Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(2), 166-171
Published Online February 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.132019

Gorenstein(n, d)-投射模

刘立丽

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年1月5日；录用日期：2023年2月6日；发布日期：2023年2月14日

摘　要

设R和S均是环，本文研究了Gorenstein(n, d)-投射模及其一些基本性质，进一步，设 $f : R \to S$ 是一个环的满同态，给出了Gorenstein(n, d)-投射模的一个等价刻画。

关键词

Gorenstein(n, d)-投射模，n-凝聚环

Gorenstein(n, d)-Projective Modules

Lili Liu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jan. 5th, 2023; accepted: Feb. 6th, 2023; published: Feb. 14th, 2023

Abstract

Let R and S be rings, In this paper, Gorenstein(n, d)-projective modules and some of their basic properties are studied. Moreover, let $f : R \to S$ be asurjectivering homomorphism, an equivalent characterization of Gorenstein(n, d)-projective modules is given.

Keywords

Gorenstein(n, d)-Projective Module, n-Coherent Ring

文章引用: 刘立丽. Gorenstein(n, d)-投射模[J]. 理论数学, 2023, 13(2): 166-171.
DOI: 10.12677/pm.2023.132019

1. 引言

投射模是同调代数理论研究中非常重要的一种古典模类，上世纪九十年代，Enochs 等[1]在任意结合环上引入 Gorenstein 投射模的概念，这是 Auslander 等引入的 G-维数为 0 模的推广，也是经典同调代数中投射模在相对同调代数中的对应。此后，Gorenstein 投射模受到了国内外学者的广泛关注。文献[2]中给出了(n, d)-投射模的定义，在此基础上我们对(n, d)-投射模进行了推广，给出了 Gorenstein(n, d)-投射模的定义，并且对 Gorenstein(n, d)-投射模进行了一般研究。

2. 预备知识

文中 R 和 S 均是有单位元的结合环，模均指酉模。我们用 R-模(S-模)表示左 R-模(左 S-模)，R^{OP}-模(S^{OP}-模)表示右 R-模(右 S-模)。设 n，d 都是非负整数。$id_R(N)$ 表示 R^{OP}-模 N 的内射维数。

定义 1.1 R^{OP}-模 U 称为 n-表现模[3]，如果存在 R^{OP}-模的正合列

$$F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to U \to 0,$$

其中每个 F_i 都是有限生成自由模 $(i = 0,1,2,\cdots,m)$。

R 是右 n-凝聚环[3]，如果对任意 n-表现 R^{OP}-模是$(n + 1)$-表现的。

R^{OP}-模 N 称为(n, d)-内射模[3]，如果对任意 n-表现 R^{OP}-模 U，$\mathrm{Ext}_R^{d+1}(U,N) = 0$。

R^{OP}-模 M 称为(n, d)-投射模[2]，如果对任意(n, d)-内射 R^{OP}-模 N，$\mathrm{Ext}_R^1(M,N) = 0$。

注 1.2 [4]设 R 是环，m 和 n 是整数，则以下成立：

1) 当 $m \ge n$ 时，任意 m-表现 R^{OP}-模是 n-表现的。
2) 当 $m \ge n$ 时，任意(n, d)-内射 R^{OP}-模是(m, d)-内射的。
3) 当 $m \ge n$ 时，任意(m, d)-投射 R^{OP}-模是(n, d)-投射的。

3. Gorenstein(n, d)-投射模

定义 2.1 称 R^{OP}-模 G 是 Gorenstein(n, d)-投射模，如果存在(n, d)-投射 R^{OP}-模的正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $G \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$，并且对任意内射维数有限的$(n, d)$-内射 R^{OP}-模 N，$\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},N)$ 正合。

定理 2.2 设 R 是环，G 是 R^{OP}-模。若 R 是一个右 n-凝聚环，则 G 是 Gorenstein(n, d)-投射模当且仅当存在(n, d)-投射 R^{OP}-模的正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

