Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 839-845
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134088

Archimedean Spiral上矩阵值边值问题

范少华

天津职业技术师范大学理学院，天津

收稿日期：2023年2月28日；录用日期：2023年4月6日；发布日期：2023年4月24日

摘　要

研究阿基米德螺线上的一类特殊的下三角矩阵值边值问题。首先使用双线性形式给出阿基米德螺线上的伪正交多项式并说明这是唯一存在的；其次给出特殊的下三角矩阵值边值问题并转化为四组有联系的边值问题；最后使用Liouville定理和Painlevé定理以及伪正交多项式给出解。

关键词

阿基米德螺线，伪正交多项式，矩阵值边值问题

Matrix Valued Boundary Value Problem on Archimedean Spiral

Shaohua Fan

School of Science, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: Feb. 28th, 2023; accepted: Apr. 6th, 2023; published: Apr. 24th, 2023

Abstract

This paper studies a special kind of lower triangular matrix value boundary value problem on Archimedeanspiral. First, the pseudo-orthogonal polynomial on the Archimedeanspiral is given in bilinear form and shows that it exists only; Secondly, the special lower triangular matrix value boundary value problem is given and transformed into four groups of related boundary value problems; Finally, the solution is given by using Liouville theorem and Painlevé theorem and pseudo-orthogonal polynomials.

Keywords

Archimedeanspiral, Pseudo-Orthogonal Polynomial, Matrix Valued Boundary Value Problem

文章引用: 范少华. Archimedean Spiral 上矩阵值边值问题[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 839-845.
DOI: 10.12677/pm.2023.134088

1. 引言

在一些经典教科书[1] [2] [3]中讨论了有限曲线上解析函数的边值问题(Riemann-Hilbert 问题)。在 1992 年，FoKas A S，Its A R 和 Kitaev A V 在[4]中构造了一个矩阵值 Riemann-Hilbert 边值问题，其唯一解是实轴上的正交多项式。在 1993 年，Deift P 和 Zhou X 在[5]中引入关于振荡型 Riemann-Hilbert 边值问题。并应用到正交多项式的研究中，因此，形成了 Riemann-Hilbert 方法[2]。文献[6]研究了正实轴上的边值问题并给出了广义主部和阶的概念，解决了无限长曲线延伸到无穷远点没有主部和阶的问题。

2. 基础知识

在本文中将 $L\left(L=\theta e^{i\theta},\theta\geq 0\right)$ 默认为阿基米德螺线，$L_a=ae^{ia}$ 为阿基米德螺线上以 a 为长度的点，其中 $a\in[0,+\infty)$，$\overset{\frown}{L_aL_b}$ 默认为 L 上从 L_a 到 L_b 的闭弧段。若 F 在以阿基米德螺线 L 剖开的复平面全纯，则记为 $F\in A(\mathbb{C}\setminus L)$。

在阿基米德螺线上我们使用双线性形式来代替内积，这是一种常用的方式，如[2]使用此方式给出了奇异积分方程的可解条件；如 Delft.P.等在[7]中用双线性形式定义了类似正交多项式的多项式组，我们在阿基米德螺线上研究类似的多项式组：

设 $w\in H(L)\cap\bar{H}^{u}_{v,2n}(\infty)\cap O^{v+2n}(\infty)(0<u<1,v>1)$。我们在次数不超过 n 的多项式空间 Π_n 中引入双线性形式：

$$(f,g)=\int_L w(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t,\quad f,g\in\Pi_n \tag{1}$$

取 Π_n 中的一组基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$，对这组基做施密特正交化，则有

$$p_0(z)=\frac{1}{\left(\int_L w\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$p_1(z)=\frac{t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0}{\left(t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0,t-\frac{(t,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\vdots$$

$$p_n(z)=\frac{t^n-\frac{(t^n,p_{n-1})}{(p_{n-1},p_{n-1})}p_{n-1}-\cdots-\frac{(t^n,p_1)}{(p_1,p_1)}p_1-\frac{(t^n,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0}{(A_n,A_n)}$$

