

缩影为正多面体一维骨架的图式流形同胚分类下界

罗紫韵

浙江师范大学数学科学学院, 浙江 金华

收稿日期: 2023年2月23日; 录用日期: 2023年3月24日; 发布日期: 2023年3月31日

摘要

将一个简单图中所有顶点替换为有向圆周(称为结点), 将所有边替换为圆柱面(称为管子), 即得到一个缩影为这个简单图的图式流形。一个图式流形可对应一个伴随矩阵, 若管子两端的圆周是同向的则为正管, 矩阵对应元素为1; 若是反向则为负管, 对应元素为-1, 若两结点间无管相连, 则对应元素为0。利用伴随矩阵的特征多项式, 可计算图式流形同胚类的下界。本文对于缩影为正多面体一维骨架的图式流形, 分别计算出各情形的伴随矩阵特征多项式, 并对其进行比较、去重, 得到其同胚类下界。其中, 结合正十二面体与正二十面体情形的伴随矩阵的稀疏性, 利用Householder变换, 先对伴随矩阵进行预处理, 将其化为对称三对角矩阵, 再用一种简便的递推算法编程计算其特征多项式, 得到求同胚类下界的第二种方法, 并计算出五种正多面体对应情形的同胚类下界分别为3个、6个、14个、46个和4184个。

关键词

图式流形, 伴随矩阵, 同胚分类, 正多面体, 正交变换

Lower Bounds of Homeomorphic Classifications of Graphlike Manifolds Epitomized by the One-Dimensional Skeleton of Regular Polyhedrons

Ziyun Luo

School of Mathematical Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Feb. 23rd, 2023; accepted: Mar. 24th, 2023; published: Mar. 31st, 2023

Abstract

By replacing all vertices in a simple graph with directed circles (called nodes) and all edges with cylinders (called tubes), you get a graphlike manifold epitomized by this simple graph. If the circles at both ends of the tube are in the same direction, it is called a positive tube; otherwise it is called a negative tube, corresponding to the matrix elements being 1 or -1 respectively. If two nodes are not connected, the corresponding matrix element is 0. Therefore, a graphlike manifold corresponds to a matrix, which is called the associated matrix of the graphlike manifold. The lower bound of the homeomorphic class of graphlike manifolds can be calculated by the characteristic polynomial of the associated matrix. In this paper, the homeomorphic classifications of graphlike manifolds epitomized by the one-dimensional skeleton of regular polyhedrons are presented by using the properties of the associated matrices of graphlike manifolds. For the cases of regular dodecahedron and regular icosahedron, based on the sparseness of the associated matrices, two algorithms for calculating the lower bounds of homeomorphic classifications are given by using the orthogonal transformation of the associated matrices. The results are that the lower bounds of the homeomorphic classes for the cases of five regular polyhedrons are 3, 6, 14, 46 and 4184, respectively.

Keywords

Graphlike Manifolds, Associated Matrices, Homeomorphic Classification, Regular Polyhedron, Orthogonal Mapping

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图式流形的概念由刘亚星、李起升与 1994 年在文献[1]中首次提出。对于一个简单图 G ，将图 G 中的所有顶点替换为有向圆周(称其为结点)，同时将图 G 中的所有边替换为圆柱面(称其为管子)，则得到以图 G 为缩影的图式流形。由于结点与管子之间的连接方式不同，得到的 G 图式流形也可能不同。此前有不少学者对具有特殊缩影的图式流形同胚分类问题进行了研究。

1994 年，刘亚星、李起升于文献[1]中首次提出了扭转变换，即扭转结点圆周的方向，使得与这个结点相连的所有管子均反向，并利用扭转变换，求出以 K_4 为缩影的图式流形同胚类共有 3 个。1996 年，郭驼英于文献[2]中得到以 K_5 为缩影的图式流形同胚类数量为 7 个。2009 年，郭臣峰在文献[3]中利用扭转变换得到，缩影为三棱柱一维骨架的图式流形共有 6 个同胚类，而缩影为正方体一维骨架的图式流形共有 7 个同胚类，缩影为五棱柱一维骨架的图式流形同胚类数为 12 个。2010 年，卢建立等人在文献[4]利用扭转变换得到缩影为轮图 W_8 和 W_9 的图式流形同胚类数分别为 18 个和 30 个。

1997 年，陈胜敏、胡努春在文献[5]中引入了图式流形的伴随矩阵，将图式流形与矩阵以及特征多项式联系起来。若记 B_n 为图式流形的同胚类所成之集，记 P_n 为对于伴随矩阵的特征多项式所成之集，则有 $|B_n| \geq |P_n|$ ，且当 $n < 7$ 时等号成立。1998 年，郭驼英于文献[6]推广了上述结论，分别用扭转变换以及伴随矩阵的方法求出了 $n = 7$ 时的同胚类数和下界，得到 $|B_7| = |P_7| = 54$ 。2004 年，钱有华、翁云杰等人于文献[7]利用图式流形伴随矩阵的特征多项式计算得到缩影为 K_8 , K_9 的图式流形同胚类下界分别为 235 个

