Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 516-525
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133055

Hans汉斯

含有调和数平方的无穷级数恒等式

王晓元，刘筱蒙

大连交通大学理学院，辽宁 大连

收稿日期：2023年2月15日；录用日期：2023年3月14日；发布日期：2023年3月22日

摘 要

本文研究两类含有以下广义调和数

$$h_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ak-a+b},\quad \bar{h}_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{ak-a+b}$$

平方的组合恒等式。首先通过组合分析中的Abel分部求和引理获得含有两个差分对$\{A_k,B_k\}$和$\{A_k',B_k'\}$的无穷级数求和公式，即定理2。然后选取恰当的序列$\{A_k,A_k'\}$和$\{B_k,B_k'\}$，利用定理2，证明含有广义调和数$h_k^2(a,b)$和$\bar{h}_k^2(a,b)$的无穷级数恒等式。最后对参数a和b取特殊值，进一步获得一些新的π，Catalan常数和ln2的无穷级数求和公式。

关键词

广义调和数，调和数，调和类数，Abel分部求和引理

Infinite Series Identities Involving Quadratic Harmonic Numbers

Xiaoyuan Wang, Xiaomeng Liu

School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Feb. 15th, 2023; accepted: Mar. 14th, 2023; published: Mar. 22nd, 2023

Abstract

In this paper, we study two combinatorial identities including the following quadratic generalized harmonic numbers

$$h_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ak-a+b},\quad \bar{h}_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{ak-a+b}.$$

文章引用：王晓元，刘筱蒙. 含有调和数平方的无穷级数恒等式[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 516-525.
DOI: 10.12677/pm.2023.133055

First, the modified Abel lemma on summation by parts in combination analysis is employed to obtain summation formulae of infinite series involving two difference pairs $\{A_k, B_k\}$ and $\{A'_k, B'_k\}$, that is Theorem 2. Then applying Theorem 2 through appropriate sequences $\{A_k, A'_k\}$ and $\{B_k, B'_k\}$, we establish infinite series identities involving generalized harmonic numbers $h_k^2(a,b)$ and $\bar{h}_k^2(a,b)$. Finally, by selecting special values for parameters *a* and *b*, several new infinite series are obtained for π, Catalan constant and ln2 as consequences.

Keywords

Generalized Harmonic Numbers, Harmonic Numbers, Harmonic-Like Numbers, Abel's Lemma on Summation by Parts

1. 引言

文本主要对含有广义调和数平方的无穷级数恒等式进行探讨。经典的调和数定义为

$$H_0 = 0, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

调和数的研究可以追溯到中世纪后期，它出现在各种特殊函数的表达式中，在分析、数论、组合和计算机科学等领域中都有重要应用。含有调和数无穷级数的计算公式最早起源于 Euler 的工作，他发现了若干与 Riemann Zeta 函数有关的重要恒等式，为调和数的研究做出了巨大贡献。

近些年，涉及调和数和广义调和数的无穷级数求和公式的研究备受关注。在[1]中，Paule 和 Schneider 采用 Newton-Andrews 方法，并将该方法和 Zeilberger 算法应用于超几何级数求和公式中获得了由 Ahlgren 提出猜想的 5 个调和数求和公式。在[2]中，Chu 和 Fu 发现了超几何级数与调和数恒等式的内在联系，并通过对终止型超几何级数求和公式进行求导运算，得到了一系列结构漂亮的调和数恒等式。王伟平和贾藏芝[3]在 2014 年利用 Bell 多项式给出二项式系数及其倒数的表达式，并拓广 Newton-Andrews 方法的应用领域，探讨了含有调和数的组合求和公式。随后，魏传安[4] [5]运用导数算子方法研究了一些含有调和数及广义调和数的级数恒等式。刘红梅和王伟平[6]通过对著名的高斯求和定理进行高阶求导运算，推导出一些含有无理数 π、Euler 常数 γ、Catalan 常数及 Apéry 常数 $\zeta(3)$ 的调和数求和公式，并在[7]中以两个高斯超几何求和公式为基础，建立一系列关于中心二项式系数和广义调和数的无穷级数恒等式。在[8]中，Kargin 等从调和数和伯努利数之间的联系出发，提出了广义超调和数和伯努利多项式之间的关系，并利用这种关系获得大量的求和公式及同余恒等式。在[9]中，王瑞和乌云高娃利用生成函数的方法研究了广义调和数与 Changhee 序列、Daehee 序列、退化 Changhee-Genoocchi 序列、两类退化 Stirling 数的一些新恒等式，同时使用 Riordan 阵列，探索了这些多项式、Apostol Bernoulli 序列、Apostol Euler 序列和 Apostol Genocchi 序列之间的有趣关系。

