Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 149-157
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132017

Hans汉斯

$n-$李代数与 $n-$泊松结构

李 佳

南昌航空大学数学与信息科学学院, 江西 南昌

收稿日期：2022年12月31日；录用日期：2023年1月30日；发布日期：2023年2月6日

摘 要

本文从高阶角度出发，首先研究 $n-$李代数的结构常数，它是作为李代数的自然推广，是基本乘法运算为 $n-$ 元线性运算的一种代数系统。其次通过定义流形上的 $n-$泊松括号引出 $n-$泊松结构的定义及性质，得到 $n-$李代数与 $n-$泊松结构一一对应关系。最后在向量丛上研究余切丛上的 $n-$李代数胚，给出了 $n-$李代数胚的余态射与 $n-$泊松映射的关系。

关键词

$n-$泊松结构，$n-$李代数，$n-$李代数胚

$n-$Lie Algebra and $n-$Poisson Structure

Jia Li

College of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: Dec. 31^{st}, 2022; accepted: Jan. 30^{th}, 2023; published: Feb. 6^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we first study the structural constants of $n-$Lie algebras, which is a natural generalization of Lie algebras and an algebraic system whose basic multipli-

文章引用: 李佳. $n-$李代数与 $n-$泊松结构[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 149-157.
DOI: 10.12677/pm.2023.132017

cation operations are linear operations of $n-$elements. Secondly, the definition and properties of $n-$Poisson structure are derived by defining the $n-$Poisson bracket on a manifold and the one-to-one correspondence between $n-$Lie algebras and $n-$Poisson structure is obtained. Finally, we study the $n-$Lie algebras on cotangent bundles, and give the relation between the comorphism of $n-$Lie algebras and $n-$Poisson mapping.

Keywords

$n-$**Pisson Structure,** $n-$**Lie Algebras,** $n-$**Lie Algebroids**

1. 引言

$n-$李代数[1, 2] (又称为 Filippov 代数, Nambu-Poisson 代数)是由前苏联数学家 Filippov 在1985年提出的, 但此多元代数系统早已被更早地应用到物理研究领域. 在 Nambu$-$力学系统中[3, 4] $[f_1, \cdots, f_n] = det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$ 是最典型的一个无限维$n-$李代数的例子. 近几年 $n-$李代数有更广泛的应用空间, 使得 $n-$李代数的结构得到了飞速发展. 在[5]中有更多关于 $n-$李代数的内容. 历史上, Poisson (泊松)为了研究古典力学系统的运动方程和守恒定律等基本问题, 在可观测量代数上引进了一个双扩号运算, 后来在古典力学的研究中起了重要作用, 被称为泊松括号. 由[6] 引入的 Courant 代数胚的一个非常重要的性质是它的截面空间是一个李2$-$代数, 使泊松结构与高阶结构密切相关. 用高阶李理论的方法研究泊松几何中的问题, 不仅能促进科学本身的发展, 还能帮助我们用更高的观点在更高的层次上来观察和解决问题. $n-$李代数胚是对 $n-$李代数及切丛的推广, 是在向量丛上的研究.

本文由[7]中作者给出的李代数与向量空间中的泊松结构一一对应关系, 继续研究 $n-$李代数 $n-$泊松结构的对应关系. 在流形 M 上全体哈密顿向量场的集合带有向量场的括号运算构成了李代数, 则在 $C^\infty(M)$上也可以引入括号运算, 即泊松括号. 对应在高阶向量场上得到 $n-$泊松括号. 接着在向量丛上引入了李代数胚的定义, 继续讨论丛上 $n-$泊松流形的余切 $n-$李代数胚.

2. $n-$李代数与$n-$泊松结构的对应关系

定义1. 设 $[\epsilon_i]$ 是向量空间 g 上的一组基, $i = 1, \cdots, dimg$, 则定义一个 $n-$李代数结构常数, 如下 $[\epsilon_{i_1}, \cdots, \epsilon_{i_n}]_g = \sum_{k=1}^{n} C^k_{i_1\cdots i_n}\epsilon_k$

定义2. [1]一个 $n-$李代数是一个向量空间 g 以及一个 $n-$重线性反对称括号运算$[\cdot,\cdots,\cdot]_g: \wedge^n g \to g$, 使得对任意的 $\epsilon_i,\epsilon_j \in g$, 以下基本恒等式成立:

$$[\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}},[\epsilon_{j_1},\cdots,\epsilon_{j_n}]]_g = \sum_k [\epsilon_{j_1},\cdots,\epsilon_{j_{k-1}},[\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}},\epsilon_{j_k}],\epsilon_{j_{k+1}},\cdots,\epsilon_{j_n}] \tag{1}$$