使得 $G \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$。

证明 必要性由定义显然成立。

设(n, d)-内射 R^{OP}-模 N，且 $id_R(N) = m < \infty$，下证 G 是 Gorenstein(n, d)-投射模。

考虑短正合列 $0 \to N \to E \to K \to 0$，其中 E 是内射模。对 m 进行归纳，当 $m = 0$，显然 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},N)$ 正合。$id_R(N) = m$ 时，因为内射模是(n, d)-内射的，由文献[2]中引理 3.4 知(n, d)-内射模关于单同态的余核封闭，所以 K 是(n, d)-内射 R^{OP}-模。并且对任意 $i \ge 0$，P_i 和 P^i 都是(n, d)-投射 R^{OP}-模。故 $\mathrm{Ext}_R^1(P_i,K) = \mathrm{Ext}_R^1(P^i,K) = 0$。得下面正合复形

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_1,K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_1,E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_1,N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0,K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0,E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P_0,N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^0,K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^0,E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^0,N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^1,K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^1,E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(P^1,N) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},E) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},N) & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$id_R(K)=m-1$，由归纳假定知 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},K)$ 正合。再由复形的长正合列定理，即 $\mathrm{Hom}_R(\boldsymbol{P},N)$ 正合，得证。

推论 2.3 设 R 是一个右 n-凝聚环，G 是 R^{OP}-模。则以下等价：

(1) G 是 Gorenstein(n, d)-投射模。

(2) 存在(n, d)-投射 R^{OP}-模正合列 $0\to G\to P^0\to P^1\to\cdots$。

(3) 存在 R^{OP}-模短正合列 $0\to G\to M\to L\to 0$，其中 M 是(n, d)-投射模，L 是 Gorenstein(n, d)-投射模。

证明 $(1)\Rightarrow(2)$，$(1)\Rightarrow(3)$显然。

$(2)\Rightarrow(1)$对任意 R^{OP}-模 G，存在正合序列 $\cdots\to P_1\to P_0\to G\to 0$，其中 $P_i(i\geq 0)$ 是投射模。因为投射模是(n, d)-投射的，连接这两个序列得到(n,d)-投射 R^{OP}-模正合序列 $\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$，使得 $G\cong\mathrm{Ker}(P^0\to P^1)$。由定理 2.2 可得 G 是 Gorenstein(n, d)-投射模。

$(3)\Rightarrow(2)$ 设 R^{OP}-模短正合列 $0\to G\to M\to L\to 0$，其中 M 是(n, d)-投射模，L 是 Gorenstein(n, d)-投射模，由$(1)\Rightarrow(2)$，存在正合序列 $0\to L\to P^{0'}\to P^{1'}\to P^{2'}\to\cdots$，其中 $P^{i'}(i\geq 0)$ 是(n, d)-投射模，连接两序列得到正合序列 $0\to G\to M\to P^{0'}\to P^{1'}\to P^{2'}\to\cdots$，即为所求。

命题 2.4 设 R 是一个右 n-凝聚环，G 是 R^{OP}-模。若 R 是(n, d)环且 G 是 Gorenstein(n, d)-投射模，则对任意整数 $i\geq 1$ 和任意内射维数有限的(n, d)-内射 R^{OP}-模 N，$\mathrm{Ext}^i(G,N)=0$。

证明设 G 是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模，则存在 G 的(n, d)-投射分解

$$\boldsymbol{P}=\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots,$$

将此序列打断

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\boldsymbol{P} = & \cdots \arrow[rr] & & P_1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & P^0 \arrow[r] & P^1 \arrow[r] & \cdots \\
 & & K_1 \arrow[ur] & & K_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

对任意(n, d)-内射 R^{OP}-模 N，且 $\mathrm{id}_R(N)<\infty$，以函子 $\mathrm{Hom}(-,N)$ 作用短正合列仍正合，并且 G，$K_i(i\geq 0)$ 都是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模，所以 $\mathrm{Ext}^1(G,N)=\mathrm{Ext}^1(K_i,N)=0$。在短正合列 $0\to K_0\to P_0\to G\to 0$ 中，由长正合序列引理得 $\cdots\to\mathrm{Ext}^1(K_0,N)\to\mathrm{Ext}^2(G,N)\to\mathrm{Ext}^2(P_0,N)\to\cdots$，又 R 是(n, d)环，由文献[2]中定理 4.4 知(n, d)投射模是投射的，得 $\mathrm{Ext}^2(G,N)=0$。在短正合列 $0\to K_1\to P_1\to K_0\to 0$ 中，由长正合序列引理得 $\cdots\to\mathrm{Ext}^1(K_1,N)\to\mathrm{Ext}^2(K_0,N)\to\mathrm{Ext}^2(P_1,N)\to\cdots$，得 $\mathrm{Ext}^2(K_0,N)=0$。由序列 $\cdots\to\mathrm{Ext}^2(K_0,N)\to\mathrm{Ext}^3(G,N)\to\mathrm{Ext}^3(P_0,N)\to\cdots$，得 $\mathrm{Ext}^3(G,N)=0$。依此类推，对任意整数 $i\geq 1$，故 $\mathrm{Ext}^i(G,N)=0$。