2006 年，Chu [10]开创了计算 q-级数和椭圆超几何级数的 Abel 分部求和法，对该领域的研究赋予新的生命力。2012 年，Chu [11]再次扩大该方法的研究领域，证明若干含有调和数及其变换形式的求和公式，例如：

$$\sum_{k\geq 1}\frac{H_k}{k(k+1)}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{k\geq 1}\frac{O_k}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{\pi^2}{15};$$

$$\sum_{k\geq 1}\frac{\bar{H}_k}{k(k+1)}=-\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{k\geq 1}\frac{\bar{O}_k}{(2k+1)(2k-1)}=-\frac{G}{2},$$

其中，G 表示 Catalan 常数，即

$$G=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(2k+1)^2=0.9159\cdots.$$

在[12]中，王晓元同样利用 Abel 分部求和法研究了含有广义调和数的无穷级数恒等式，比如：

$$\sum_{k\geq 1}\frac{H_k^{\langle 2\rangle}}{k(k+1)}=\zeta(3),\quad \sum_{k\geq 1}\frac{O_k^{\langle 2\rangle}}{(2k+1)(2k-1)}=\frac{7}{16}\zeta(3).$$

由于 Abel 分部求和法是检验无穷级数收敛的基本方法，利用该方法去研究调和数相关求和公式的工作引起数学工作者的关注，获得成果可以参见[13] [14] [15] [16]。

本文主要对含有两个正实数 a 和 b 的广义调和数

$$h_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ak-a+b} \text{ 和 } \bar{h}_n(a,b)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{ak-a+b}$$

进行展开研究，获得含有 $h_k^2(a,b)$ 和 $\bar{h}_k^2(a,b)$ 的组合恒等式。首先通过组合分析中的 Abel 分部求和引理获得含有两个差分对的无穷级数求和公式，即主要定理 2。然后选取恰当的序列对，利用定理 2 证明含有广义调和数 $h_k^2(a,b)$ 的无穷级数恒等式，再取参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$ 两种情况，获得对应的四个著名的经典调和类型数

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad O_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1},\quad \bar{H}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k},\quad \bar{O}_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}$$

平方的无穷级数恒等式，并建立 π，Catalan 常数和 ln2 的无穷级数求和公式。接下来，采用同样的讨论方法研究含有广义调和数 $\bar{h}_k^2(a,b)$ 的无穷级数恒等式。最后对本文的结论进行总结。

2. Abel 分部求和法

设 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 是两个序列，$A_{n,m}=\sum_{k=m}^{n}a_k$，则[17]中定理 6.30 给出如下 Abel 求和公式：

$$\sum_{k=m}^{n}a_kb_k=A_{n,m}b_n-\sum_{k=m}^{n-1}A_{k,m}(b_{k+1}-b_k),$$

该公式经常被用来解决一些数列的收敛性问题。在[11]中，Chu 利用修改后的 Abel 求和公式推导出含有调和数的无穷级数恒等式。本文中我们将继续利用[11]中的 Abel 分部求和引理对广义调和数进行研究。

对于任意的复数序列 $\{\tau_k\}$，分别定义向前和向后差分算子 Δ 和 ∇ 为

$$\Delta\tau_k=\tau_k-\tau_{k+1} \text{ 和 } \nabla\tau_k=\tau_k-\tau_{k-1},$$

需要指出的是，这里的 Δ 与通常的向前差分算子仅相差一个负号，则有如下公式成立。

引理 1 (Abel 分部求和引理)

$$\sum_{k\geq 1}B_k\nabla A_k=[AB]_+-A_0B_1+\sum_{k\geq 1}A_k\Delta B_k,$$

其中极限$\left[AB\right]_+ = \lim_{n\to\infty} A_n B_{n+1}$存在，且公式中的非终止型级数是收敛的(证明过程参见[11])。

