Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 809-817
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134084

具有Holling II功能反应扩散捕食系统的定性分析

王双特[1]，于恒国[2]

[1]乐清市柳市镇第三中学，浙江 温州
[2]温州大学数理学院，浙江 温州

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月14日；发布日期：2023年4月23日

摘 要

首先引入一类具有Holling II功能反应和Neumann边界条件的扩散捕食系统，通过本征值研究正平衡点的一致渐近稳定性，并构造V函数给出全局渐近稳定性定理。其次，对于相应的稳定态系统，利用极值原理、Harnack不等式和能量积分推导了先验估计和非常数正解不存在性定理，最后利用单重本征值分支理论讨论了正常数稳态解的局部分支。

关键词

扩散捕食系统，稳定性分析，先验估计，非常数正解，分支理论

Qualitative Analysis of a Diffusive Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response

Shuangte Wang[1], Hengguo Yu[2]

[1]Yueqing No.3 Middle School, Wenzhou Zhejiang
[2]College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 14th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

The author firstly introduced a diffusive predator-prey system with Holling type II functional response subject to homogeneous Neumann boundary conditions, presented uniform asymptotic

文章引用: 王双特, 于恒国. 具有 Holling II 功能反应扩散捕食系统的定性分析[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 809-817.
DOI: 10.12677/pm.2023.134084

stability via eigenvalues, and also gave global asymptotic stability by constructing a V function. Then, for the corresponding steady state system, prior estimates and theorems about non-existence of non-constant positive solutions were deduced with the help of the maximum principle, the Harnack inequality and energy integration. Finally, local bifurcation from positive constant steady state solution was discussed by using the simple eigenvalue bifurcation theory.

Keywords

Diffusive Predator-Prey System, Stability Analysis, Prior Estimate, Non-Constant Positive Solution, Bifurcation Theory

1. 引言

在文献[1]中，作者考虑了如下反应－扩散捕食系统：

$$u_t - D_1\Delta u = r_1 u\left(1-\frac{u}{K_1}\right) - \frac{\alpha uv}{a+u} - m_1 u, t>0, x\in\Omega, \tag{1a}$$

$$v_t - D_2\Delta v = \frac{\alpha euv}{a+u} - m_2 v - dv^2, t>0, x\in\Omega, \tag{1b}$$

$$\partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, x\in\partial(\Omega), t\ge 0, \tag{1c}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\ge 0(\not\equiv 0), v(0,x) = v_0(x)\ge 0(\not\equiv 0), x\in\Omega, \tag{1d}$$

其中正常数 r_1， K_1， α， a， m_1， m_2， e 和 d 有其各自生物学意义，见上述文献，而正常数 D_1 和 D_2 称为扩散系数。耦合项 $\frac{\alpha u}{a+u}$ 称为 Holling II 功能反应，与经典的 Lotka-Volterra 模型比较，对于种群动力学的研究更具有现实意义[2] [3] [4] [5]。 $u=u(t,x)$ 和 $v=v(t,x)$ 分别表示食饵和捕食者的种群密度， Δ 是 Laplace 算子。条件(1c)称为齐次 Neumann 边界条件，其意义可参看文献[6] [7]；初始条件(1d)表明解是非负的且 $u(t,x)>0$ 和 $v(t,x)>0$ [8]。为方便研究，将系统(1)化为如下无量纲形式[1]：

$$u_t - D_1\Delta u = u\left(1-\frac{u}{K_1}\right) - \frac{\alpha uv}{1+u} - m_1 u, t>0, x\in\Omega, \tag{2a}$$

$$v_t - D_2\Delta v = \frac{\alpha uv}{1+u} - m_2 v - dv^2, t>0, x\in\Omega, \tag{2b}$$

$$\partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, t\ge 0, x\in\partial(\Omega), \tag{2c}$$

$$u(0,x) = u_0(x)\ge 0(\not\equiv 0), v(0,x) = v_0(x)\ge 0(\not\equiv 0), x\in\Omega. \tag{2d}$$