其中 $A_n=t^n-\frac{(t^n,p_{n-1})}{(p_{n-1},p_{n-1})}p_{n-1}-\cdots-\frac{(t^n,p_1)}{(p_1,p_1)}p_1-\frac{(t^n,p_0)}{(p_0,p_0)}p_0$，若 (p_n,p_n) 始终不为零，则这个过程始终可以进行，最后我们得到 L 上权函数为 w 的伪正交多项式组：$p_0,p_1(z),\cdots,p_n(z)$；令

$$P_k(z)=\frac{1}{\alpha_k}p_k(z),\ k=0,1,\cdots,n, \tag{2}$$

其中 α_k 为 $P_k(z)$ 的首项系数，则 $P_k(z)$ 为首 1 的 k 次伪正交多项式。显然，伪正交多项式组 $p_0, p_1(z), \cdots, p_n(z)$ 是唯一存在的。

定义 1. 设 $f(t)$ 定义在 L 上，$\Delta>0$ 和 $0<\mu\le 1$。如果 $f\in H^{\mu}\left(\widehat{L_{\Delta}\infty}\right)$，我们记为 $f\in H^{\mu}(\infty)$。如果存在一个常数 $M>0$，使得

$$\left|f(t')-f(t'')\right|\le M\left|\frac{1}{t'}-\frac{1}{t''}\right|^{\mu},\quad t',t''\in\widehat{L_{\Delta}\infty},\tag{3}$$

则记为 $f\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$，若不强调指数 μ 则可简记为 $f\in\hat{H}(\infty)$，另外，如果在 L 的任意有限子弧 L' 上有 $f\in H^{\mu}(L')$，则称 $f\in\hat{H}^{\mu}(L)$ 或 $f\in\hat{H}(L)$。如果 $f\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$ 且 $f(\infty)=0$，则我们记为 $f\in\hat{H}_0^{\mu}(\infty)$ 或简记为 $f\in\hat{H}_0(\infty)$。

定义 2. 如果对于任意 $b>a>0$，都有 $f\in H^{\mu}\left(\widehat{L_aL_b}\right)$，则称为 $f\in H_c^{\mu}(L)$，或简记为 $f\in H_c(L)$。如果存在 $\delta>0$，使得 $f\in H^{\mu}\left(\widehat{L_0L_{\delta}}\right)$，则我们记为 $f\in H^{\mu}(0)$。

定义 3. 设 f 定义在 $L\setminus\widehat{L_0L_{\Delta}}$ 上，其中 $\Delta>0$，若 $L\setminus\widehat{L_0L_{\Delta}}$ 任意两点 t' 和 t'' 都有

$$\left|f(t')-f(t'')\right|\le\frac{M'\left|t'-t''\right|^{\mu}}{\max\left\{\left|t'\right|^{\nu},\left|t''\right|^{\nu}\right\}},\tag{4}$$

其中 M 和 $0<\mu<1<\nu$ 为常数，则我们记为 $f\in\bar{H}_{\nu}^{\mu}(\infty)$。

定义 4. 设 f 是定义在 L 上的函数，存在 $\Delta>0$，实数 ν 和有界函数 $f^*(t)$，使得

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{t^{\nu}},\ |t|\ge\Delta,\tag{5}$$

或等价地，$f(t)=O\left(t^{-\nu}\right), t\to\infty$，则记为 $f\in O^{\nu}(\infty)$，更进一步，如果 $f^*(t)\in H^{\mu}(\infty)$，则记为 $f\in H_{\nu}^*(\infty)$。如果存在 $\delta>0$，实数 α 和有界函数 $f^*(t)$，使得

$$f(t)=\frac{f^*(t)}{t^{\alpha}},\ |t|\le\delta\tag{6}$$

或等价地，$f(t)=O\left(t^{-\alpha}\right), t\to 0$，则记为 $f\in O^{\alpha}(0)$，更进一步，如果 $f^*(t)\in H^{\mu}(0)$，则记为 $f\in H_{\alpha}^*(0)$。还可以定义

$$H^*(0)=\bigcup_{0\le\alpha<1}H_{\alpha}^*(0)。\tag{7}$$

设定义在 L 上的函数 $f_m(\tau)=\tau^m f(\tau)$，若分别满足 $f_m\in\hat{H}^{\mu}(\infty)$，$f_m\in\hat{H}_0^{\mu}(\infty)$，$f_m\in\bar{H}_{\nu}^{\mu}(\infty)$，则我们将其分别记为 $f\in\hat{H}_m^{\mu}(\infty)$，$f\in\hat{H}_{m,0}^{\mu}(\infty)$ 和 $f\in\bar{H}_{\nu,m}^{\mu}(\infty)$。