如果存在另外的差分对$\{A'_k, B'_k\}$，满足

$$\sum_{k\ge1} A_k \Delta B_k = \sum_{k\ge1} B'_k \nabla A'_k ,$$

利用引理 1 得到

$$\sum_{k\ge1} A_k \Delta B_k = \left[A'B'\right]_+ - A'_0 B'_1 + \sum_{k\ge1} A'_k \nabla B'_k ,$$

将其代入到引理 1 中，可以获得如下重要变换公式。

定理 2 对于给定的两个差分对$\{A_k, B_k\}$和$\{A'_k, B'_k\}$，如果

$$\sum_{k\ge1} A_k \Delta B_k = \sum_{k\ge1} B'_k \nabla A'_k ,$$

那么有无穷级数公式成立：

$$\sum_{k\ge1} B_k \nabla A_k = \left[AB\right]_+ + \left[A'B'\right]_+ - A_0 B_1 - A'_0 B'_1 + \sum_{k\ge1} A'_k \Delta B'_k ,$$

上式成立的条件是两个极限$\left[AB\right]_+$和$\left[A'B'\right]_+$都存在，且其中一个非终止型级数是收敛的。

在本文中，首先选取序列$\{B_k, B'_k\}$为

$$B_k = h_k^2(a,b) \text{ 和 } B'_k = h_k(a,b) + h_{k+1}(a,b),$$

其向前差分算子

$$\Delta B_k = \frac{-1}{ak+b}\left\{h_k(a,b) + h_{k+1}(a,b)\right\};$$

$$\Delta B'_k = -\frac{1}{ak+b} - \frac{1}{ak+a+b}.$$

再选取序列$\{B_k, B'_k\}$为

$$B_k = \bar{h}_k^2(a,b) \text{ 和 } B'_k = \bar{h}_k(a,b) + \bar{h}_{k+1}(a,b),$$

其向前差分算子

$$\Delta B_k = \frac{(-1)^k}{ak+b}\left\{\bar{h}_k(a,b) + \bar{h}_{k+1}(a,b)\right\};$$

$$\Delta B'_k = \frac{(-1)^k}{ak+b} - \frac{(-1)^k}{ak+a+b}.$$

下面将利用定理 2 推导含有$h_k^2(a,b)$和$\bar{h}_k^2(a,b)$的求和公式，获得的相关结果均已用数学软件 Mathematica 程序进行验证，以确保其正确性。

3. 含有$h_k^2(a,b)$的无穷级数恒等式

给定两个序列$\{A_k, A'_k\}$为

$$A_k = \frac{-2a(ak+b)}{(2ak-a+2b)(2ak+a+2b)};$$

$$A'_k = \frac{-1}{2ak+a+2b},$$

不难计算其向后差分

$$\nabla A_k = \frac{2a^2}{(2ak-3a+2b)(2ak+a+2b)};$$

$$\nabla A'_k = \frac{2a}{(2ak-a+2b)(2ak+a+2b)},$$

和极限关系

$$[AB]_+ = 0，\ A_0 B_1 = \frac{2a}{b(a^2-4b^2)};$$

$$[A'B']_+ = 0，\ A'_0 B'_1 = \frac{-2a-3b}{b(a+b)(a+2b)},$$

根据定理 2 可得求和公式。

定理 3

$$\sum_{k\ge1} \frac{a^2 h_k^2(a,b)}{(2ak-3a+2b)(2ak+a+2b)} = \frac{1}{a(2b-a)}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 4

$$\sum_{k\ge1} \frac{H_k^2}{(2k-1)(2k+3)} = 1，\ \sum_{k\ge2} \frac{O_k^2}{k^2-1} = \frac{9}{4}.$$

给定两个序列 $\{A_k, A'_k\}$

$$A_k = \frac{-a(ak+b)}{(ak+2a+b)(ak+a+b)};$$

$$A'_k = \frac{-1}{ak+2a+b},$$

其向后差分为

$$\nabla A_k = \frac{a^2(ak-2a+b)}{(ak+b)(ak+a+b)(ak+2a+b)};$$

$$\nabla A'_k = \frac{a}{(ak+2a+b)(ak+a+b)},$$

计算极限关系，通过定理 2 可得求和公式。

定理 5

$$\sum_{k\ge1} \frac{a^2(ak-2a+b)h_k^2(a,b)}{(ak+b)(ak+a+b)(ak+2a+b)} = \frac{3a+4b}{2ab(a+b)}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 6

$$\sum_{k\ge1} \frac{(k-1)H_k^2}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{7}{4},$$

$$\sum_{k\ge1}\frac{(2k-3)O_k^2}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}=\frac{5}{24}.$$