和 1824 个。2007 年,周慧清等在文献[8]中对上述结果进行改进,通过计算伴随矩阵的积和式进一步提高了 K_8, K_9 情形的同胚类下界,结果分别为 242 个和 1997 个。

1997 年,宋中山、张群于文献[9]首次运用机器计算,编写算法程序,计算出缩影骨架具有 3, 4, 5 个顶点的所有图式流形同胚类数。1998~1999 年,林诒勋等人于文献[10] [11]运用图论的方法解决图式流形的同胚分类问题。其中林诒勋和邓俊强在文献[11]中通过构造独立系,讨论了缩影为轮图 W_6, W_7 的图式流形分类,得到分类结果分别为 8 个和 14 个。

2001 年,袁夫永在文献[12]中利用求数列个数的办法,推导出缩影为轮图 W_{n+1} 的图式流形同胚类数公式:

$$\frac{1}{2n} \left(\sum_{d|n} \Phi(d) \cdot 2^{\frac{n}{d}} + \beta \right), n > 3$$

$$\beta = \begin{cases} 3m \cdot 2^m, & \text{当 } n = 2m \\ (2m+1) \cdot 2^{m+1}, & \text{当 } n = 2m+1 \end{cases}$$

其中, $\Phi(d)$ 为欧拉函数,表示满足 $r < d$ 且 $(r, d) = 1$ 的自然数 r 的个数。

2012 年,平麟等人于文献[13] [14]以轮图 W_{13} 为例,利用 Burnside 引理给出了计算缩影为 W_n 的同胚类上界的方法并计算出同胚类上界数,并猜想当 $n \geq 5$ 时,以轮图 W_n 为缩影的图式流形同胚类数等于由 Burnside 引理得到的上界数。

多面体相关的研究在各个领域都有着极其广泛的应用,其中正多面体因其具有特殊的结构和性质,吸引了许多学者的目光,如文献[15] [16]等。

引理 1.2 [17]空间中正多面体只有五种,分别为正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体。

关于引理 1.2 的证明,早已有许多学者给出了不同的方法,详见文献[17] [18] [19]。

现考虑以正多面体的一维骨架为缩影的图式流形。首先,对于缩影为正四面体一维骨架的图式流形,刘亚星、李起升在文献[1]中利用扭转变换得到结论:共有 3 个同胚类。而对于正六面体,郭臣峰在文献[3]中有相关讨论,他利用扭转变换得到结果:共有 7 个同胚类。

本文主要研究的是以正多面体的一维骨架为缩影的图式流形的同胚分类问题,首先验证正四面体与正六面体的情形,再进一步计算正八面体、正十二面体与正二十面体的同胚类型数量的下界,其中结合正十二面体与正二十面体对应的伴随矩阵的稀疏性,给出了两种计算同胚类数量下界的算法,并运用数学软件编程实现。

本文的结构安排如下:

第二章为计算同胚类下界的算法。本章分为 5 个小节来分别阐述缩影为正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体以及正二十面体一维骨架的图式流形同胚类下界的计算过程。其中对于正十二面体和正二十面体的情形,利用特征多项式法以及正交变换法这两种算法来分别计算同胚类下界。

第三章为总结与展望。

2. 计算同胚类下界的算法

下面先给出图式流形的数学定义:

定义 2.1 [8]设 $G = (V, X)$ 是一个简单图,其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集,其元素为图 G 的 n 个顶点; $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 为由 m 条边所构成的集合。现把 V 中每个顶点 $v_u (u = 1, 2, \dots, n)$ 均替换为有向圆周 $S_{v_u}^1$, 假设两顶点 $v_i, v_j (i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\})$ 间存在一条边,并将其记为 $x_k \in X$, 则可把 x_k 相应地替换为一个圆柱

面 $T_{x_k} = S_{x_k}^1 \times [0, 1]$ 。我们将这两个顶点所对应的圆周 $S_{v_i}^1, S_{v_j}^1$ 用一个映射度为 1 或 -1 的连续映射与圆柱面的两个边界 $S_{x_k}^1 \times \{0\}, S_{x_k}^1 \times \{1\}$ 相连接, 这样可以得到一个拓扑空间 M 。我们将顶点所对应的圆周称为结点, 将边所对应的圆柱面称为管子, 同时将连接管子与结点的映射称为粘附映射, 称由此构造的拓扑空间 M 为 G 图式流形, 其中图 G 称为图式流形 M 的缩影。

根据定义 2.1 可知, 若管子两端的粘附映射的映射度是同号(异号)的, 则称管子为正管(负管), 对应的边称为正边(负边)。易知正管两端的结点圆周是同向的, 而负管两端的结点圆周是反向的。

设 M 为满足定义 2.1 的一个图式流形, 其缩影 $G = (V, X)$ 是有 n 个顶点 m 条边的简单图, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ 。

