Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 206-211
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132024

Hans汉斯

等腰三角形存在性问题的解题与思想方法研究

——以一道中考数学题为例

胡宗涛

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年1月5日；录用日期：2023年2月6日；发布日期：2023年2月14日

摘 要

等腰三角形存在性问题是中学数学教学中一类非常经典的数学问题，文章通过深入分析一道中考等腰三角形存在性问题，帮助学生找到解决此类问题的解题思路，以期让学生通过掌握一道题目的解题方法来解决一类问题，并对解题过程中所渗透的数学思想方法进行总结，使学生感悟到运用数学思想方法解题的威力。

关键词

等腰三角形，存在性问题，解题，数学思想方法

Research on the Problem Solving and Thought Method of Isosceles Triangle Existence

—Taking a High School Math Problem for Example

Zongtao Hu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jan. 5th, 2023; accepted: Feb. 6th, 2023; published: Feb. 14th, 2023

Abstract

The existence problem of isosceles triangle is a very classical mathematical problem in middle school mathematical steaching. This paper, through in-depth analysis of the existence problem of isosceles triangle in the middle school examination, helps students find the problem-solving ideas to

文章引用: 胡宗涛. 等腰三角形存在性问题的解题与思想方法研究[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 206-211.
DOI: 10.12677/pm.2023.132024

solve such problems, so as to enable students to solve a class of problems by mastering the problem-solving methods of a topic. And the mathematical thought method permeated in the process of solving problems is summarized, so that students feel the power of using mathematical thought method to solve problems.

Keywords

Isosceles Triangle, Existential Problem, Problem-Solving, Mathematics Thoughts and Methods

1. 引言

等腰三角形存在性问题在中考中经常以压轴题的形式出现，初中数学教师更多地是从代数角度来进行教学，很少会在解题的过程中渗透数学思想方法，文章将从代数和几何两个角度来对此类问题进行探讨，目的在于能够让学生深刻体会数形结合的思想，加深对此类问题的理解。此外，等腰三角形的两个特征分别为两底角相等和两腰相等，这是等腰三角形与函数图像或几何图像相结合时产生多种情况的根源所在，更是分析等腰三角形存在性问题的突破口，只有找到问题的突破口，才能够解决问题[1]。等腰三角形的两条边相等需要根据题目的实际情况采用合理的方法构建，这是解决此类问题的一大难点[2]。目前有关等腰三角形存在性问题的文章更多地是对解题策略进行研究，鲜有文章对此类问题中渗透的数学思想方法进行详细总结，这也是本文与其他文章最大的不同。文章以一道经典的中考等腰三角形为例，对其解题方法以及问题中所渗透的数学思想方法进行总结，以期能够让学生通过解决一道题目，掌握一类问题的解题思路与方法，真正做到“举一反三”。

2. 真题呈现

(2021 年四川南充第 25 题)如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ 与 x 轴交于点 $A\left(1,0\right)$ 和 B 点，与 y 轴交于点 C，对称轴为直线 $x=\frac{5}{2}$。

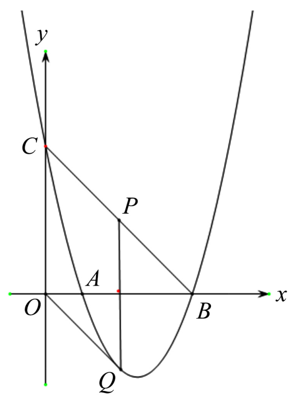

Figure 1. The picture of the second question
图 1. 第二问图

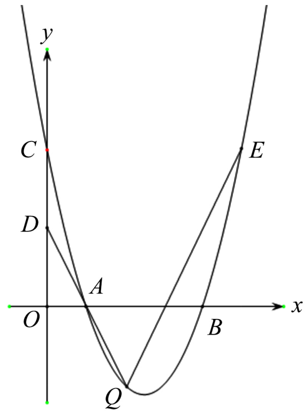

Figure 2. The picture of the third question
图 2. 第三问图

1) 求抛物线的解析式。

2) 如图 1，若点 P 是线段 BC 上一个动点(不与点 B，C 重合)，过点 P 做 y 轴的平行线交抛物线于点 Q，连接 OQ，当线段 PQ 长度最大时，判断四边形 $OCPQ$ 的形状并说明理由。