定义 $ad:\wedge^{n-1}g \to gl(g)$ 如下,

$$ad_{\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}}}:\epsilon_{j_k} \to [\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}},\epsilon_{j_k}], \forall \epsilon_i,\epsilon_j \in g \tag{2}$$

则eq:n-Lie algebra等价于 $ad_{\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}}}$ 是一个导子, 即

$$ad_{\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}}}[\epsilon_{j_1},\cdots,\epsilon_{j_n}]_g = \sum_{k=1}^{n}[\epsilon_{j_1},\cdots,ad_{\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}}}\epsilon_{j_k},\epsilon_{j_n}]_g. \tag{3}$$

命题1. 对于一个 $n-$李代数, 其结构常数满足等式

$$C^l_{j_1\cdots j_n}C^m_{i_1\cdots i_{n-1},l} = \sum_{k=1}^{n} C^l_{i_1\cdots i_{n-1},j_k}C^m_{j_1\cdots j_{k-1},l,j_{k+1}\cdots j_n}$$

证明

$$[\epsilon_{i_1},\cdots,\epsilon_{i_{n-1}},\sum_{l=1}^{n}C^l_{j_1\cdots j_n}\epsilon_l] = \sum_{k=1}^{n}[\epsilon_{j_1},\cdots,\epsilon_{j_{k-1}},\sum_{l=1}^{n}C^l_{i_1\cdots i_{n-1},j_k}\epsilon_l,\cdots,\epsilon_{j_n}]$$

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}C^l_{j_1\cdots j_n}C^m_{i_1\cdots i_{n-1},l}\epsilon_m = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}C^l_{i_1\cdots i_{n-1},j_k}C^m_{j_1\cdots j_{k-1},l,j_{k+1}\cdots j_n}\epsilon_m$$

$$C^l_{j_1\cdots j_n}C^m_{i_1\cdots i_{n-1},l} = \sum_{k=1}^{n} C^l_{i_1\cdots i_{n-1},j_k}C^m_{j_1\cdots j_{k-1},l,j_{k+1}\cdots j_n}$$

定义3. [8]流形 M 上的 $n-$ 泊松括号是一个 $n-$ 重线性映射$\{.,...,.\}:C^\infty(M)\times...\times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ 满足:

(1) 反对称: 对任意的 $f_i \in C^\infty(M), (1 \le i \le n)$, $\sigma \in S_n$ (S_n是n阶对称群),

$$\{f_1,\cdots,f_n\} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)}\{f_{\sigma(1)},\cdots,f_{\sigma(n)}\}.$$

(2) 莱布尼兹性质: 对任意的 $f_i, g \in C^\infty(M), (1 \le i \le n)$,

$$\{f_1 g, f_2,\cdots,f_n\} = f_1\{g,f_2,\cdots,f_n\} + g\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}.$$

(3) 基本恒等式: 对任意的 $f_i, g_j \in C^\infty(M), (1 \le i \le n-1, 1 \le j \le n)$,

$$\{f_1,\cdots,f_{n-1},\{g_1,\cdots,g_n\}\} = \sum_{j=1}^{n}\{g_1,\cdots,\{f_1,\cdots,f_{n-1},g_j\},\cdots,g_n\}.$$

如果 $\{.,...,.\}$ 是一个 $n-$泊松括号, 则存在 $n-$向量场 $\pi \in \Gamma(\wedge^n TM)$ 满足 $\pi(df_1 \wedge \cdots \wedge df_n) = \{f_1, \cdots, f_n\}$, 称为 $n-$泊松向量场. 在基 $[\epsilon_i]$ 下,$n-$泊松向量场可以表示为

$$\pi = \sum C^k_{i_1 \cdots i_n} \epsilon_k \frac{\partial}{\partial \epsilon_{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial \epsilon_{i_n}}.$$

则线性 $n-$泊松结构所确定的结构常数 $\{C^k_{i_1 \cdots i_n}\}$ 即为 $n-$李代数结构的结构常数.