定义 2.2 [7] 称 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为图式流形 M 的伴随矩阵, 若满足

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \text{ 以正管相连} \\ -1 & v_i v_j \text{ 以负管相连} \\ 0 & v_i v_j \text{ 无管相连} \end{cases}$$

根据定义 2.2 可知, 由定义 2.1 所定义的图式流形的伴随矩阵均为主对角线元素为 0、其他元素为 ± 1 或 0 的对称方阵。

定义 2.3 [20] 称一个变换为图式流形的扭转变换, 如果这个变换将图式流形中某个结点圆周改变方向, 即改变与这个结点连接的所有边的符号。

由定义 2.3 我们可以得到, 若对图式流形 M 中的一个顶点 v_i 进行扭转变换, 则相当于将其伴随矩阵的第 i 行与第 i 列同时乘以 -1。

定义 2.4 [8] 称一个变换为图式流形的顶点变换, 如果这个变换将其伴随矩阵的第 i 行与第 j 行对换, 同时将第 i 列与第 j 列对换。

定义 2.5 [8] 扭转变换和顶点变换统称为图式流形的容许变换。

由文献[8]可知, 图式流形的容许变换是同胚的, 并且同胚的图式流形伴随矩阵的特征多项式也是相同的。因此一个图式流形 M 经过有限次的容许变换后得到的新的图式流形 M' 与 M 同胚, 而它们伴随矩阵的特征多项式也相同。所以通过计算对比图式流形伴随矩阵的特征多项式, 就可以得到图式流形的同胚类数量的下界。

2.1. 正四面体

首先讨论缩影为正四面体的一维骨架(如图 1)的情形。根据图 1, 我们可以得到一个伴随矩阵的形式为

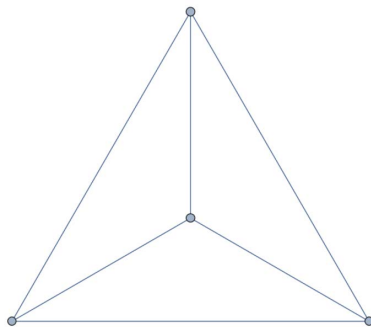


Figure 1. One-dimensional skeleton of regular tetrahedron
图 1. 正四面体的一维骨架

$$T = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ & 0 & * & * \\ & & 0 & * \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

并且满足 $T' = T$ ，其中“*”处取值为 1 或 -1。则共有 2^6 种不同的伴随矩阵。

接着，利用 `ntom_tetra` 函数，依次将自然数 k (其中 k 的取值为 $0, \dots, 2^6 - 1$) 转化为上述形式的伴随矩阵 T ，并分别计算出它们的特征多项式。

最后对得到的特征多项式进行去重，即可得到同胚类数量的下界。

下面给出 `ntom_tetra` 函数的算法[7]:

首先将自然数 k 化为二进制表示。再对二进制数 k 从右往左依次判断每一位数，若为 1，则伴随矩阵 T 上三角部分的对应位置元素赋值为 1；若为 0，则对应元素赋值为 -1。最后利用对称性给伴随矩阵 T 下三角部分赋值，即可得自然数 k 所对应的伴随矩阵 T 。例如输入 `ntom_tetra(2)`，则可输出矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

运用上述方法，运行得到结果至少有 3 个同胚类，它们的特征多项式系数向量如下:

- 1) $(1, 0, -6, 8, -3)$;
- 2) $(1, 0, -6, 0, 5)$;
- 3) $(1, 0, -6, 8, 3)$ 。

这与文献[1]中利用扭转变换讨论得到的结果是一致的。

2.2. 正六面体

正六面体的情形，大致思路与正四面体的情形类似。如图 2 为正六面体的一维骨架，则可得到正六面体情形对应的一个伴随矩阵形式

$$C = \begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ & & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ & & & & 0 & * & 0 & * \\ & & & & & 0 & * & 0 \\ & & & & & & 0 & * \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

并且满足 $C' = C$ ，其中“*”处取值为 1 或 -1。则共有 2^{12} 种不同的伴随矩阵。为了编程方便，可利用顶点变换将伴随矩阵 C 化为

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} O & B \\ B' & O \end{bmatrix},$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

且“*”处取值为1或-1。

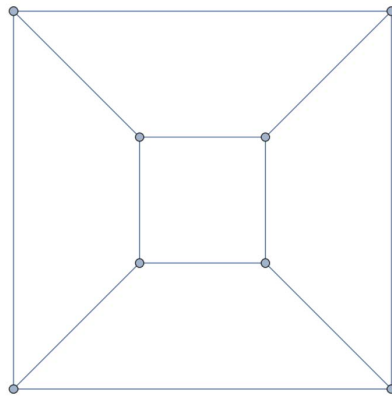


Figure 2. One-dimensional skeleton of regular hexahedron
图 2. 正六面体的一维骨架

然后利用 `ntom_cube` 函数，依次将 $k = 0, 1, \dots, 2^{12} - 1$ 转化为对应的伴随矩阵 \tilde{C} 。

接下来对每个 \tilde{C} 分别计算特征多项式，最后对比去掉重复的，即可得到结果：缩影为正六面体一维骨架的图式流形同胚类数量下界为 6 个，对应的特征多项式系数向量分别为：