我们用 $\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(G)$ 表示 R^{OP}-模 G 的 Gorenstein(n, d)-投射维数，$\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(G)\leq m$ 当且仅当 G 有长度为 m 的 Gorenstein(n, d)-投射分解。

命题 2.5 设 R 是一个右 n-凝聚环，存在 R^{OP}-模短正合列 $0\to K\to B\to G\to 0$，若 B 是(n, d)投射模，则 $\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(G)\leq \mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(K)+1$。特别地，若 G 是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模，则 K 也是。

证明 设 $\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(K)=m<\infty$，则 K 存在长度为 m 的 Gorenstein(n, d)-投射分解 $0\to B_m\to B_{m-1}\to\cdots\to B_0\to K\to 0$。连接此序列和短正合列 $0\to K\to B\to G\to 0$，得 G 的 Gorenstein(n, d)-投射分解 $0\to B_m\to B_{m-1}\to\cdots\to B_0\to B\to G\to 0$，故 $\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(G)\leq m+1=\mathrm{G}_n^d\text{-pd}_R(K)+1$。

特殊情况由推论 1 可得。

命题 2.6 设 R 是一个右 n-凝聚环，$0\to A\to G\to H\to 0$ 是 R^{OP}-模短正合列。若 A 是 Gorenstein(n, d)-投射模，H 是(n, d)投射模，则 G 是 Gorenstein(n, d)-投射的。

证明 若 A 是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模，则存在 R^{OP}-模正合列 $0\to A\to M\to L\to 0$，其中，M 是(n, d)投射模，L 是 Gorenstein(n, d)-投射的。

考虑下面的推出图

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] & 0 \\
 & L \arrow[r, equal] \arrow[d] & L \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

在行正合列 $0\to M\to D\to H\to 0$ 中，因为(n, d)投射模关于扩张封闭，所以 D 是(n, d)投射模。在列正合列 $0\to G\to D\to L\to 0$ 中，D 是(n, d)投射模，L 是 Gorenstein(n, d)-投射模，由推论 2.3，G 是 Gorenstein(n, d)-投射的。

命题 2.7 设 R 是环，m 和 n 是整数。则以下成立：

1) 当 $m\geq n$ 时，任意 Gorenstein(m, d)-投射 R^{OP}-模是 Gorenstein(n, d)-投射的。

2) 若 R 是一个右 n-凝聚环，当 $m\geq n$ 时，任意 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模是 Gorenstein(m, d)-投射的。

证明 1) 设 G 是 Gorenstein(m, d)-投射 R^{OP}-模。当 $m\geq n$ 时，任意(m, d)-投射 R^{OP}-模是(n, d)-投射的。

则存在(n, d)-投射 R^{OP}-模正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

又因为任意(n, d)-内射 R^{OP}-模是(m, d)-内射的，对任意内射维数有限的(n, d)-投射 R^{OP}-模 N，$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{P}, N)$ 正合，故 G 是 Gorenstein(n, d)-投射的。

2) 设 G 是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模，R 是一个右 n-凝聚环。当 $m \ge n$ 时，n 表现 R^{OP}-模是 m 表现的，故(m, d)-内射 R^{OP}-模是(n, d)-内射的且(n, d)-投射 R^{OP}-模是(m, d)-投射的。则存在(m, d)-投射 R^{OP}-模正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

对任意内射维数有限的(m, d)-投射 R^{OP}-模 N，$\mathrm{Hom}(\boldsymbol{P}, N)$ 正合，故 G 是 Gorenstein(m, d)-投射的。

引理 2.8 设 $f: R \to S$ 是一个环的满同态，S_R 是投射 R^{OP}-模且 $_RS$ 是投射 R-模。若 M 是(n, d)-投射 S^{OP}-模，则 $M \otimes_S S$ 是一个(n, d)-投射 R^{OP}-模。

