Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(3), 526-532
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.133056

更高分数阶p-Laplacian方程的特征值问题

杨　飒，魏公明

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年2月16日；录用日期：2023年3月15日；发布日期：2023年3月23日

摘　要

特征值、特征向量一直都是谱理论的重要组成部分。为了得到更高分数阶p-Laplacian算子相关的结果，我们将通过变分法、约束变分法证明方程对应的泛函满足Palais-Smale条件，并借助相关定理将求解特征值转化为求解泛函的临界值，最终得到了在所定义空间中算子的特征值、特征向量。

关键词

特征值，特征向量，Palais-Smale条件，临界点

Eigenvalue Problems of Higher Fractional Order p-Laplacian Equation

Sa Yang, Gongming Wei

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Feb. 16th, 2023; accepted: Mar. 15th, 2023; published: Mar. 23rd, 2023

Abstract

Eigenvalues and eigenvectors are always important components of spectral theory. In order to obtain the results related to higher fractional order p-Laplacian operators, we will prove that the functional corresponding to the equation satisfies the Palais-Salale condition by using the variational method and constrained variational method, and transform the solution of eigenvalue into the critical value of the solution of functional by using the relevant theorem, and finally obtain the eigenvalue and eigenvector of the operator in the defined space.

Keywords

Eigenvalue, Eigenvector, Palais-Smale Condition, Critical Point

文章引用: 杨飒, 魏公明. 更高分数阶 p-Laplacian 方程的特征值问题[J]. 理论数学, 2023, 13(3): 526-532.
DOI: 10.12677/pm.2023.133056

1. 引言

近些年来，随着对分数阶 Sobolev 空间的不断研究，Sobolev 空间和相应的线性、非线性方程被应用到各个领域，例如优化问题[1]，金融问题[2]，分层材料[3] [4] [5]。一方面，相应的分数阶拉普拉斯算子更深层次的性质被广泛研究，例如[6]-[12]。另一方面，通过分数阶 Laplacian 算子$(-\Delta)^s u$ $(0<s<1)$去研究其他方程，也获得了很多的结果。例如[13]通过分数导数算子与分数阶 Laplacian 算子研究了 Casimir 效应，[14]通过引入分数 Sturm-Liouville 算子，并以分数阶 Laplacian 算子为例，考虑了包含线性分数阶 Laplacian 算子的分布阶时空分数扩散方程，[15]证明了在有界的 Lipschitz 区域中涉及 s 阶积分分数阶 Laplacian 算子的 Dirichlet 问题的解的 Besov 正则性估计。应运而生的关于更高分数阶的 Laplacian 算子$(-\Delta)^s u$ $(s=1+\sigma,\ 0<\sigma<1)$问题通过借助变分法[16] [17]，Fourier 变换[18]也得到了很好的结果。

由[9]，我们指出，对于光滑函数$u\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，

$$(-\Delta)^s u(x) := C_{N,s} P.V. \int_{R^N} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{N+2s}} \mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中$\mathscr{S}$表示施瓦茨空间，$P.V.$表示的是柯西主值，

$$C_{N,s} := \left(\int_{R^N} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{N+2s}} \mathrm{d}\xi \right)^{-1} = 2^{2s-1} \pi^{-\frac{N}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{N+2s}{2}\right)}{|\Gamma(-s)|}, \tag{2}$$

是一个常数。在$\mathscr{S}\left(R^N\right)$中，通过 Fourier 变换找到算子的等价形式，简述为，对于$s>1$，有

$$\left(-\hat{\Delta}\right)^s u(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi), \quad \xi \in R^N, s>0. \tag{3}$$

通过([19]，命题 2.2)可得，$u\in\mathscr{S}\left(R^N\right)$，$s=1+\sigma$时，

$$(-\Delta)^s u = -div(-\Delta)^\sigma \nabla u.$$

由[19]，通过定义希尔伯特空间，作者借助 Riesz 表示定理，Fredholm 二择一定理，Hilbert 投影定理得到了问题

$$\begin{cases} (-\Delta)^s u_i = \lambda_i u_i, & x\in\Omega, \\ \mathscr{N}_\sigma^1 u_i = 0, & x\in R^N \setminus \bar{\Omega}, \\ \mathscr{N}_\sigma^2 u_i = 0, & x\in \partial\Omega, \end{cases}$$