- 1) $(1, 0, -12, 0, 30, 0, -28, 0, 9)$;
- 2) $(1, 0, -12, 0, 38, 0, -28, 0, 1)$;
- 3) $(1, 0, -12, 0, 46, 0, -60, 0, 25)$;
- 4) $(1, 0, -12, 0, 46, 0, -60, 0, 9)$;
- 5) $(1, 0, -12, 0, 38, 0, -12, 0, 1)$;
- 6) $(1, 0, -12, 0, 54, 0, -108, 0, 81)$ 。

所得结果与文献[3]基本吻合。

2.3. 正八面体

正八面体的一维骨架如图 3 所示，由此可得正八面体对应的一种伴随矩阵的形式

$$H = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 \\ & 0 & * & 0 & * & * \\ & & 0 & * & 0 & * \\ & & & 0 & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

利用顶点变换，可以将 H 化为一个排布规律的形式：

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * & 0 \\ & 0 & * & * & 0 & * \\ & & 0 & 0 & * & * \\ & & & 0 & * & * \\ & & & & 0 & * \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

且上述 H 与 \tilde{H} 中 “*” 处取值均为 ± 1 。则根据 “*” 处取值不同，需计算 2^{12} 种情况。

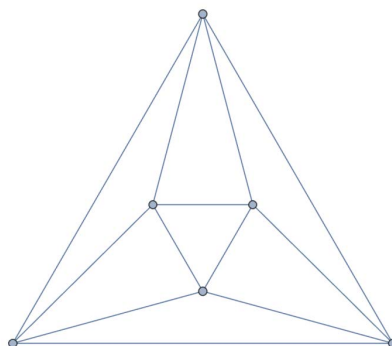


Figure 3. One-dimensional skeleton of regular octahedron
图 3. 正八面体的一维骨架

接下来利用 `ntom_octa` 函数将 $0, 1, \dots, 2^{12} - 1$ 分别输出为对应的伴随矩阵 \tilde{H} ，同时算出它们的特征多项式系数，经过对比去重后可得到结果。

经计算，得到缩影为正八面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 14 个，它们分别对应了 14 个特征多项式系数向量如下：

- 1) $(1, 0, -12, 16, 0, 0, 0)$;
- 2) $(1, 0, -12, 8, 20, -16, 0)$;
- 3) $(1, 0, -12, 8, 32, -32, 0)$;
- 4) $(1, 0, -12, 0, 16, 0, 0)$;
- 5) $(1, 0, -12, 0, 36, 0, -32)$;
- 6) $(1, 0, -12, 0, 32, 0, -16)$;
- 7) $(1, 0, -12, 8, 36, -48, 16)$;
- 8) $(1, 0, -12, 0, 36, 0, -16)$;
- 9) $(1, 0, -12, 0, 32, 0, 0)$;
- 10) $(1, 0, -12, -8, 20, 16, 0)$;
- 11) $(1, 0, -12, -8, 32, 32, 0)$;
- 12) $(1, 0, -12, 0, 48, 0, -64)$;
- 13) $(1, 0, -12, -8, 36, 48, 16)$;
- 14) $(1, 0, -12, -16, 0, 0, 0)$ 。

2.4. 正十二面体

图 4 为正十二面体的一维骨架图，由图 4 可以得到以正十二面体一维骨架为缩影的图式流形的一个

计算得到的 46 个特征多项式中, 其中前 10 个系数向量如下:

- 1) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0024, -0.2540, -0.0480, 1.0095, 0.3760, -2.3502, -1.4400, 2.8905, 2.7000, -1.1400, -2.0000, -0.6000, 0, 0, 0, 0)$;
- 2) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0016, -0.2540, -0.0320, 1.0127, 0.2496, -2.4030, -0.9568, 3.2217, 1.8544, -2.0600, -1.6480, 0.3008, 0.4800, 0.0960, 0, 0)$;
- 3) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0016, -0.2540, -0.0320, 1.0135, 0.2480, -2.4094, -0.9456, 3.2361, 1.8368, -2.0632, -1.6528, 0.2872, 0.4864, 0.0832, -0.0192, -0.0048)$;
- 4) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0135, 0.1248, -2.4222, -0.4784, 3.3705, 0.9336, -2.5368, -0.8816, 0.9080, 0.3744, -0.1088, -0.0576, -0.0048)$;
- 5) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0143, 0.1248, -2.4302, -0.4816, 3.3897, 0.9624, -2.5128, -0.9424, 0.7904, 0.3648, -0.0448, -0.0256, 0)$;
- 6) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0151, 0.1248, -2.4430, -0.4816, 3.4649, 0.9656, -2.7080, -0.9744, 1.0104, 0.4384, -0.1280, -0.0704, -0.0048)$;
- 7) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0, -0.2540, 0, 1.0135, 0, -2.4270, 0, 3.4265, 0, -2.7560, 0, 1.2360, 0, -0.2880, 0, 0.0272)$;
- 8) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0151, 0.1248, -2.4414, -0.4848, 3.4489, 0.9912, -2.6488, -1.0288, 0.9016, 0.4576, -0.0512, -0.0448, -0.0048)$;
- 9) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0159, 0.1232, -2.4526, -0.4608, 3.5033, 0.8744, -2.7752, -0.8032, 1.0688, 0.3072, -0.1536, -0.0384, 0)$;
- 10) $10^4 \times (0.0001, 0, -0.0030, 0, 0.0375, 0.0008, -0.2540, -0.0160, 1.0159, 0.1232, -2.4510, -0.4640, 3.4873, 0.9000, -2.7224, -0.8640, 1.0048, 0.3584, -0.1344, -0.0512, 0)$ 。