给定两个序列 $\{A_k, A_k'\}$

$$A_k=\frac{-2a}{ak-2a+b};$$

$$A_k'=\frac{-1}{ak+b}+\frac{-1}{ak-a+b},$$

容易计算其向后差分为

$$\nabla A_k=\frac{2a^2}{(ak-2a+b)(ak-3a+b)};$$

$$\nabla A_k'=\frac{2a}{(ak+b)(ak-2a+b)},$$

将上式和极限关系代入定理 2 可得求和公式。

定理 7

$$\sum_{k\ge1}\frac{a^2h_k^2(a,b)}{(ak-2a+b)(ak-3a+b)}=\frac{-11a+6b}{4a(a-b)(2a-b)}+\frac{1}{2}\sum_{k\ge0}\frac{1}{(ak+b)^2}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2, b=1$，可以推出含有调和数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 8

$$\sum_{k\ge3}\frac{H_k^2}{(k-1)(k-2)}=\frac{19}{4}+\frac{\pi^2}{12},$$

$$\sum_{k\ge1}\frac{O_k^2}{(2k-3)(2k-5)}=-\frac{1}{6}+\frac{\pi^2}{64}.$$

给定两个序列 $\{A_k, A_k'\}$

$$A_k=\frac{2(-1)^{k+1}}{ak+2a+b};$$

$$A_k'=\frac{(-1)^k}{(ak+a+b)(ak+2a+b)},$$

其向后差分为

$$\nabla A_k=\frac{2(-1)^{k+1}(2ak+3a+2b)}{(ak+a+b)(ak+2a+b)};$$

$$\nabla A_k'=\frac{2(-1)^k}{(ak+b)(ak+2a+b)},$$

计算极限关系，通过定理 2 可得求和公式。

定理 9

$$\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k(2ak+3a+2b)h_k^2(a,b)}{(ak+a+b)(ak+2a+b)}=\frac{-2a^2+ab+4b^2}{4a^2b^2(a+b)}-\frac{1}{2a}\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k}{(ak+b)^2}+\frac{2}{a^2}\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k}{ak+b}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 10

$$\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k(2k+5)H_k^2}{(k+2)(k+3)}=-\frac{9}{8}-\frac{\pi^2}{24}+2\ln2;$$

$$\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k(k+2)O_k^2}{(2k+3)(2k+5)}=-\frac{7}{96}-\frac{1}{16}G+\frac{\pi}{32}.$$

4. 含有 $\overline{h}_k^2(a,b)$ 的无穷级数恒等式

给定两个序列 $\{A_k,A_k'\}$

$$A_k=\frac{2ak-a+2b}{ak-a+b};$$

$$A_k'=\frac{(-1)^k}{ak+b},$$

其向后差分

$$\nabla A_k=\frac{-a^2}{(ak-2a+b)(ak-a+b)};$$

$$\nabla A_k'=\frac{(-1)^k(2ak-a+2b)}{(ak-a+b)(ak+b)},$$

利用极限关系和定理 2 得到以下求和公式。

定理 11

$$\sum_{k\ge1}\frac{a^2\overline{h}_k^2(a,b)}{(ak-a+b)(ak-2a+b)}=-\frac{1}{a(a-b)}-2\left\{\sum_{k\ge0}\frac{(-1)^k}{ak+b}\right\}^2-\sum_{k\ge0}\frac{1}{(ak+b)^2}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和类数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 12

$$\sum_{k\ge2}\frac{\overline{H}_k^2}{k(k-1)}=3-2(\ln2)^2-\frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k\ge1}\frac{\overline{O}_k^2}{(2k-1)(2k-3)}=-\frac{1}{8}-\frac{\pi^2}{16}.$$