相反设 g 的对偶空间 g^* 的基为$[\mu^i]$, 使得$< \mu^i, \epsilon_j >= \delta^i_j$ • 则 g^*上函数的导子为:

$$df|_\mu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \epsilon_k}|_\mu d\epsilon_k|_\mu \in T^* g^*|_\mu \forall f \in C^\infty(g^*), \mu \in g^*.$$

注意到 g 的基为$\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$, $T^* g^*$ 有基 $\{d\epsilon_1|_\mu, \cdots, d\epsilon_n|_\mu\}$, 它们之间可以建立同构关系$T^* g^*|_\mu \to g$,

$$d\epsilon_k|_\mu \mapsto \epsilon_k, \forall k = 1, \cdots, n,$$

再令

$$\{f_1, \cdots, f_n\}(\mu) =< \mu, [df_1|_\mu, \cdots, df_n|_\mu] > .$$

其中 $<,>$ 表示对偶空间之间的配对运算, 因此

$$\{f_1, \cdots, f_n\}(\mu) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon_{i_1}}, \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial \epsilon_{i_n}} C^k_{i_1 \cdots i_n} \epsilon_k(\mu).$$

特别的对 g^* 上的坐标函数有

$$\{\epsilon_{i_1}, \cdots, \epsilon_{i_n}\}(\mu) = \sum C^k_{i_1 \cdots i_n} \epsilon_{i_k}(\mu).$$

由此得到了 g^* 上的 $n-$线性泊松结构, 可以得到以下定理.

定理1 向量空间与其对偶空间上的 $n-$李代数结构之间有自然的一一对应关系, 使两种结构有相同的结构常数.

下面给出 $n-$泊松结构的等价条件.

定理2 若 $\{.,...,.\}$ 是一个 $n-$泊松括号, 则有 $\mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} \Pi = 0$

证明

$$\begin{aligned} &\left(\mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} \Pi\right)(dg_1, ..., dg_n) \\ &= \mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} (\Pi(dg_1, ..., dg_n) - \sum_{i=1}^n \Pi\left(dg_1, ..., \mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} dg_i, ..., dg_n\right) \\ &= \mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} (\{g_1, ..., g_n\}) - \sum_{i=1}^n \{g_1, ..., \mathcal{L}_{X_{f_1 \cdots f_{n-1}}} g_i, ..., g_n\} \\ &= \{f_1, ..., f_{n-1}, \{g_1, ..., g_n\}\} - \sum_{i=1}^n \{g_1, ..., \{f_1, ..., f_{n-1}, g_i\}, ..., g_n\}. \end{aligned}$$

设 (M,π) 是 $n-$维泊松流形, 它的括号为 $\{f_1,\cdots,f_n\}=\pi(df_1,\cdots,d_{f_n})$. 可以诱导出一个映射 $\pi^\sharp:\wedge^{n-1}(M)\to X(M)$, 定义如下:

$$\{f_1,\cdots,f_{n-1},g\}=\pi(df_1,\cdots,d_{f_{n-1}},dg)=< X_{f_1,\cdots,f_{n-1}},dg >$$

其中 $X_{f_1,\cdots,f_{n-1}}$ 是由 π 确定的哈密顿向量场

3. $n-$泊松流形上的余切 $n-$李代数胚

定义4[8]设 M 是一个流形, $f:E\to M$ 是向量丛, 流形M上的一个 $n-$李代数胚是一个三元组(E,ρ,M), 其中 $\rho:\wedge^{n-1}E\to TM$ 是丛映射, 且在 $\Gamma(\wedge^{n-1}E)$ 和 $X(M)$ 之间诱导了李代数同态, 即对任意的 $f\in C^\infty(M),X_1,\cdots,X_{n-1},Y\in\Gamma(E)$, 有

$$[\rho(X_1\wedge\cdots\wedge X_{n-1}),\rho(Y_1\wedge\cdots\wedge Y_{n-1})]=\sum_{i=1}^{n-1}\rho(Y_1\wedge\cdots[X_1,\cdots,X_{n-1},Y_i]\wedge\cdots\wedge Y_{n-1}),$$

$$[X_1,\cdots,X_{n-1},fY]=f[X_1,\cdots,X_{n-1},Y]+\rho(X_1\wedge\cdots\wedge X_{n-1})(f)Y.$$

ρ称为锚映射.