参考文献[6]，下面我们引入广义主部的概念。

定义 5. 设 $F\in A(\mathbb{C}\setminus L)$。若存在一个整函数 $E(z)$，使得

$$\lim_{z\to\infty}\left[F(z)-E(z)\right]=0,\ \left(\lim_{z\to 0}\left[F(z)-E\left(z^{-1}\right)\right]=0\right),\tag{8}$$

则称 $E(z)\left(E\left(z^{-1}\right)\right)$ 为 F 在 $z=\infty(z=0)$ 处的广义主部，记为 $\mathrm{G.P}[F,\infty](z)$ $(\mathrm{G.P}[F,0](z))$

定义 6. 设 f 是定义在 L 上的函数，定 f 在 L 上的 Cauchy 型积分为

$$(C[f])(z)=\lim_{\delta\to 0^+,\Delta\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{\delta}}^{L_{\Delta}}\frac{f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\notin L,\tag{9}$$

如果这个极限存在。对于 $t=\alpha e^{i\alpha}(\alpha>0)$，$b=\alpha+1$，如果

$$(C[f])(t)=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{L_0}^{L_{\alpha-\delta}}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau+\int_{L_{\alpha+\delta}}^{L_b}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\right)+\int_{L_b}^{L_{\infty}}\frac{f(\tau)}{\tau-t}\mathrm{d}\tau\tag{10}$$

存在，则我们称为阿基米德螺线上核密度为 f 的 Cauchy 主值积分(奇异积分)。

定义 7. 设 F 是定义在沿 L 剖开的复平面上的函数，若 $F\in A(\mathbb{C}\setminus L)$，它以阿基米德螺线为边界的正负边值 $F^{\pm}$ 存在，且

$$\mathrm{G.P}\left[zF,0\right]=0 \tag{11}$$

则称之为以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数。

引理 1. [6]若 $f\in O^{\alpha}(0)\cap \bar{H}_{v}^{u}(\infty)\cap O^{v}(\infty)(\alpha<1,v>1)$，则

$$\mathrm{G.P}\left[C\left[f\right],\infty\right]=0 \text{。} \tag{12}$$

引理 2. [6]若 $f\in H_{\alpha}^{*}(0)\cap O^{v}(\infty)(\alpha<1,v>1)$，则

$$\mathrm{G.P}\left[zC\left[f\right],0\right]=0 \text{。} \tag{13}$$

3. 矩阵值 Riemann 边值问题

本文考虑阿基米德螺线上的下三角矩阵值 Riemann 边值问题。设

$$\Phi(z)=\begin{pmatrix}\Phi_{1,1}(z) & \Phi_{1,2}(z)\\ \Phi_{2,1}(z) & \Phi_{2,2}(z)\end{pmatrix} \tag{14}$$

是定义在复平面 $\mathbb{C}$ 的子集 Ω 上的 2×2 矩阵值函数，每一个元素 $\Phi_{j,k}$ 都是定义在 Ω 上的函数。如果 Φ 中每一个元素 $\Phi_{j,k}$ 都满足相同的性质，则我们称 Φ 有其相应的性质。因此，可以定义 $\Phi\in A(\mathbb{C}\setminus L)$，$\mathrm{G.P}[\Phi,\infty](z)$，$\mathrm{Ord}[\Phi,\infty](z)$，$\Phi\in H(L)$ 等性质。

问题 (下三角矩阵值函数边值问题)寻求以 L 为跳跃曲线的矩阵值分区全纯函数 Φ，满足

$$\begin{cases}\Phi^{+}(t)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ w(t) & 1\end{pmatrix}\Phi^{-}(t),\ t\in L\setminus L_{0},\\ \mathrm{G.P}[\Xi\Phi,\infty](z)=I,\end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\Xi(z)=\begin{pmatrix}z^{-n} & 0\\ 0 & z^{n}\end{pmatrix}, \tag{16}$$