2.4.2. 正交变换法

正交变换法结合矩阵 D 的稀疏性, 可利用 Householder 变换先将其化为三对角形式, 再计算它的特征多项式。下面给出 Householder 变换的定义。

定义 2.6 [21] 称 n 阶矩阵 H 为 Householder 变换, 如果满足

$$H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T,$$

其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, 称为 Householder 向量。

下面的引理给出了 Householder 矩阵的性质。

引理 2.7 [22] 设 H 为满足定义 2.6 的 Householder 矩阵, 则

- 1) 对称性: $H^T = H$,
- 2) 正交性: $H^T H = I$,
- 3) 设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ($n > 1$) 为任意的非零向量, 则存在 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\|\mathbf{u}\|_2 = 1$, 使得 H 满足

$$H\mathbf{x} = \alpha\mathbf{e}_1,$$

其中 $\alpha = \pm \|\mathbf{x}\|_2$ 。

证明 1) 与 2) 利用 H 的定义容易验证。

3) 可取

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x} - \alpha \mathbf{e}_1\|_2},$$

则

$$\begin{aligned} H\mathbf{x} &= (I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T)\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2(\mathbf{u}^T\mathbf{x})\mathbf{u} \\ &= \mathbf{x} - 2\frac{(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1)^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1\|_2^2}(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\alpha\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2 - 2\alpha\mathbf{e}_1^T\mathbf{x} + \alpha^2}(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{x} - \frac{2\alpha^2 - 2\alpha\mathbf{e}_1^T\mathbf{x}}{\alpha^2 - 2\alpha\mathbf{e}_1^T\mathbf{x} + \alpha^2}(\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1) \\ &= \mathbf{x} - (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{e}_1) = \alpha\mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

证毕。

由引理 2.7 可知，利用 Householder 变换，可以将一个向量中若干相邻分量化为 0。根据上面过程，可以按如下步骤来构造确定 H 的单位向量 \mathbf{u} ：

- 1) 计算 $\mathbf{v} = \mathbf{x} \pm \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$ ；
- 2) 计算 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_2}$ ；
- 3) 计算 $H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ 。

在上述计算过程中，涉及到 $\|\mathbf{x}\|_2$ 前的符号选取问题。如果选取 $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \|\mathbf{x}\|_2 \mathbf{e}_1$ ，就会出现计算 $v_1 = x_1 - \|\mathbf{x}\|_2$ （其中 v_1, x_1 分别表示 \mathbf{v}, \mathbf{x} 的第 1 个分量）。当 $x_1 > 0$ 时，按上式计算 v_1 可能会导致有效数字的丢失，此时可改用如下的计算方式：

$$v_1 = x_1 - \|\mathbf{x}\|_2 = \frac{x_1^2 - \|\mathbf{x}\|_2^2}{x_1 + \|\mathbf{x}\|_2} = \frac{-(x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{x_1 + \|\mathbf{x}\|_2},$$

这样就可避免两个相近数相减的情形。

因此定义 2.6 可改进为

$$H = I - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T = I - \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^T = I - \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^T,$$

其中 $\beta = \frac{2}{\mathbf{v}^T\mathbf{v}}$ 。

另外，如果 \mathbf{x} 的某分量过大，其平方运算可能会出现上溢的现象。为避免计算溢出，可以用 $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_\infty$ 代替 \mathbf{x} 来构造向量 \mathbf{v} ，其中 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 。

根据上述计算过程，可以实现实列向量的 Householder 变换。具体 Matlab 程序如下：

算法 2.1 [22] 函数 mhouse(x)

```
function [v,beta]=mhouse(x)
n=length(x);
eta=norm(x,inf); x=x/eta;
sigma=x(2:n)'*x(2:n);
v=[1;x(2:n)];
```

```

if sigma==0
if x(1)>=0 beta=0;
else beta=2;
end
else
alpha=(x(1)^2+sigma)^0.5;
if x(1)<=0
v(1)=x(1)-alpha;
else
v(1)=-sigma/(x(1)+alpha);
end
beta=2*v(1)^2/(sigma+v(1)^2);
v=v/v(1);
end