的特征值、特征向量。由于非齐次项的存在，[20]通过变分法证明了在光滑有界域上分数阶 p-Laplacian，

$$\begin{cases} (-\Delta)_p^s u = \lambda |u|^{p-2} u, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in R^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

特征值问题，其中$0<s<1, \Omega\subset R^N$为具有 Lipschitz 边界条件的有界区域，

$$(-\Delta)_p^s u = 2\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{R^N\setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}y,\quad x\in R^N.$$

在本文中，将致力于研究更高分数阶 p-Laplacian 方程的特征值问题。同时由于非齐次项的存在以及 Hilbert 投影定理的缺失，本文将借鉴[11] [20]的方法，研究问题

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u = \lambda|u|^{p-2}u,\ x\in\Omega,\\ \mathcal{N}_\sigma^1 u = 0,\ x\in R^N\setminus\bar{\Omega},\\ \mathcal{N}_\sigma^2 u = 0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

的特征值以及对应的特征向量。其中 $\Omega\subset R^N$ 为有界区域且为 $C^{1,1}$ 的，

$$(-\Delta)_p^s u(x) := -div\left(P.V.\int_{R^N}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^{p-2}(\nabla u(x)-\nabla u(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}y\right),\ x\in R^N.$$

无特别说明外，在这篇文章中， $p>2, 1<s<2$， $\Omega\subset R^N$ 为有界区域且为 $C^{1,1}$。

本文的结构安排如下：在第二节中我们将给出本文所需要的空间以及所需要的定义，第三部分将通过变分法、约束条件获得方程的泛函满足 PS 条件，并通过相关定理推得求泛函的临界值与方程的特征值的等价性，进而得到本文要求的方程的特征值。

2. 空间的建立

本由[16]中关于弱导数的定义以及[19]中的定义 1.2，定义 3.1，我们先给本文中所需要的空间。

定义 2.1 定义空间

$$X_{(0,0)}^s(\Omega) = \left\{u: R^N \to R: u\text{弱可导并且}\|u\|_{X_{(0,0)}^s(\Omega)}<\infty\right\},$$

其中，

$$\|u\|_{X_{(0,0)}^s(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\,\mathrm{d}x + \iint_{Q(\Omega)}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}.$$

出于简洁性，将 $X_{(0,0)}^s$ 记为 X。

定理 2.2 $X_{(0,0)}^s(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间。

定义 2.3 ([21]) W, W' 是 Banach 空间，算子 $q: W\to W'$ 是 s-齐次且为奇的当且仅当

$$q(\alpha u) = |\alpha|^{s-1}\alpha q(u),\quad \forall u\in W, \alpha\in R.$$

3. 求解特征值、特征向量

考虑非线性特征值问题

$$\begin{cases}(-\Delta)_p^s u = \lambda|u|^{p-2}u,\ x\in\Omega,\\ \mathcal{N}_\sigma^1 u = 0,\ x\in R^N\setminus\bar{\Omega},\\ \mathcal{N}_\sigma^2 u = 0,\ x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\lambda\in R$。如果(4)有一个弱解，也就是有

$$\frac{C_{N,\sigma}}{2}\int_{Q(\Omega)}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^{p-2}\left(\nabla u(x)-\nabla u(y)\right)\left(\nabla v(x)-\nabla v(y)\right)}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda\int_{\Omega}|u|^{p-2}uv\mathrm{d}x. \tag{5}$$

对于所有的 $v\in X$，称 λ 是具有齐次 Neumann 边界条件的特征值，称 u 为对应于特征值 λ 的特征函数。

如果 $\lambda=0$，通过(5)可得

$$\int_{Q(\Omega)}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^{p-2}\left(\nabla u(x)-\nabla u(y)\right)\left(\nabla v(x)-\nabla v(y)\right)}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

因此 $u\in K_1\left(R^N\right)$。反过来，如果特征函数 $u\in K_1\left(R^N\right)$，则得到 $\lambda=0$。因此，出于方便性考虑，现对空间 X 进行直和划分，即 $X=K_1\left(R^N\right)\oplus X^{s,0}$。

$$\|u\|_{X^{s,0}}^p=\int_{R^{2N}\setminus(C\Omega)^2}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^p}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty.$$