设 (M,π) 是一个 $n-$泊松流形, 切丛 $V=TM$ 上存在一个 $n-$泊松结构 π_{TM} 使得对任意的 $f_1,\cdots,f_n$ 有 $\{f_{1T},\cdots,f_{nT}\}_{TM}=\{f_1,\cdots,f_n\}_T$, 这里 π_{TM} 是一个 $n-$泊松结构, 则可以在对偶丛 $\wedge^{n-1}T^*M$ 上定义一个 $n-$李代数胚, 其中锚映射满足

$$\rho(df_1,\cdots,df_{n-1})=X_{f_1,\cdots,f_{n-1}}=\pi^\sharp(df_1,\cdots,df_{n-1}),\rho=\pi^\sharp:\wedge^{n-1}T^*_\pi\to TM.$$

命题2. 在 $n-$李代数胚截面上的括号满足 $[df_1,\cdots,df_{n-1}]=d\{f_1,\cdots,f_n\}$.

证明 设 $\phi_{df_1}=f_{1T},\phi_{[df_1,\cdots,df_n]}=\{\phi df_1,\cdots,\phi df_n\}=\{f_{1T},\cdots,f_{nT}\}=\{df_1,\cdots,df_n\}_T=\phi_{d\{f_1,\cdots,f_n\}}$

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\in\Omega^1(M)$ 则定义一个$n-$余切丛映射:

$$\pi^\sharp(\alpha_1\wedge\cdots\wedge_{n-1})(\alpha_n)=\pi(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n),$$

定义括号

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}=L_{\Pi^\sharp(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1})}\alpha_n-L_{\Pi^\sharp(\alpha_n)}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1})-d\Pi(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n).$$

容易得到

$$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},f\alpha_n\}=f\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n\}+\Pi^\sharp(\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_{n-1})(f)\alpha_n.$$

我们得到余切丛 $n-$李代数胚.

定义5 一个向量丛余态射满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dashed, "\Phi_E"] \arrow[d] & E_2 \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r, "\Phi_M"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

$\Phi_E : M_1 \to M_2$是基映射, 给定一个向量丛余态射在截面上可以得到拉回映射

$$\Phi_E^* : \Gamma(E_2) \to \Gamma(E_1) \tag{4}$$

定义6 设$E_1 \to M_1$, $E_2 \to M_2$ 是两个 $n-$李代数胚, 若 $\Phi_E : E_1E_2$ 是一个 $n-$李代数胚余态射, 是一个向量丛余态射如果满足:

(1) 拉回映射(4)保括号性质,

(2) 锚映射满足: $\rho_1(\Phi_E^*(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1})) \sim_{\phi_M} \rho_2(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1})$ 可以得到如下交换图

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, dashed, "\Phi_E"] \arrow[d, "\rho_1"'] & E_2 \arrow[d, "\rho_2"'] \\ TM_1 \arrow[r, "T\Phi_M"'] & TM_2 \end{tikzcd}$$

设 E_2 的截面是 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}, Y_n$, f 是 M_2 上的光滑函数, 则有$\Phi^*[Y_1, \cdots, Y_{n-1}, fY_n]$ $= [\Phi^*Y_1, \cdots, \Phi^*Y_{n-1}, (\Phi^*f)\Phi^*Y_n]$, 则通过 $n-$李代数胚的定义得到公式:

$$((\Phi^*(\rho_2(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1})f)) - \rho_1(\Phi^*(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1}))(\Phi^*f))\Phi^*Y_n = 0$$

这证明了 $(\Phi^*(\rho_2(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1})f)) = \rho_1(\Phi^*(Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1}))(\Phi^*f)$.

定理3 设$E_1 \to M_1$, $E_2 \to M_2$ 是两个 $n-$李代数胚, 向量丛余态射 $\Phi_E : E_1E_2$ 是一个 $n-$代数胚余态射当且仅当对偶映射 $\Phi_{E^*} : E_1^* \to E_2^*$ 是一个 $n-$泊松映射.

证明 对于余态射$\Phi_E : E_1E_2$ 和任意的 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}, Y_n \in \Gamma(E_2)$, 有

$$\phi_{\Phi_E^* Y_i} = \Phi_E^* \phi_{Y_i}.$$

给定截面 $Y_1, \cdots, Y_{n-1}, Y_n \in \Gamma(E_2), f \in C^\infty(M_2)$, 有

$$\phi_{\Phi_E^*[Y_1,\cdots,Y_{n-1},Y_n]} = \Phi_E^* \phi_{[Y_1,\cdots,Y_{n-1},Y_n]} = \Phi_E^* \{\phi_{Y_1}, \cdots, \phi_{Y_{n-1}}, \phi_{Y_n}.\}$$