```

进一步，可利用上述 Householder 变换，将一个对称矩阵化为对称三对角形式，算法步骤如下[22]：

设 $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称方阵。记 $A_1 = A = (a_{ij}^{(1)})$ ，取 $\mathbf{x} = (0, a_{21}^{(1)}, \dots, a_{n1}^{(1)})^T$ ，再记 $a_1 = \|\mathbf{x}\|$ 。则由引理 2.7，可构造 Householder 矩阵

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

使得

$$H_1 \mathbf{x} = a_1 \mathbf{e}_2.$$

因此可计算得 $H_1 A_1$ 的第一列为

$$H_1 \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{n1}^{(1)} \end{bmatrix} = H_1 \mathbf{x} + H_1 \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_1 \mathbf{e}_2 + \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \\ a_1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

因为 A_1, H_1 均为对称矩阵，于是

$$A_2 = H_1 A_1 H_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}.$$

再取 $\mathbf{x} = (0, 0, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)})^T$ ，记 $a_2 = \|\mathbf{x}\|$ ，构造

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix},$$

使得

$$H_2 \mathbf{x} = a_2 \mathbf{e}_3,$$

则可得

$$A_3 = H_2 A_2 H_2 = \begin{bmatrix} * & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & * & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & * & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

重复上述过程 $n-2$ 次, 直至对称阵 A_1 化为三对角形式

$$A_{n-1} = H_{n-2} \cdots H_2 H_1 A_1 H_1 H_2 \cdots H_{n-2} = \begin{bmatrix} * & a_1 & & & & \\ a_1 & * & a_2 & & & \\ & a_2 & * & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1} & \\ & & & a_{n-1} & * & \end{bmatrix}.$$

根据上述过程可编写 Matlab 程序如下:

算法 2.2 [22] 函数 H_mhessen(A)

```
function A=H_mhessen(A)
n=size(A,1);
for k=1:(n-2)
x=A(k+1:n,k);
[v,beta]=mhouse(x);
H=(eye(length(v))-beta*v*v');
A(k+1:n,1:n)=H*A(k+1:n,1:n);
A(1:n,k+1:n)=A(1:n,k+1:n)*H;
end
```

实现了对称矩阵三对角化后, 运用文献[23]所述的递推算法, 可简便计算三对角矩阵的特征多项式。

引理 2.8 [23] 设 A 为 n 阶实三对角矩阵,

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

其中 $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ 。设 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0.$$

记 A_k 为 A 的 k 阶顺序主子式，则 A_k 的特征多项式记为

$$f_k(\lambda) = |\lambda E - A_k| = \lambda^k + b_{k-1}^{(k)}\lambda^{k-1} + \dots + b_1^{(k)}\lambda + b_0^{(k)},$$

其中 $b_i^{(n)} = b_i (i=1, 2, \dots, n-1)$ 。则有递推关系：

$$\begin{aligned}
 b_i^{(n)} &= b_i (i=1, 2, \dots, n-1) \\
 \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ b_0^{(2)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a_2 & 1 \\ & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_0^{(1)} \end{pmatrix} - b_1 c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} b_2^{(3)} \\ b_1^{(3)} \\ b_0^{(3)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a_3 & 1 & 0 \\ & -a_3 & 1 \\ & & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_1^{(2)} \\ b_0^{(2)} \end{pmatrix} - b_2 c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b_0^{(1)} \end{pmatrix}, \\
 &\vdots \\
 \begin{pmatrix} b_{n-1}^{(n)} \\ b_{n-2}^{(n)} \\ \vdots \\ b_1^{(n)} \\ b_0^{(n)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -a_n & 1 & & & \\ & -a_n & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_{n-2}^{(n-1)} \\ \vdots \\ b_1^{(n-1)} \\ b_0^{(n-1)} \end{pmatrix} - b_{n-1} c_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b_{n-3}^{(n-2)} \\ \vdots \\ b_1^{(n-2)} \\ b_0^{(n-2)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

引理 2.8 的证明详见文献[23]。

利用引理 2.8 所给的算法，即可实现三对角矩阵特征多项式的简便计算，编写的 Matlab 程序如下：

算法 3.3 函数 tripoly(A)

```

function v=tripoly(A)
n=size(A,1);
a=diag(A,-1);
b=diag(A);
c=diag(A,1);
v=-b(1);
temp=[0;1];
for k=2:n
r=[1;v];
B=diag(diag(-b(k)*eye(k)))+diag(diag(eye(k-1)),1);
v=B*r-a(k-1)*c(k-1)*temp;
temp=[0;r];
end
v=[1;v];