先回顾一下 Alexander-Spanier 上同调理论以及上同调指标，更多性质可参考[21] [22]。

$\mathscr{A}(X)$ 表示 Banach 空间 X 的所有非空、闭的且对称的子集。对于所有的 $A\in\mathscr{A}(X)$，$B\in\mathscr{A}(X')$，$C_2(A,B)$ 表示所有奇且连续的映射 $f:A\to B$。对于所有 $A\in\mathscr{A}$，定义商空间 $\overline{A}=A/Z_2$ 以及分类映射 $\phi:\overline{A}\to RP^\infty$，其中 RP^∞ 表示无限维射影空间，这导致了上同调环的同态 $\phi^*:H^*\left(RP^\infty\right)\to H\left(\overline{A}\right)$。我们可以在单个生成元 ω 上识别 $\phi^*:H^*\left(RP^\infty\right)$ 和上同调环 $Z_2(\omega)$。最后给出 A 的正整数指标

$$i(A)=\sup\left\{k\in N:\phi^*\left(\omega^{k-1}\right)\neq 0\right\}.$$

在本文中需要用到的指标理论为：

1) 对所有的 $k\in N$，

$$i\left(S^{k-1}\right)=k,$$

其中 S^{k-1} 表示 R^k 中的单位球。

2) 如果 $A\in\mathscr{A}(X)$，$B\in\mathscr{A}(X')$，$f\in C_2(A,B)$，则

$$i(A)\leq i(B).$$

对于 $u,v\in X^{s,0}(\Omega)$，$A:X^{s,0}(\Omega)\to\left(X^{s,0}\right)'(\Omega)$ 被设为

$$\left\langle A(u),v\right\rangle=\int_{R^{2N}}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^{p-2}\left(\nabla u(x)-\nabla u(y)\right)\left(\nabla v(x)-\nabla v(y)\right)}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 $\left(X^{s,0}\right)'$ 代表 $X^{s,0}$ 的对偶空间，显然 A 是奇的且为 $(p-1)$-齐次的，即满足对所有的 $u,v\in X^{s,0}(\Omega)$

$$\left\langle A(u),u\right\rangle=\int_{R^{2N}}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^p}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\|u\|_{X^{s,0}}^p,$$

$$\left|\left\langle A(u),v\right\rangle\right|=\left|\int_{R^{2N}}\frac{\left|\nabla u(x)-\nabla u(y)\right|^{p-2}\left(\nabla u(x)-\nabla u(y)\right)\left(\nabla v(x)-\nabla v(y)\right)}{\left|x-y\right|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leq\|u\|_{X^{s,0}}^{p-1}\|v\|_{X^{s,0}}.$$

由 $X(\Omega)$ 的一致凸性以及([23]，命题 1.3])得到当 (u_n) 是 $X^{s,0}(\Omega)$ 中能够使得 $u_n \rightharpoonup u$ 在 $X^{s,0}(\Omega)$ 以及 $\langle A(u_n),u_n-u\rangle \to 0$ 成立的序列时，则在 $X(\Omega)$ 中有 $u_n \to u$ 成立。

F 是

$$S=\left\{u\in X^{s,0},\int_{\Omega}|u|^p\,\mathrm{d}x=1\right\},$$

所有非空闭的对称的子集合。

对所有的 $k\in N$，设

$$F_k=\{A\in F:i(A)\ge k\}.$$

下面给出特征值 $\lambda_k(\lambda_k\ne 0)$ 的定义，

$$\lambda_k=\inf_{A\in F_k}\sup_{u\in A}\varphi(u) \tag{6}$$

$$\varphi(u)=\int_{R^{2N}\setminus(C\Omega)^2}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I(u)=\int_{\Omega}|u|^p\,\mathrm{d}x.$$

容易看出 $I\in C^1(X^{s,0})$，因此 S 是一个 C^1-Finsler 流形。除此之外，$\varphi\in C^1(X^{s,0}(\Omega))$，对每一个 $u,v\in X^{s,0}(\Omega)$

$$\langle\varphi'(u),v\rangle=p\langle A(u),v\rangle.$$

命题 3.1 泛函 $\tilde{\varphi}$ 在 $c\in R$ 处满足 Palais-Smale 条件，其中 $\tilde{\varphi}$ 是 φ 在 S 上的限制。