证明 设 N 是(n, d)-内射 R^{OP}-模，由文献[4]中引理 4.1 可得 $\mathrm{Hom}_R(S, N)$ 是一个(n, d)-内射 S^{OP}-模。M 是(n, d)-投射 S^{OP}-模，由文献[5]中推论 10.65，则有同构

$$\mathrm{Ext}_R^1(M \otimes_S S, N) \cong \mathrm{Ext}_S^1(M, \mathrm{Hom}_R(S, N)) = 0,$$

得 $\mathrm{Ext}_R^1(M \otimes_S S, N) = 0$，故 $M \otimes_S S$ 是一个(n, d)-投射 R^{OP}-模。

引理 2.9 设 $f: R \to S$ 是一个环的满同态，S_R 是投射 R^{OP}-模且 $_RS$ 是投射 R-模。若 M 是(n, d)-投射 R^{OP}-模，则 $M \otimes_R S$ 是一个(n, d)-投射 S^{OP}-模。

证明 设 N 是(n, d)-内射 S^{OP}-模，则 N 是(n, d)-内射 R^{OP}-模。由文献[5]中推论 10.65，则有同构

$$\mathrm{Ext}_S^1(M \otimes_R S, N) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, \mathrm{Hom}_S(S, N)) \cong \mathrm{Ext}_R^1(M, N) = 0,$$

得 $\mathrm{Ext}_S^1(M \otimes_R S, N) = 0$，故 $M \otimes_R S$ 是一个(n, d)-投射 S^{OP}-模。

命题 2.10 设 $f: R \to S$ 是一个环的满同态，S_R 是投射 R^{OP}-模且 $_RS$ 是投射 R-模。若 N 是一个 R^{OP}-模且 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$，则 $\mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_R(S, N)) < \infty$。

证明 设任意 S^{OP}-模 M，由文献[5]中推论 10.65 得同构式

$$\mathrm{Ext}_S^n(M, \mathrm{Hom}_R(S, N)) \cong \mathrm{Ext}_R^n(M \otimes_S S, N).$$

若 $\mathrm{id}_R(N) = 0$，N 是一个内射 R^{OP}-模，$n \ge 1$ 时，上式右边等于零，故 $\mathrm{Ext}_S^{n\ge1}(M, \mathrm{Hom}_R(S, N)) = 0$，得 $\mathrm{Hom}_R(S, N)$ 是一个内射 S^{OP}-模，即 $\mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_R(S, N)) = 0$。

若 $\mathrm{id}_R(N) = m < \infty$，由上面同构式 $\mathrm{Ext}_S^{m+1}(M, \mathrm{Hom}_R(S, N)) \cong \mathrm{Ext}_R^{m+1}(M \otimes_S S, N) = 0$，得 $\mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_R(S, N)) = m$。

综上，$\mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_R(S, N)) < \infty$。

定理 2.11 设 $f: R \to S$ 是一个环的满同态，S_R 是投射 R^{OP}-模且 $_RS$ 是投射 R-模，M 是一个 S^{OP}-模。则以下价：

(1) M_R 是 Gorenstein(n, d)-投射 R^{OP}-模。

(2) $M \otimes_R S$ 是 Gorenstein(n, d)-投射 S^{OP}-模。

(3) M_S 是 Gorenstein(n, d)-投射 S^{OP}-模。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)设 N 是(n, d)-内射 S^{OP}-模且 $\mathrm{id}_S(N) < \infty$，由文献[6]中引理 3.12 知 N 是(n, d)-内射 R^{OP}-模且 $\mathrm{id}_R(N) < \infty$。再由文献[4]中引理 4.1 得 $\mathrm{Hom}_R(S, N)$ 是(n, d)-内射 S^{OP}-模，故 $\mathrm{Hom}_R(S, N)$ 也是(n, d)-内射 R^{OP}-模。由命题 2.10 得 $\mathrm{id}_S(\mathrm{Hom}_R(S, N)) < \infty$，同时 $\mathrm{id}_R(\mathrm{Hom}_R(S, N)) < \infty$。由(1) M_R 是 Gorenstein(n, d)-

投射 R^{OP}-模，存在(*n*, *d*)-投射 R^{OP}-模的正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