```

综上所述，可得正交变换法的步骤：

- 1) 利用 `ntom_dodeca` 函数生成伴随矩阵;
- 2) 利用 `H_mhessen` 函数, 对步骤 1) 生成的伴随矩阵进行三对角化;
- 3) 利用 `tripoly` 函数, 计算步骤 2) 所得的三对角矩阵的特征多项式;
- 4) 对求得的所有特征多项式系数向量进行去重, 即可得以正十二面体一维骨架为缩影的图式流形同胚类数量的下界。

由正交变换法可编程计算得, 同胚类下界为 46 个, 与特征多项式法运行结果一致。

2.5. 正二十面体

正二十面体的每个顶点连接了 5 条边(它的骨架图如图 5 所示), 因此所对应的伴随矩阵每行每列有且仅有 5 个非零元。伴随矩阵的一种代表形式如下所示:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & * & * & & & & & * & * & * \\ * & 0 & * & * & & & & * & & * \\ * & * & 0 & * & * & & & & & * \\ & * & * & 0 & * & * & & & & * \\ & & * & * & 0 & * & * & & & * \\ & & & * & * & 0 & * & * & & * \\ & & & & * & * & 0 & * & * & * \\ * & & & & & * & * & 0 & * & * \\ * & * & & & & & * & * & 0 & * \\ * & & * & * & * & * & * & * & 0 & * \\ * & & * & * & * & * & * & * & * & 0 \end{bmatrix},$$

其中, S 为对称矩阵, 且 “*” 处取值为 ± 1 , 其余处均为 0, 则共有 2^{30} 种情况。

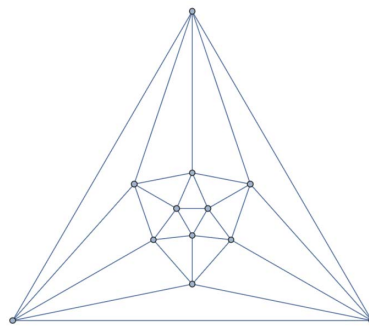


Figure 5. One-dimensional skeleton of regular icosahedron
图 5. 正二十面体的一维骨架

2.5.1. 特征多项式法

特征多项式法先运用 `ntom_icosa` 函数, 将 $0, 1, \dots, 2^{30} - 1$ 分别输出为对应的伴随矩阵 S , 并对它们的特征多项式系数去重, 可以得到缩影为正二十面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 4184。

得到的 4184 个同胚类中, 前 10 个对应的伴随矩阵特征多项式的系数向量如下:

- 1) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0400, 0.2550, -0.5760, -0.5800, 2.6400, -1.4250, -3.2000, 5.2500, -3.0000, 0.6250);$

- 2) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0320, 0.2710, -0.4800, -0.7880, 2.2080, -0.1930, -2.9760, 2.4500, -0.3200, -0.1750)$;
- 3) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0320, 0.2790, -0.5120, -0.7720, 2.2720, -0.3210, -2.6240, 1.7300, 0.3200, -0.3750)$;
- 4) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.2790, -0.3840, -0.8520, 1.6800, 0.1110, -1.2800, 0.2100, 0.2160, 0.0250)$;
- 5) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.2790, -0.3520, -1.0120, 1.7120, 1.1670, -3.1040, 0.3700, 1.7200, -0.7750)$;
- 6) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.2790, -0.3680, -0.9160, 1.6000, 0.7830, -2.1920, 0.4020, 0.4240, -0.0070)$;
- 7) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.2950, -0.3840, -1.1240, 1.9680, 1.2470, -3.4560, 0.6100, 1.3360, -0.4870)$;
- 8) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0320, 0.2790, -0.5280, -0.6440, 1.9680, -0.3530, -1.5840, 0.5780, 0.3680, -0.0870)$;
- 9) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.2870, -0.3840, -0.9480, 1.6800, 0.6710, -1.8560, -0.0140, 0.5360, 0.0330)$;
- 10) $10^3 \times (0.0010, 0, -0.0300, 0.0240, 0.3030, -0.4160, -1.1880, 2.3840, 1.0070, -4.6400, 2.5300, 0.6000, -0.5750)$ 。

2.5.2. 正交变换法

根据 2.4.2 节中正交变换法的步骤，可得计算正二十面体情形的算法。经实验，两种算法运行所得结果一致，同胚类下界均为 4184。

综上所述，我们可得到如下定理。

- 定理 2.9** 缩影为正四面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 3 个；
 缩影为正六面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 6 个；
 缩影为正八面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 14 个；
 缩影为正十二面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 46 个；
 缩影为正二十面体一维骨架的图式流形同胚类下界为 4184 个。

3. 总结与展望

本文利用特征多项式法以及正交变换法分别验证和计算了缩影为正多面体一维骨架的图式流形同胚类下界。对比两种算法，特征多项式法的整体运行时间较少，见表 1。但这两种算法均只能得到同胚类下界，例如文献[3]中的正六面体有两种同胚类(其代表元如图 6)用本文方法则无法进行区分。

