\in(0,1)$，有

$$xH(x,\eta)=-\eta x^2+\frac{x}{T}(1-\eta)\int_0^T\left[-\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)-g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)+p(t)\right]dt\ne 0. \tag{27}$$

因此，$H(x,\eta)$ 是一个同伦映射。进而有

$$\begin{aligned}\deg\left(QN,\Omega\bigcap KerL,0\right)&=\deg\left\{\frac{1}{T}\int_0^T\left[-\sum_{i=0}^{2n-1}a_i(t)x^{(i)}(t)-g\left(x\left(t-\tau(t)\right)\right)+p(t)\right]dt,\Omega\bigcap KerL,0\right\}\\&=\deg\left(-x,\Omega\bigcap KerL,0\right)\ne 0.\end{aligned} \tag{28}$$

根据引理 2.1 可知，方程 $Lx = Nx$ 在 $\bar{\Omega}\cap DomL$ 上至少存在一个解。因此，方程(1)至少存在一个T周期解。定理 3.1 得证。

基金项目

广东省自然科学基金资助项目(2018A030313871)。

参考文献

[1] Hale, J.K. and Lunel, S.M.V. (2013) Introduction to Functional Differential Equations. Springer Science & Business Media, Berlin.

[2] Kuang, Y. (1990) Global Stability of Gause-Type Predator-Prey Systems. *Journal of Mathematical Biology*, **28**, 463-474. https://doi.org/10.1007/BF00178329

[3] Candan, T. (2016) Existence of Positive Periodic Solutions of First Order Neutral Differential Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics Letters*, **52**, 142-148. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.08.014

[4] Fan, M. and Wang, K. (2001) Periodicity in a Delayed Ratio-Dependent Predator-Prey System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **262**, 179-190. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7555

[5] Guo, Z. and Yu, J. (2005) Multiplicity Results for Periodic Solutions to Delay Differential Equations via Critical Point Theory. *Journal of Differential Equations*, **218**, 15-35. https://doi.org/10.1016/j.jde.2005.08.007

[6] Guo, Z. and Yu, J. (2003) The Existence of Periodic and Subharmonic Solutions of Subquadratic Second Order Difference Equations. *Journal of the London Mathematical Society*, **68**, 419-430. https://doi.org/10.1112/S0024610703004563

[7] Lu, S. and Ge, W. (2004) Some New Results on the Existence of Periodic Solutions to a Kind of Rayleigh Equation with a Deviating Argument. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **56**, 501-514. https://doi.org/10.1016/j.na.2003.09.021

[8] Lu, S. and Yu, X. (2020) Periodic Solutions for Second Order Differential Equations with Indefinite Singularities. *Advances in Nonlinear Analysis*, **9**, 994-1007. https://doi.org/10.1515/anona-2020-0037

[9] Raffoul, Y.N. (2012) Existence of Positive Periodic Solutions in Neutral Nonlinear Equations with Functional Delay. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **42**, 1983-1993. https://doi.org/10.1216/RMJ-2012-42-6-1983

[10] Wang, W. and Shen, J. (2020) Positive Periodic Solutions for Neutral Functional Differential Equations. *Applied Mathematics Letters*, **102**, Article ID: 106154. https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106154

[11] Yang, H. and Zhang, L. (2020) Three Positive Periodic Solutions of Second Order Nonlinear Neutral Functional Differential Equations with Delayed Derivative. *Advances in Difference Equations*, **2020**, Article No. 164. https://doi.org/10.1186/s13662-020-02630-z

[12] Rojas, P.D. and Torres, V.P.J. (2021) Periodic Bouncing Solutions of the Lazer-Solimini Equation with Weak Repulsive Singularity. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **64**, Article ID: 103441. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2021.103441

[13] Lomtatidze, A. and Šremr, J. (2021) On Positive Periodic Solutions to Second-Order Differential Equations with a Sub-Linear Non-Linearity. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **57**, Article ID: 103200. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103200

[14] 丁伟岳. 扭转映射的不动点与常微分方程的周期解[J]. 数学学报, 1982(2): 227-235.

[15] 王根强, 燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性[J]. 数学学报: 中文版, 2004, 47(2): 379-384.

[16] Cao, J. and He, G. (2004) Periodic Solutions for Higher-Order Neutral Differential Equations with Several Delays. *Computers & Mathematics with Applications*, **48**, 1491-1503. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.07.007

[17] Guo, C., O'Regan, D., Xu, Y., *et al*. (2009) Existence of Periodic Solutions for a Class of Even Order Differential Equations with Deviating Argument. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2009**, Paper No. 12. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2009.4.12

[18] Wang, K. and Lu, S. (2007) On the Existence of Periodic Solutions for a Kind of High-Order Neutral Functional Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **326**, 1161-1173. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.078

[19] Gaines, R.E. and Mawhin, J.L. (2006) Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations. Springer, Berlin.

[20] Li, J. and Wang, G. (2005) Sharp Inequalities for Periodic Functions. *Applied Mathematics E-Notes*, **5**, 75-83.

[21] Shen, J. and Liang, R. (2007) Periodic Solutions for a Kind of Second Order Neutral Functional Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **190**, 1394-1401. https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.02.137