$\boldsymbol{I}$ 是 2×2 单位矩阵，权函数 w 满足条件

$$H(L)\cap \bar{H}_{v,2n}^{u}(\infty)\cap O^{v+2n}(\infty)\ \ (0<u<1,v>1) \text{。} \tag{17}$$

我们可以将(15)转换称四个有联系的 Riemann 边值问题：

$$\begin{cases}\Phi_{1,1}^{+}(t)=\Phi_{1,1}^{-}(t), & t\in L\setminus L_{0},\\ \mathrm{G.P}\left[z^{-n}\Phi_{1,1},\infty\right]=1,\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}\Phi_{1,2}^{+}(t)=\Phi_{1,2}^{-}(t), & t\in L\setminus L_{0},\\ \mathrm{G.P}\left[z^{-n}\Phi_{1,2},\infty\right]=0,\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\Phi_{2,1}^{+}(t)=\Phi_{2,1}^{-}(t)+w(t)\Phi_{1,1}^{-}(t), & t\in L\setminus L_{0},\\ \mathrm{G.P}\left[z^{n}\Phi_{2,1},\infty\right]=0,\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\Phi_{2,2}^{+}(t)=\Phi_{2,2}^{-}(t)+w(t)\Phi_{1,2}^{-}(t), & t\in L\setminus L_{0},\\ \mathrm{G.P}\left[z^{n}\Phi_{2,2},\infty\right]=1.\end{cases} \tag{21}$$

显然，(18)是定阶的 Liouville 问题，通过 Painlevé 定理，可知 $\Phi_{1,1}(z)$ 在除原点外的任意一点都解析(原点也可能解析)，也就是说 $z=0$ 是孤立奇点，又因为 $\Phi_{1,1}(z)$ 是分区全纯函数，所以 $\text{G.P}\left[z\Phi_{1,1},0\right]=0$，所以 $z=0$ 是可去奇点，又因为 $\text{G.P}\left[z^{-n}\Phi_{1,1},\infty\right]=1$，根据广义 Liouville 定理，我们有

$$\Phi_{1,1}(z)=P_n(z)\ \left(P_n(z)\text{是首1的}n\text{次多项式}\right)。\tag{22}$$

将(22)代入(20)，我们有

$$\begin{cases}\Phi_{2,1}^{+}(t)=\Phi_{2,1}^{-}(t)+w(t)P_n(t), & t\in L\setminus L_0,\\ \text{G.P}\left[z^n\Phi_{2,1},\infty\right]=0, & \end{cases}\tag{23}$$

由(17)我们可以证明：

$$wP_n\in H(L)\cap\bar{H}_{v,n}^{u}(\infty)\cap O^{v+n}(\infty)\ \left(0<u<1,v>1\right)。\tag{24}$$

事实上，因为 $w(\tau)\in\bar{H}_{v,2n}^{\mu}(\infty)\cap O^{v+2n}(\infty)$，所以 $\tau^{2n}w(\tau)\in\bar{H}_{v}^{\mu}(\infty)\cap O^{v}(\infty)$，任取 $k=0,1,\cdots,2n$，令 $m=2n-k$，对于 $\tau_1,\tau_2\in\widehat{L_\Delta L_\infty}$ 且 $|\tau_2|>|\tau_1|$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\tau_1^k w(\tau_1)-\tau_2^k w(\tau_2)\right|&\le\left|\frac{1}{\tau_1^m}\tau_1^{2n}w(\tau_1)-\frac{1}{\tau_2^m}\tau_2^{2n}w(\tau_2)\right|\\&\le\left|\frac{1}{\tau_1^m}\tau_1^{2n}w(\tau_1)-\frac{1}{\tau_1^m}\tau_2^{2n}w(\tau_2)\right|\\&\quad+\left|\frac{1}{\tau_1^m}\tau_2^{2n}w(\tau_2)-\frac{1}{\tau_2^m}\tau_2^{2n}w(\tau_2)\right|\\&\triangleq \mathrm{A}+\mathrm{B},\end{aligned}\tag{25}$$