其中， $M_R \cong \operatorname{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$。即存在(*n*, *d*)-投射 S^{OP}-模的正合列

$$\boldsymbol{P} \otimes_R S = \cdots \to P_1 \otimes_R S \to P_0 \otimes_R S \to P^0 \otimes_R S \to P^1 \otimes_R S \to \cdots,$$

其中， $M \otimes_R S \cong \operatorname{Ker}\left(P^0 \otimes_R S \to P^1 \otimes_R S\right)$。由伴随同构

$$\operatorname{Hom}_R\left(\boldsymbol{P}, \operatorname{Hom}_S(S, N)\right) \cong \operatorname{Hom}_S\left(\boldsymbol{P} \otimes_R S, N\right).$$

对任意内射维数有限的(*n*, *d*)-内射 R^{OP}-模 $\operatorname{Hom}_R(S, N)$，因为 *f* 满，由文献[5]命题 8.33，所以 $\operatorname{Hom}_R(S, N) = \operatorname{Hom}_S(S, N)$。由条件(1)， $\operatorname{Hom}_R\left(\boldsymbol{P}, \operatorname{Hom}_S(S, N)\right)$ 正合，故对任意(*n*, *d*)-内射 S^{OP}-模 N 且 $\operatorname{id}_S(N) < \infty$， $\operatorname{Hom}_S\left(\boldsymbol{P} \otimes_R S, N\right)$ 正合，得 $M \otimes_R S$ 是 Gorenstein(*n*, *d*)-投射 S^{OP}-模。

(2) $\Rightarrow$ (3)由 $M \otimes_R S = M_S$， 故 M_S 是 Gorenstein(*n*, *d*)-投射 S^{OP}-模。

(3) $\Rightarrow$ (1)设 P 是(*n*, *d*)-投射 S^{OP}-模，则 P 是(*n*, *d*)-投射 R^{OP}-模。 M_S 是 Gorenstein(*n*, *d*)-投射 S^{OP}-模，则存在(*n*, *d*)-投射 R^{OP}-模的正合列

$$\boldsymbol{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P^0 \to P^1 \to \cdots,$$

其中， $M_R \cong \operatorname{Ker}\left(P^0 \to P^1\right)$。设 N 是(*n*, *d*)-内射 R^{OP}-模且 $\operatorname{id}_R(N) < \infty$。由文献[4]引理 4.1 和命题 2.10 得 $\operatorname{Hom}_R(S, N)$ 是一个(*n*, *d*)-内射 S^{OP}-模且 $\operatorname{id}_S\left(\operatorname{Hom}_R(S, N)\right) < \infty$。由同构

$$\operatorname{Hom}_S\left(P, \operatorname{Hom}_R(S, N)\right) \cong \operatorname{Hom}_R\left(P \otimes_S S, N\right) \cong \operatorname{Hom}_R(P, N),$$

由条件(3)，对任意内射维数有限的(*n*, *d*)-内射 S^{OP}-模 $\operatorname{Hom}_R(S, N)$， $\operatorname{Hom}_S\left(P, \operatorname{Hom}_R(S, N)\right)$ 正合，故对任意(*n*, *d*)-内射 R^{OP}-模 N 且 $\operatorname{id}_R(N) < \infty$， $\operatorname{Hom}_R(P, N)$ 正合，得 M_R 是 Gorenstein(*n*, *d*)-投射 R^{OP}-模。

参考文献

[1] Enochs, E.E. and Jenda, O. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[2] Mao, L.-X. and Ding, N.-Q. (2006) Relative Projective Modules and Relative Injective Modules. *Communications in Algebra*, **34**, 2403-2418. https://doi.org/10.1080/00927870600649111

[3] Zhou, D.-X. (2004) On n-Coherent Rings and (*n*, *d*)-Rings. *Communications in Algebra*, **32**, 2425-2441. https://doi.org/10.1081/AGB-120037230

[4] Amini, M. (2019) On the Gorenstein(*n*, *d*)-Flatand Gorensetein(*n*, *d*)-Injective Modules. arXiv.1907.12599.

[5] Rotman, J.J. (2009) An Introduction to Homological Algebra. 2nd Edition, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/b98977

[6] Duan, L.-L. and Li, W.-Q. (2014) Relative Projective Dimensions. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Society*, **3**.