3) 如图 2，在(2)的条件下，D 是 OC 的中点，过点 Q 的直线与抛物线交与点 E，且 $\angle DQE=\angle ODQ$。在 y 轴上是否存在点 F，使得 ΔBEF 为等腰三角形？若存在，求点 F 的坐标，若不存在，请说明理由。

3. 试题解答

1) 根据题意，

得 $\begin{cases} a+b+4=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{2} \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \end{cases}$，$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2-5x+4$。

2)【解题分析】P 点为 BC 上的动点，判断当 PQ 最长时 ΔBEF 四边形 $OCPQ$ 的长度，首先要找到当 P 点处于 BC 什么位置上时 PQ 的长度最大，这里需要学生具备数形结合的思想，敏锐地感知到虽然 PQ 的长度是不断变化的，但是可以通过“形化数”的方式将线段 PQ 转化成代数问题来解决。设出 P 点的坐标，从而得到 Q 点的坐标，PQ 的长度就是两个点纵坐标之差，最后利用一元二次方式求最值的方式来解决此问题。

解答过程：四边形为平行四边形。

$\because B(4,0)$，$C(0,4)$

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=-x+4$。点 P 在线段 BC 上，

$\therefore$ 可设 $P(t,-t+4)(0<t<4)$。

$\because PQ\parallel y$ 轴，$\therefore Q(t,t^2-5t+4)(0<t<4)$，

$\therefore PQ=-(t-2)^2+4$。

当 $t=2$ 时，线段 PQ 最长为 4，

$\because OC=4$，$\therefore OC=PQ$

又 $\because OC\parallel PQ$

$\therefore$ 当线段 PQ 最大时，四边形 $OCPQ$ 为平行四边形。

3)【解题分析】y 轴上存在一点 E 使得 ΔBEF 为等腰三角形，那么必然需要对 ΔBEF 为等腰三角形的各种情况进行具体分析，即对 $BE=BF$、$BF=EF$、$BE=EF$ 三种情况进行讨论，这里考查学生是否具有

分类讨论的数学思想。设出 F 点的坐标，利用两点之间的距离公式来列方程求解。对于等腰三角形三条边相等情况的讨论，也可以利用几何法进行解决，当 $BE=BF$ 时，只需以 B 为圆心，以 BE 为半径画圆，若圆与 y 轴相交，则说明存在点 F 使得 $BE=BF$，若圆与 y 轴不相交，则说明不存在点 F 使得 $BE=BF$。当 $BF=EF$ 时，根据垂直平分线的性质，F 点在 BE 垂直平分线上，因此我们只需作出 BE 的垂直平分线，垂直平分线与 y 轴的交点即为 F 点。当 $BE=EF$ 时，同理以 E 点为圆心，以 BE 为半径画圆来找 F 点。