因为 $\tau^{2n}w(\tau)\in\bar{H}_{v}^{\mu}(\infty)\cap O^{v}(\infty)$，所以

$$\mathrm{A}\le M\left|\frac{1}{\tau_1^m}\right|\frac{|\tau_1-\tau_2|^{\mu}}{|\tau_2|^{v}},\tag{26}$$

因为 $w(\tau)\in O^{v+2n}(\infty)$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{B}&\le\frac{\left|w^*(\tau_2)\right|}{|\tau_2|^{v}}\frac{\left|\tau_2^m-\tau_1^m\right|}{|\tau_1\tau_2|^{m}}\\&\le M_1\frac{|\tau_2-\tau_1|\left|\tau_2^{m-1}+\tau_2^{m-2}\tau_1+\cdots+\tau_1^{m-1}\right|}{|\tau_2|^{v}|\tau_1\tau_2|^{m}}\\&\le M_2\frac{|\tau_2-\tau_1|}{|\tau_2|^{v+1}|\tau_1|^{m}}\\&\le M_3\frac{|\tau_1-\tau_2|^{\mu}}{|\tau_2|^{v}},\end{aligned}\tag{27}$$

由(25)~(27)可知 $\tau^k w(\tau)\in\bar{H}_{v}^{\mu}(\infty),\ k=0,1,\cdots,2n$，又因为 p_n 为首 1 的 n 次多项式，所以 $wp_n\in\bar{H}_{v}^{\mu}(\infty)\cap O^{v}(\infty)$，也即 $wp_n\in\bar{H}_{v,n}^{\mu}(\infty)\cap O^{v+n}(\infty)$，故是一个 R_{-n-1} 跳跃问题。

令

$$\Psi(z)=C\left[wP_n\right](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)P_n(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\in\mathbb{C}\setminus L,\tag{28}$$

则通过 Plemelj 公式，引理 1 和引理 2 可知，Ψ 是一个以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数且满足

$$\begin{cases}\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)=w(t)P_n(t),\ t\in L\setminus L_0,\\ \text{G.P}[\Psi,\infty]=0,\end{cases}\tag{29}$$

所以 $\Phi_{2,1}^{+}(t)-\Phi_{2,1}^{-}(t)=\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t),\ t\in L\setminus L_0$，令 $F(z)=\Phi_{2,1}(z)-\Psi(z)$，则 F 是一个以 L 为跳跃曲线的分区全纯函数且满足：

$$\begin{cases}F^{+}(t)=F^{-}(t),\ t\in L\setminus L_0,\\ \text{G.P}[\text{F},\infty]=0,\end{cases}\tag{30}$$

而(30)问题是一个零阶的 Liouville 问题，显然它的解为 $F(z)=0$，所以

$$\Phi_{2,1}(z)=C[wP_n](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)P_n(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\in\mathbb{C}\setminus L\tag{31}$$

当且仅当满足条件

$$\text{G.P}\left[z^n\Phi_{2,1},\infty\right]=0.\tag{32}$$

因为

$$\begin{aligned}z^n\Phi_{2,1}(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)P_n(\tau)(z^n-\tau^n)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)P_n(\tau)\tau^n}{\tau-z}\mathrm{d}\tau\\&=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{z^k}{2\pi i}\int_L w(\tau)P_n(\tau)\tau^{n-1-k}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)P_n(\tau)\tau^n}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\tag{33}$$

由引理 1 和(24)，可知(32)等价于

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L w(\tau)P_n(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau=0,\ k=0,1,\cdots,n-1。\tag{34}$$

同样(19)是 Liouville 问题，类似于问题(18)我们有

$$\Phi_{1,2}(z)=q_{n-1}(z)\quad(q_{n-1}(z)\text{次数不超过 }n-1\text{ 次的多项式}),\tag{35}$$