$$\phi_{[\Phi_E^* Y_1,\cdots,\Phi_E^* Y_{n-1},\Phi_E^* Y_n]} = \{\phi_{\Phi_E^* Y_1}, \cdots, \phi_{\Phi_E^* Y_{n-1}}, \phi_{\Phi_E^* Y_n}\} = \{\Phi_E^* \phi_{Y_1}, \cdots, \Phi_E^* \phi_{Y_{n-1}}, \Phi_E^* \phi_{Y_n}.\}$$

$$p_1^* \Phi_{E^*}^* (\rho_2((Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1}))f) = \Phi_{E^*}^* p_2^* (\rho_2((Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_{n-1}))f) = \Phi_{E^*}^* \{\phi_{Y_1}, \cdots, \phi_{Y_{n-1}}, p_2^* f.\}$$

这样等式左边等于 $n-$李代数胚态射, 右边等于 $n-$泊松态射.

定义7 设$\Phi: M_1 \to M_2$ 是光滑映射, $n-$向量场$\vartheta \in X^n(M_1)$ 与向量场 $\zeta \in X^n(M_2)$ 被称为是$\Phi-$相关的如果满足:

$$\zeta_{\Phi(x)} = (d_x\Phi)_*\vartheta_x, \forall x \in M_1.$$

由 Φ 的微分可以诱导映射 $(d_x\Phi)_*: \wedge^n T_xM_1 \to \wedge^n T_{\Phi(x)}M_2$, $\zeta = \Phi_*\vartheta$.

命题3. 设(M_1, π_{M_1}) 和(M_2, π_{M_2}) 是两个 $n-$泊松流形, 给定光滑映射 $\Phi: M_1 \to M_2$, 可得到如下等价关系:

(1) π_{M_1}与π_{M_2}是Φ相关的.

(2) 对于$x \in M_1$满足如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\wedge^{n-1}T_x^*M_1 \arrow[d, "\Pi^\sharp_{M_1}"'] \arrow[r, dashed, "(d_x\Phi)^*"] & \wedge^{n-1}T^*_{\Phi(x)}M_2 \arrow[d, "\Pi^\sharp_{M_2}"'] \\
T_xM_1 \arrow[r, "(d_x\Phi)_*"'] & T_{\Phi(x)}M_2
\end{tikzcd}$$

证明

$$((d\Phi)_*\Pi_{M_1})(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, \alpha_n) = \Pi_{M_2}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow ((d\Phi)^*\alpha_n)(\Pi^\sharp_{M_1}((d\Phi)^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}))) = \alpha_n(\Pi^\sharp_{M_2}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}))$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n(d\Phi(\Pi^\sharp_{M_1}((d\Phi)^*(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})))) = \alpha_n(\Pi^\sharp_{M_2}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1})).$$

定义8 设$E \to M$是 $n-$李代数胚, 沿着 $N \subseteq M$ 存在向量子丛 $F \subseteq E$, 如果满足:

(1) E 的截面是$X_1, \cdots, X_{n-1}, Y$, 限制在 N 上 F 的截面保留括号$[\cdot, \cdot]$,

(2) $\rho(F) \subseteq TN$. 则 F 称为一个 $n-$李子代数胚.

命题4. 如果 $F \subseteq E$ 是沿着 $N \subseteq M$ 的一个 $n-$ 李子代数胚, 则 F 必有 $n-$李代数胚结构, 对应的锚映射为 $\rho: E \to TN$, 括号运算为:

$$[X_1|_N, \cdots, X_{n-1}|_N, Y|_N] = [X_1, \cdots, X_{n-1}, Y]|_N, X_1|_N, \cdots, X_{n-1}|_N, Y|_N \in \Gamma(F).$$

证明 证明括号是良定义, 当$Y|_N = 0$, 则 $[X_1, \cdots, X_{n-1}, Y]|_N = 0$. 记$Y = \Sigma_i f_iY_i$, $f_i \in C^\infty(M)$ 在流形 N 上等于0, 则

$$[X_1, \cdots, X_{n-1}, Y]_N = \sum_i f_i|_N[X_1, \cdots, X_{n-1}, Y_i]|_N + (\rho(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1})f_i)|_NY_i|_N = 0.$$

这里 $\rho(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1})f_i = 0$, 因为 $\rho(X_1 \wedge \cdots \wedge X_{n-1})$ 与 N 相切.