给定两个序列 $\{A_k,A_k'\}$

$$A_k=\frac{2ak+a+2b}{ak+a+b};$$

$$A_k'=\frac{(-1)^k}{ak+a+b},$$

不难获得其向后差分

$$\nabla A_k=\frac{a^2}{(ak+b)(ak+a+b)};$$

$$\nabla A_k' = \frac{(-1)^k (2ak+a+2b)}{(ak+b)(ak+a+b)},$$

将上式和极限关系代入定理 2 可得求和公式。

定理 13

$$\sum_{k\ge1} \frac{a^2 \bar{h}_k^2(a,b)}{(ak+b)(ak+a+b)} = \frac{b-a}{ab^2} + 2\left\{\sum_{k\ge0} \frac{(-1)^k}{ak+b}\right\}^2 - \sum_{k\ge1} \frac{1}{(ak+b)^2}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和类数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 14

$$\sum_{k\ge1} \frac{\bar{H}_k^2}{(k+1)(k+2)} = 1 + 2(\ln 2)^2 - \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{k\ge1} \frac{\bar{O}_k^2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{8}.$$

给定两个序列 $\{A_k, A_k'\}$

$$A_k = \frac{(2ak-3a+2b)(ak+b)}{(ak-a+b)(ak-2a+b)};$$

$$A_k' = \frac{(-1)^k}{ak-a+b},$$

计算其向后差分

$$\nabla A_k = \frac{-a^2(3ak-5a+3b)}{(ak-a+b)(ak-2a+b)(ak-3a+b)};$$

$$\nabla A_k' = \frac{(-1)^k (2ak-3a+2b)}{(ak-a+b)(ak-2a+b)},$$

通过极限关系，再利用定理 2 得到以下求和公式。

定理 15

$$\sum_{k\ge1} \frac{a^2(3ak-5a+3b)\bar{h}_k^2(a,b)}{(ak-a+b)(ak-2a+b)(ak-3a+b)} = \frac{1}{2(a-b)(2a-b)} - 2\left\{\sum_{k\ge0} \frac{(-1)^k}{ak+b}\right\}^2.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2,b=1$，可以推出含有调和类数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 16

$$\sum_{k\ge3} \frac{(3k-2)\bar{H}_k^2}{k(k-1)(k-2)} = \frac{19}{8} - 2(\ln 2)^2,$$

$$\sum_{k\ge1} \frac{(6k-7)\bar{O}_k^2}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)} = \frac{1}{24} - \frac{\pi^2}{32}.$$

给定两个序列 $\{A_k, A_k'\}$

$$A_k = \frac{2a(-1)^{k+1}}{(ak-a+b)(ak-2a+b)};$$

$$A_k' = \frac{1}{(ak+b)(ak-a+b)},$$

计算其向后差分

$$\nabla A_k = \frac{4(-1)^{k+1} a}{(ak-a+b)(ak-3a+b)};$$

$$\nabla A_k' = \frac{-2a}{(ak+b)(ak-a+b)(ak-2a+b)},$$

利用极限关系和定理 2 得到以下求和公式。

定理 17

$$\sum_{k\ge1} \frac{(-1)^k a\bar{h}_k^2(a,b)}{(ak-a+b)(ak-3a+b)} = \frac{4a^2-6ab+b^2}{8ab^2(a-b)(2a-b)} + \frac{1}{4a}\sum_{k\ge1}\frac{(-1)^k}{(ak+b)^2}.$$

令参数 $a=b=1$ 和 $a=2, b=1$，可以推出含有调和类数平方及其变换形式平方的表达式。

推论 18

$$\sum_{k\ge3} \frac{(-1)^k \bar{H}_k^2}{k(k-2)} = -\frac{7}{16} + \frac{\pi^2}{48};$$

$$\sum_{k\ge1} \frac{(-1)^k \bar{O}_k^2}{(2k-1)(2k-5)} = -\frac{1}{96} + \frac{1}{16}G.$$