将(35)代入(21)，我们有

$$\begin{cases}\Phi_{2,2}^{+}(t)=\Phi_{2,2}^{-}(t)+w(t)q_{n-1}(t),\quad t\in L\setminus L_0,\\ \text{G.P}\left[z^n\Phi_{2,2},\infty\right]=1.\end{cases}\tag{36}$$

显然，(36)是一个定阶跳跃问题，类似于问题(20)可知，它的解为

$$\Phi_{2,2}(z)=C[wq_{n-1}](z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)q_{n-1}(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\in\mathbb{C}\setminus L\tag{37}$$

当且仅当满足条件

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L w(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^k\mathrm{d}\tau=0,\ k=0,1,\cdots,n-2,\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L w(\tau)q_{n-1}(\tau)\tau^{n-1}\mathrm{d}\tau=-1,\end{cases}\tag{38}$$

由(38)可知 $q_{n-1}(\tau)$ 是关于阿基米德螺线上权函数 $w(\tau)$ 正交的 $n-1$ 次多项式，则

$$q_{n-1}(\tau)=-2\pi i\left\|P_{n-1}\right\|^{-2}P_{n-1}(\tau)\tag{39}$$

其中

$$\left\|p_{n-1}\right\|=\left[\int_L w(\tau)p_{n-1}^2(\tau)\mathrm{d}\tau\right]^{\frac{1}{2}}。 \tag{40}$$

定义 6. 令

$$f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{w(\tau)f(\tau)}{\tau-z}\mathrm{d}\tau,\ z\notin L, \tag{41}$$

则称 f^* 为 f 关于权函数 w 的相伴函数。

定理 如果 w 满足(17)，则下三角矩阵值边值问题(15)的解为

$$\Phi(z)=\begin{pmatrix} P_n(z) & -2\pi i\left\|P_{n-1}\right\|^{-2}P_{n-1}(z) \\ P_n^*(z) & -2\pi i\left\|P_{n-1}\right\|^{-2}P_{n-1}^*(z)\end{pmatrix}, \tag{42}$$

其中 $P_n(z)$ 是阿基米德螺线上关于权函数 w 正交的首项系数是 1 的 n 次多项式，P_n^* 是阿基米德螺线上 P_n 关于权函数 w 的相伴函数。

证明 由前面的讨论可知，若(15)有解，则它的解的形式为(42)的形式，由伪正交多项式的唯一性可知，(15)至多有一个如(42)的解。

反过来，若 Φ 由(42)给出，则由 P_n，P_{n-1} 的正交性，可知(34)和(38)成立，即 $\Phi_{1,1}$ 满足(18)，$\Phi_{1,2}$ 满足(19)；再由 Plemelj 公式知 $\Phi_{2,1},\Phi_{2,2}$ 分别是(20)和(21)的解，即由(42)定义的 Φ 的确为(15)的解。

致　谢

非常老师同学们的帮助，也非常感谢审稿老师的辛苦工作。

参考文献

[1] Gakhov, F.D. (1977) Boundary Value Problems. Nauka, Moscow.

[2] Lu, J.K. (1993) Boundary Value Problems for Analytic Functions. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/1701

[3] Muskhelishvili, N.I. (1953) Singular Integral Equations. 2nd Edition. Groningen: P. Noordhoff N. V.

[4] Fokas, A.S., Its, A.R. and Kitaev, A.V. (1992) The Isomonodromy Approach to Matric Models in 2D Quantum Gravity. *Communications in Mathematical Physics*, **147**, 395-430. https://doi.org/10.1007/BF02096594

[5] Deift, P. and Zhou, X.A. (1993) Steepest Descent Method for Oscillatory Riemann-Hilbert Problems. Asymptotics for the MKdV Equation. *Annals of Mathematics*, **137**, 295-368. https://doi.org/10.2307/2946540

[6] 王莹，段萍，杜金元. 正实轴上的 Riemann 边值问题[J]. 中国科学：数学, 2017, 47(8): 32.

[7] Deift, P., Its, A. and Krasovsky, I. (2011) Asymptotics of Toeplitz, Hankel, and Toeplitz + Hankel Determinants with Fisher-Hartwig Singularities. *Annals of Mathematics*, **174**, 1243-1299. https://doi.org/10.4007/annals.2011.174.2.12