方法 1：代数法

如图 3 所示，已知 $C(0,4)$，D 是 OC 的中点，

$\therefore D(0,2)$。由(2)知，$Q(2,-2)$，$P(2,2)$。

$\because PQ \parallel OC$，$\therefore \angle ODQ=\angle PQD$。

又 $\because \angle DQE=2\angle ODQ$，$\therefore \angle PQD=\angle PQE$。

点 D 关于 PQ 对称点 $M(4,2)$。

直线 QE 过点 $M(4,2)$ 和 $Q(2,-2)$。

$\therefore$ 直线 QE 的解析式为 $y=2x-6$。

$\because$ 点 E 是直线 QE 与抛物线 $y=x^2-5x+4$ 的交点，

$\therefore E(5,4)$，假设存在 y 轴上的点 $F(0,m)$ 使得 ΔBEF 为等腰三角形。

分类讨论：

① 若 $BF=EF$，即 $BF^2=EF^2$，则 $4^2+m^2=5^2+(4-m)^2$，

解得 $m=\dfrac{25}{8}$，$\therefore F\left(0,\dfrac{25}{8}\right)$。

② 若 $EF=BE$，则 $EF^2=BE^2$，则 $4^2+m^2=(5-4)^2+4^2$，

解得 $m=\pm1$，$\therefore F(0,1)$ 或 $(0,-1)$。

③ 若 $EF=BE$，则 $EF^2=BE^2$，则 $5^2+(4-m)^2=(5-4)^2+4^2$，化简得 $m^2-8m+24=0$。

$\because \Delta=-32<0$，

$\therefore$ 方程无解，故在 y 轴上存在点 F，使得 ΔBEF 为等腰三角形。

综上所述，y 轴上存在点 F，使得 ΔBEF 为等腰三角形。

点 F 的坐标为 $\left(0,\dfrac{25}{8}\right)$，$(0,1)$，$(0,-1)$。

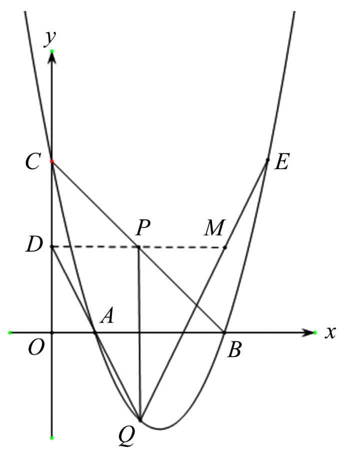

Figure 3. Study isosceles triangle by algebraic method
图 3. 代数法研究等腰三角形

方法 2：几何法

① 若 $BE = BF$，如图 4 所示，以 B 为圆心，以 BE 为半径画圆，与 y 轴交点 $F_1(0,1)$ 与 $F_2(0,-1)$，则 ΔBF_1E 与 ΔBF_2E 均为等腰三角形。

② 若 $BF = EF$，如图 5 所示，作 BE 的垂直平分线与 y 轴交于点 F_3，设垂足为 H，下面可以用代数法来进行计算，而几何法可以帮助我们大致确定点 F 的位置与个数。