证明：令 $(u_n)_n\subset S$ 以及 $(\mu_n)_n\subset R^N$ 能够使得 $\varphi(u_n)\to c$ 在 $n\to\infty$ 时和在 X' 中 $\varphi'(u_n)-\mu_n I'(u_n)\to 0$ 成立。

通过

$$\|u\|_X^p=\int_{R^{2N}\setminus(C\Omega)^2}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^p}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

由([9]，定理 7.1)，可得在 $L^p(\Omega)$ 中

$$\nabla u_n(x)\to\nabla u(x).$$

所以，

$$\varphi'(u)=p\int_{R^{2N}\setminus(C\Omega)^2}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|^{p-2}(\nabla u(x)-\nabla u(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\begin{aligned}\langle A(u_n),u_n-u\rangle&=\int_{R^{2N}}\frac{|\nabla u_n(x)-\nabla u_n(y)|^{p-2}(\nabla u_n(x)-\nabla u_n(y))(\nabla(u_n-u)(x)-\nabla(u_n-u)(y))}{|x-y|^{N+\sigma p}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\le\left|\mu_n\langle I'(u),u_n-u\rangle+o(1)\right|\le\mu_n\|u_n-u\|_{L^p(\Omega)}^p\to 0.\end{aligned}$$

得到在 X 中 $u_n\to u$。

命题 3.2 对于所有的 $k\in N$，$\lambda_k\ne 0$ 是(3.1)的特征值，而且 $\lambda_k\to\infty$。

证明：证明命题 3.2 将等价于证明 λ_k 是 φ 的临界值。事实上，通过命题 3.1 的证明过程，存在 $u\in S$ 和

$\mu \in R$ 使得 $\varphi(u)=\lambda$ 和 $\varphi'(u)-\mu I'(u)=0$ 在 $\left(X^{s,0}(\Omega)\right)'$ 成立，则对于所有的 $v \in X^{s,0}(\Omega)$，有

$$\int_{R^{2N}} \frac{\left|\nabla u_n(x)-\nabla u_n(y)\right|^{p-2}\left(\nabla u_n(x)-\nabla u_n(y)\right)\left(\nabla\left(u_n-u\right)(x)-\nabla\left(u_n-u\right)(y)\right)}{|x-y|^{N+\sigma p}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\mu \int_{\Omega}|u(x)|^{p-2} u(x) v(x) \mathrm{d}x.$$

因此，(取 $v=u$) $\mu=\lambda \cdot \frac{2}{C_{N,\sigma}}$。所以，$u \neq 0$ 满足(5)。反过来，如果 λ 是(4)的特征值，那么就可以找到一个 λ 的特征函数 $u \in X^{s,0}(\Omega)$ 且 $I(u)=1$。所以，$u \in S$ 是 $\bar{\varphi}$ 在 λ 处的临界点。为此将采用反证法证明。假设 λ_k 是 J 的正则值，则通过命题 3.1，φ 满足 Palais-Smale 条件。由([23]，定理 2.5)知，存在实数 $\varepsilon>0$ 和一个奇同胚 $\eta: S \rightarrow S$ 使得 $\varphi(\eta(u)) \leq \lambda_k-\varepsilon$ 对所有 $u \in S$ 在 $\varphi(u) \leq \lambda_k+\varepsilon$ 下成立。因为 $A \in F_k$，可使得 $\sup_A \varphi \leq \lambda_k+\varepsilon$。设 $B=\eta(A)$，则 $B \in F$ 以及 $i(B) \geq i(A)$，所以 $B \in F_k$，则可以得到 $\sup_B \varphi \leq \lambda_k-\varepsilon$，这与(6)矛盾。

参考文献

[1] Biler, P., Karch, G. and Monneau, R. (2010) Nonlinear Diffusion of Dislocation Density and Self-Similar Solutions. *Communications in Mathematical Physics*, **294**, 145-168. https://doi.org/10.1007/s00220-009-0855-8

[2] Tankov, P. and Cont, R. (2004) Financial Modelling with Jump Processes. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton.