Table 1. Comparison of the running time of the two algorithms

表 1. 两算法运行时间对比

	正六面体	正十二面体(前 2^{20} 种)	正二十面体(前 2^{20} 种)
特征多项式法	12.081 s	97.898 s	2221.587 s
正交变换法	13.486 s	493.037 s	2438.762 s

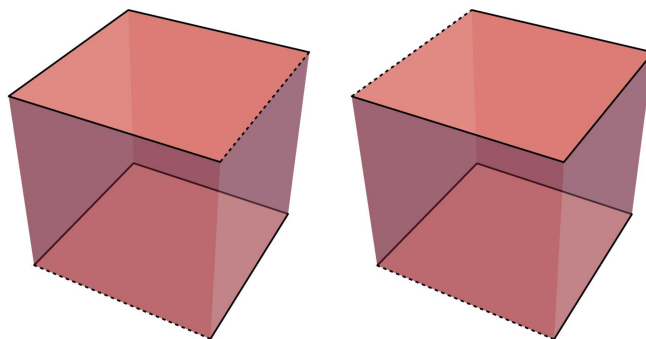


Figure 6. Two types of homeomorphic classes that cannot be distinguished (the dotted line represents the negative side)

图 6. 无法区分的两种同胚类(虚线表示负边)

另外, 文献[13]中利用 Burnside 引理求出了以轮图 W_{13} 为缩影的图式流形同胚类上界。能否利用 Burnside 引理计算缩影为正多面体一维骨架的图式流形同胚类上界, 还有待进一步研究。

参考文献

- [1] Liu, Y.X. and Li, Q.S. (1994) Graphlike Manifolds. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **9**, 46-51.
- [2] 郭驼英. 具有缩影 K_5 的图式流形[J]. 数学季刊, 1996, 11(4): 104-105.
- [3] 郭臣峰. 一些缩影特殊图式流形的同胚分类[D]: [硕士学位论文]. 郑州: 河南大学, 2009.
- [4] 卢建立, 王军. 具有缩影 W_8 和 W_9 的图式流形[J]. 科技导报, 2010, 28(1): 59-62.
- [5] Chen, S.M. and Hu, N.C. (1997) The Associated Matrices of Graphlike Manifolds: A Report. International Scientific Conference in Topology, Jinhua, 20-25 August 1997, p 7.
- [6] 郭驼英, 陈胜敏. 具有收缩 C_7 的图式流形及其伴随矩阵[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 1998, 32(3): 255-262.
- [7] 钱有华, 翁云杰, 陈胜敏. 具有缩影 K_n 的图式流形[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2004, 27(4): 334-337.
- [8] 周慧清, 陈胜敏. K_8 和 K_9 图式流形的拓扑分类的下界[J]. 浙江师范大学学报: 自然科学版, 2007, 30(1): 49-53.
- [9] 宋中山, 张群. 机器计算在图式流形研究中的应用[J]. 中南民族学院学报(自然科学版), 1997, 16(4): 35-41.
- [10] 林诒勋, 王勤. 图式流形拓扑分类的组合探讨(英文)[J]. 数学季刊, 1998, 13(3): 1-11.
- [11] 林诒勋, 邓俊强. 图式流形拓扑分类中的图着色计数问题[J]. 郑州大学学报(自然科学版), 1999, 31(2): 1-6.
- [12] 袁夫永. 计算图式流形同胚类个数的一个公式[J]. 广西科学, 2001, 8(4): 271-273.
- [13] 平麟, 陈胜敏, 钱有华. 以对轮图为缩影图式流形的同胚类数[J]. 理论数学, 2012, 2(3): 111-116.
- [14] 平麟. 同伦论中的若干问题研究[D]: [硕士学位论文]. 金华: 浙江师范大学, 2013.
- [15] 刘俊娥. 正多面体一个定值问题的初等证明[J]. 中学教学研究(华南师范大学版), 2022(3): 17-19.
- [16] 高慧芳, 曹明路, 邵枝华. 基于正多面体的多面体对称耦合机构构型综合方法[J]. 工业技术创新, 2018, 5(5): 22-27.
- [17] 明建国. 关于正多面体只有五种的证明[J]. 数学通报, 1994(11): 37-38.
- [18] 王应前. 正多面体只有五种的又一证法[J]. 安庆师范学院学报(自然科学版), 1996, 2(2): 91-92.
- [19] 周素芬. 正多面体只有 5 种的又一证法[J]. 数学通讯, 2003(1): 32.
- [20] 张群, 宋中山, 唐光海. 图式流形拓扑分类的研究进展[J]. 中南民族学院学报: 自然科学版, 2001, 20(4): 68-72.
- [21] 徐树方, 高立, 张平文. 数值线性代数[M]. 北京: 北京大学出版社, 2013.
- [22] 马昌凤, 柯艺芬, 唐嘉, 陈宝国. 数值线性代数与算法(MATLAB 版)[M]. 北京: 国防工业出版社, 2017: 408.
- [23] 杨明辉. 求三对角矩阵特征多项式一种简便方法[J]. 工科数学, 2002, 18(2): 99-101.