③ 若 $EF = BE$，如图 6 所示，以 E 点为圆心，以 BE 为半径画圆，明显与 y 轴无交点，因此 y 轴上不存在点 F 使得 $EF = BE$。

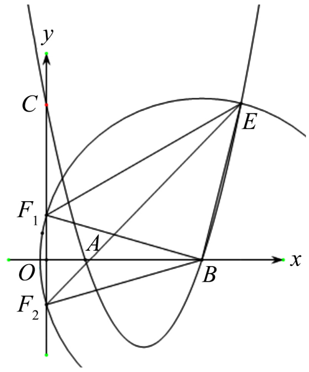

Figure 4. Geometric method case one
图 4. 几何法第一种情形

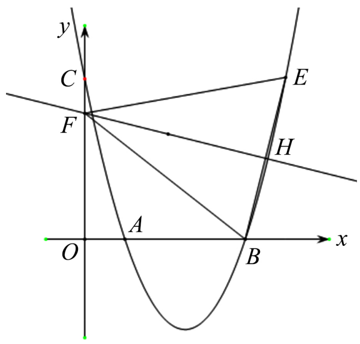

Figure 5. Geometric method case two
图 5. 几何法第二种情形

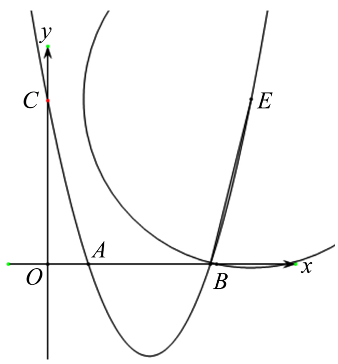

Figure 6. Geometric method case three
图 6. 几何法第三种情形

4. 试题赏析及数学思想方法总结

4.1. 分类讨论思想，培养学生概括性思维

第(3)问中对 ΔBEF 为等腰三角形的讨论，能够体现等腰三角形的两个特征，即两底角相等或两腰相等，由此引出解决此问题的第一个关键性思想—分类讨论思想，即通过对 $BE = BF$、$BE = EF$、$BF = EF$ 三组两边相等来列方程求解，通过查阅此类文献后发现，大多数有关等腰三角形存在性问题的文章均通过讨论等腰三角形的两个特征来进行分类讨论[1] [2] [3] [4] [5]，由此可以得出：基于等腰三角形的两个特征进行分类讨论是解决等腰三角形存在性问题的核心解题思路，通过解决一道题目和查阅相关文献，发现并印证了此类问题的普适性解题方法，并对解题方法中所渗透的数学思想方法进行了总结，使学生深入理解等腰三角形的概念的同时培养了学生的概括性思维。

4.2. 数形结合思想，代几巧妙运用

第(3)问可采用多种方法解题。代数法通过等腰三角形两边相等来建立方程关系，可以很好的解决问题，但是计算量较大，而且需要进行检验。根据第(3)问题意可知，只需要找到 y 轴上满足 ΔBEF 为等腰三角形的 F 点即可，由此可以借助圆作为解题工具来进行分类研究。如图 4 所示，当圆心为 B 点且 $BE = BF$ 时，只需以 B 点为圆心，以 BE 为半径画圆，若圆与 y 轴相交，则交点即为 F 点。同理如图 6 所示，只需以 E 为圆心，以 BE 为半径画圆。而当 $BE = EF$ 时，可以根据垂直平分线的性质，连接 BE，作 BE 的垂直平分线即可，与 y 轴的交点即为 F 点。综上所述，代数法与几何法两者相互运用，体现了数学解题中数形结合的思想方法，可以帮助学生从两种角度来分析与解决问题，正如我国著名数学家华罗庚先生所说：“数无形时少直觉，形少数时难入微，数形结合百般好，隔离分家万事休。”因此，在解决代数问题时结合几何思想往往能够更轻松的解决问题，更能让学生体会到运用数学思想方法的威力。

4.3. 层层递进，难度梯次分明

近些年来，有些地方的数学中考人为地制造“难题”，解题思路难以想到，得分率低，使数学失去了自然性，侧重技巧而忽视对于课本知识的升华与应用。本题前两问难度较小，表述清晰，求二次函数解析式和证明平行四边形更是中考常见的考察点。而在第(1)和第(2)问的基础上第(3)问难度又有递进，但解题思路却很好想，给学生一种“跳一跳，够得到”的感觉，体现了解决数学问题的一般规律与通性，也起到了很好的选拔作用。

参考文献

[1] 黄立亮. 基于分类讨论思想, 解决存在性问题——以等腰三角形存在性问题为例[J]. 中学数学, 2021(14): 67-68+89

[2] 石明珠. 走进等腰三角形, 探讨存在性问题——等腰三角形存在性问题的策略探究与反思[J]. 中学数学, 2020(4): 57-58+78.

[3] 张璇. 基于分类讨论思想研究二次函数与等腰三角形结合问题的解决策略[J]. 中学数学, 2020(6): 78-79.

[4] 黄学芳. 分类讨论思想在几何中的应用——以《等腰三角形中的分类讨论》教学为例[J]. 湖北教育(教育教学), 2019(2): 71.

[5] 刘正荣, 董建功. 关于等腰三角形存在性问题的解题策略初探[J]. 中小学数学(初中版), 2012(5): 34-36.