[3] Savin, O. and Valdinoci, E. (2009) Elliptic PDEs with Fibered Nonlinearities. *Journal of Geometric Analysis*, **19**, 420-432. https://doi.org/10.1007/s12220-008-9064-5

[4] Chermisi, M. and Valdinoci, E. (2009) Fibered Nonlinearities for *p*(x)-Laplace Equations. *Advances in Calculus of Variations*, **2**, 185-205. https://doi.org/10.1515/ACV.2009.008

[5] hermisi, M. and Valdinoci, E. (2010) A Symmetry Result for a General Class of Divergence form PDEs in Fibered Media. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **73**, 695-703. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.04.002

[6] Bjorland, C., Caffarelli, L. and Figalli, A. (2012) Non-Local Gradient Dependent Operators. *Advances in Mathematics*, **230**, 1859-1894. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.03.032

[7] Bjorland, C., Caffarelli, L. and Figalli, A. (2012) Nonlocal Tug-of-War and the Infinity Fractional Laplacian. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65**, 337-380. https://doi.org/10.1002/cpa.21379

[8] Caffarelli, L., Salsa, S. and Silvestre, L. (2008) Regularity Estimates for the Solution and the Free Boundary of the Obstacle Problem for the Fractional Laplacian. *Inventiones Mathematicae*, **171**, 425-461. https://doi.org/10.1007/s00222-007-0086-6

[9] Nezza, D.E., Palatucci, G. and Valdinoci, E. (2012) Hitchhiker's Guide to the Fractional Sobolev Spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **136**, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

[10] Dipierro, S., Rosoton, X. and Valdinoci, E. (2017) Nonlocal Problems with Neumann Boundary Conditions. *Revista Matematica Iberoamericana*, **33**, 377-416. https://doi.org/10.4171/RMI/942

[11] Mugnai, D. and Lippi, P.E. (2019) Neumann Fractional *p*-Laplacian: Eigenvalues and Existence Results. *Nonlinear Analysis*, **188**, 455-474. https://doi.org/10.1016/j.na.2019.06.015

[12] Franzina, G. and Palatucci, G. (2014) Fractional *p*-Eigenvalues. *Rivista di Matematica della Universita di Parma*, **5**, 373-386.

[13] EI-Nabulsi, R.A. and Anukool, W. (2023) C Casimir Effect Associated with Fractional Laplacian and Fractal Dimensions. *Physica E*: *Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, **146**, Article ID: 115552. https://doi.org/10.1016/j.physe.2022.115552

[14] Ansari, A. and Derakhshan, M.H. (2022) On Spectral Polar Fractional Laplacian. *Mathematics and Computer in Simulation*, **206**, 636-663. https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.12.008

[15] Borthagaray, J.P. and Nochetto, R.H. (2022) Besov Regularity for the Dirichlet Integral Fractional Laplacian in Lipschitz Domains. *Journal of Functional Analysis*, **284**, Article ID: 109829. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109829

[16] 贾高. 变分法基础与 Sobolev 空间[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2004.

[17] Bourgain, J., Brezis, H. and Mironescu, P. (2001) Another Look at Sobolev Spaces. IOS Press, Amsterdam.

[18] Carrier, G.F. and Pearson, C.E. (1976) Partial Differential Equations: Theory and Technique. Academic Press, Cambridge.

[19] Barrios, B., Montoro, L., Peral, I. and Soria, F. (2020) Neumann Conditions for the Higher Order s-Fractional Laplacian $(-\Delta)^s u$ with $s > 1$. *Nonlinear Analysis*, **193**, Article ID: 111368. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.10.012

[20] Iannizzotto, A. and Squassina, M. (2014) Weyl-Type Laws for Fractional p-Eigenvalue Problems. *Asymptotic Analysis*, **88**, 233-245. https://doi.org/10.3233/ASY-141223

[21] Perera, K., Agarwal, P.R. and O'Regan, D. (2010) Morse Theoretic Aspects of p-Laplacian Type Operator. In: *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol. 161, American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/surv/161

[22] Willem, M. (2013) Functional Analysis. Birkhäuser, Philadelphia. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7004-5

[23] Bonnet, A. (1993) A Deformation Lemma on a C^1 Manifold. *Manuscripta Mathematica*, **81**, 339-359. https://doi.org/10.1007/BF02567863