需要指出的是，只要选取恰当的序列 $\{A_k, A_k'\}$，利用主要定理 2 便可以获得一些新的含有广义调和数平方的无穷级数恒等式。

5. 结论

Abel 分部求和法是证明组合恒等式强有力的分析学工具，应用 Abel 分部求和法可以推导出大批新的含有调和数的无穷级数与交错级数。本文利用 Abel 分部求和法，通过选取两个恰当的序列 $\{A_k, A_k'\}$，利用主要定理 2 获得一些新的含有调和数平方以及调和类数平方的无穷级数恒等式，并同时建立一些新的关于 π，Catalan 常数和 ln2 的无穷级数求和公式。该研究不仅扩大了 Abel 方法的应用范围，对调和数的研究领域起到一定的推动作用，感兴趣的读者可以进一步尝试。

基金项目

辽宁省教育厅科学研究项目(项目编号 JDL2019028)。

参考文献

[1] Paule, P. and Schneider, C. (2003) Computer Proofs of a New Family of Harmonic Number Identities. *Advances in Applied Mathematics*, **31**, 359-378. https://doi.org/10.1016/S0196-8858(03)00016-2

[2] Chu, W.C. and Fu, A.M. (2009) Dougall-Dixon Formula and Harmonic Number Identities. *The Ramanujan Journal*, **18**, 11-31. https://doi.org/10.1007/s11139-007-9044-6

[3] Wang, W.P. and Jia, C.Z. (2014) Harmonic Number Identities via the Newton-Andrews Method. *The Ramanujan Journal*, **35**, 263-285. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9511-1

[4] Wei, C.A. and Gong, D.X. (2014) The Derivative Operator and Harmonic Number Identities. *The Ramanujan Journal*, **34**, 361-371. https://doi.org/10.1007/s11139-013-9510-2

[5] Wei, C.A., Yan, Q.L. and Gong, D.X. (2015) A Family of Summation Formulae Involving Harmonic Numbers.

Integral Transforms and Special Functions, **26**, 667-677. https://doi.org/10.1080/10652469.2015.1034124

[6] Liu, H.M. and Wang, W.P. (2019) Gauss's Theorem and Harmonic Number Summation Formulae with Certain Mathematical Constants. *Journal of Difference Equations and Applications*, **25**, 313-330. https://doi.org/10.1080/10236198.2019.1572127

[7] 刘红梅. 含有中心二项式系数以及广义调和数的无穷级数恒等式[J]. 数学物理学报, 2020, 40(3): 631-640.

[8] Kargin, L., Cenkci, M., Dil, A. and Can, M. (2022) Generalized Harmonic Number via Poly-Bernoulli Polynomials. *Publicationes Mathematicae-Debrecen*, **100**, 365-386.

[9] Wang, R. and Wuyungaowa (2022) Generalized Harmonic Numbers $H_{n,k,r}(\alpha,\beta)$ with Combinatorial Sequences. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **10**, 1602-1618. https://doi.org/10.4236/jamp.2022.105111

[10] Chu, W.C. (2006) Bailey's Very Well-Poised ${}_6\psi_6$-Series Identity. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series A*, **113**, 966-979. https://doi.org/10.1016/j.jcta.2005.08.009

[11] Chu, W.C. (2012) Infinite Series Identities on Harmonic Numbers. *Results in Mathematics*, **61**, 209-221. https://doi.org/10.1007/s00025-010-0089-2

[12] Wang, X.Y. (2018) Infinite Series Containing Generalized Harmonic Numbers. *Results in Mathematics*, **73**, Article No. 24. https://doi.org/10.1007/s00025-018-0774-0

[13] Wang, X.Y. and Chu, W.C. (2018) Infinite Series Identities Involving Quadratic and Cubic Harmonic Numbers. *Publicacions Matemàtiques*, **62**, 285-300. https://doi.org/10.5565/PUBLMAT6211813

[14] Wang, J. and Wei, C.A. (2018) Four Families of Summation Formulas Involving Generalized Harmonic Numbers. *The Ramanujan Journal*, **45**, 73-94. https://doi.org/10.1007/s11139-016-9871-4

[15] 王晓元, 贾利琴. 含有调和数的无穷级数恒等式[J]. 大连交通大学学报, 2018, 39(5): 118-120.

[16] Chen, K.-W. and Chen, Y.-H. (2020) Infinite Series Containing Generalized Harmonic Functions. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, **26**, 85-104. https://doi.org/10.7546/nntdm.2020.26.2.85-104

[17] Wade, W.R. (2014) Introduction to Analysis. 4th Edition, Pearson Education Limited, London.