设 $E \to M$ 是一个 $n-$李代数胚, $N \subseteq M$ 是一个子流形. 设 $\rho^{-1}(TN) \subseteq E$ 是一个光滑子丛. 则与 N 相切的向量场的李括号仍与 N 相切, 得到 $\rho^{-1}(TN) \subseteq E$ 是沿着 $N \subseteq M$ 的一个 $n-$李子代数

胚.

设 $i: N \to M$ 是一个嵌入映射, 视 $i^! E := \rho^{-1}(TN)$ 是限制在 N 上一个 $n-$李代数胚良定义, 以下两种特殊情况:

(1) 如果 ρ 与 N 相切(ie. $\rho(E|_N) \subseteq TN$), 则 $i^! E = E|_N$.

(2) 如果 ρ 与 N 横截 $(\rho(E) + \Phi^*(TN) = TM)$, 则 $i^! E$ 是一个良定义,

$$rank(i^! E) = rank(E) - dim(M) + dim(N), i^! TM = TN.$$

定义9 如果 $E_1 \to M_1, E_2 \to M_2$ 是两个 $n-$李代数胚, 一个向量从映射 $\Phi_E : E_1 \to E_2$ 是一个 $n-$李代数胚态射如果它的图 $Gr(\Phi_E) \subseteq E_2 \times E_1^-$ 是沿着 $Gr(\Phi_M)$ 的一个 $n-$李子代数胚.

一个 $n-$泊松向量场 π 处处与 N 相切, 则子流形 $N \subseteq M$ 是一个 $n-$泊松子流形. 定义一个向量场 $\pi_N \in \wedge^n TN \subseteq \wedge^n TM$, 对于映射 $j: N \to M$, 则 $\pi_N \sim_j \pi$, 对应的 $n-$泊松括号如下:

$$\{j^* f_1, \cdots j^* f_n\}_N = j^* \{f_1, \cdots f_n\}.$$

定理4如下条件等价:

(1) N 是一个 $n-$泊松子流形.

(2) $\Pi^\sharp(\wedge^{n-1} T^* M|_N) \subseteq TN$.

(3) 所有的哈密顿向量场 $X_{f_1, \cdots, f_{n-1}}, (f_1, \cdots, f_{n-1}) \in C^\infty(M)$ 与 N 相切.

(4) 在 $n-$泊松括号下, 函数 $f_1|_N, \cdots, f_{n-1}|_N = 0$ 是一个 $n-$李代数理想.

证明 (1),(2)显然等价, 当条件(3)成立时, 则在流形 N 处等于0的函数是理想, 则当 $g|_N = 0$ 时有 $\{f_1, \cdots, f_{n-1}, g\}|_N = X_{f_1, \cdots, f_{n-1}}(g)|_N = 0$ 因为 $X_{f_1, \cdots, f_{n-1}}$ 与 N 相切. (4) 得证, 相反如果(4) 成立, 则当 $g|_N = 0$ 时有 $\{f_1, \cdots, f_{n-1}, g\}|_N = 0$, 即 $< dg, X_{f_1, \cdots, f_{n-1}} > |_N = X_{f_1, \cdots, f_{n-1}}(g)|_N = 0$, 证毕.

参考文献

[1] Filippov, T. (1985) n-Lie Algebras. *Siberian Mathematical Journal*, **26**, 879-891. https://doi.org/10.1007/BF00969110

[2] Kasymov, Sh.M. (1987) On a Theory of n-Lie Algebras. *Algebra and Logic*, **26**, 155-166. https://doi.org/10.1007/BF02009328

[3] Nambu, Y. (1973) Generalized Hamiltonian Dynamics. *Physical Review D*, **7**, 2405-2412. https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2405

[4] Takhtajan, L. (1994) On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, **160**, 295-315. https://doi.org/10.1007/BF02103278

[5] de Azcárraga, J.A. and Izquierdo, J.M. (2010) n-ary Algebras: A Review with Applications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **43**, Article ID: 293001.

[6] Liu, Z., Weinstein, A. and Xu, P. (1997) Manin Triples for Lie Bialgebroids. *Journal of Differential Geometry*, **45**, 547-745. https://doi.org/10.4310/jdg/1214459842

[7] Meinrenken, E. (2018) Poisson Geometry from a Dirac Perspective. *Letters in Mathematical Physics*, **108**, 447-498.

[8] Vallejo, J.A. (2001) Nambu-Poisson Manifolds and Associated n-ary Lie Algebroids. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **34**, 9753.
https://doi.org/10.1088/0305-4470/34/45/501