系统(1)所对应常微分系统(Bazykin 捕食系统)研究可参看文献[9] [10] [11] [12]。文献[1]考虑了系统(2)的全局稳定性和 Hopf 分支，同时给出了分支方向计算公式。对于系统(1)，当 $d=m_1=0$ 时，文献[6]通过数值模拟表明两种群对初值具有敏感性，复杂的时序动态可由空间维度所引发。对于系统(2)，当 $d=m_1=0$ 时，文献[7]研究了常数共存稳态解的 Hopf 分支以及对应扩散系统的稳态分支，由此文献[13]

则考虑了带有 Holling III 型功能反应的 Turing 失稳和 Hopf 分支。带有 Holling II 功能反应的扩散捕食系统进一步研究可参考[14] [15] [16] [17]，如文献[16]研究了当 $d = m_1 = 0$ 时系统(2)的非常数正稳态解的不存在性。

基于文献[1] [7] [16]的基础，本文继续研究系统(2)的稳定性，如局部的和全局的稳定性，同时考虑对应稳定态系统的动力学性质，如正常数解的存在性及其分支问题：

$$-D_1\Delta u = u\left(1-\frac{u}{K_1}\right)-\frac{\alpha uv}{1+u}-m_1u, x\in\Omega, \tag{3a}$$

$$-D_2\Delta v = \frac{\alpha uv}{1+u}-m_2v-dv^2, x\in\Omega, \tag{3b}$$

$$\partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, x\in\partial(\Omega), \tag{3c}$$

这里 Ω 是 $R^n\,(n\ge 1)$ 上有界区域且带有光滑边界 $\partial(\Omega)$。最后本文安排如下。第 1 节给出了平衡点存在性条件，同时给出了系统(2)的一致渐近稳定性和全局稳定性定理，第 2 节考虑了系统(3)的先验估计，第 3 节证明了系统(3)的非常数正解不存在性，最后分析了系统(3)正常数解的局部分支。

2. 系统(2)的稳定性分析

本节考虑系统(2)正平衡点的一致渐近稳定性和全局稳定性。

2.1. 正平衡点的存在性

显然 $1 > m_1$ 时，有边界平衡点 $E_2 := (u_2, 0)$， $u_2 := K_1(1-m_1)$。根据蛛网模型及等倾线方程

$$1-\frac{u}{K_1}-\frac{\alpha v}{1+u}-m_1 = 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\alpha u}{1+u}-m_2-dv = 0, \tag{4b}$$

如果条件(H1)：$0<\frac{m_2}{\alpha-m_2}<u_2$ 成立，则正平衡点 $E_* := (u_*, v_*)$ 存在。进一步的，$\frac{1}{2}(u_2-1)\le\frac{m_2}{\alpha-m_2}$ 时 E_* 唯一。

另一方面，由方程(4b)可得表达式 $v=\frac{\alpha u-m_2u-m_2}{(1+u)d}$，代入方程(4a)可得 u_* 满足的三次方 $p(x) := \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = 0$，其中 $a_3 = d$， $a_2 = [2+(m_1-1)K_1]d$， $a_1 = [(2m_1-2)d-\alpha(m_2-\alpha)]K_1 + d$， $a_0 = K_1[d(m_1-1)-m_2\alpha]$。当上述条件(H1)成立时，不难得到

$$p\left(\frac{m_2}{\alpha-m_2}\right) = \frac{\alpha^2 d[(\alpha-m_2)u_2-m_2]}{(m_2-\alpha)^3} < 0,$$

因此 $\frac{m_2}{\alpha-m_2}<u_*$，同样 E_* 存在。进一步的，如果 $a_2, a_1 \ge 0$，则 E_* 是唯一的，例如 $K_1\le\frac{1}{2}$ 时条件 $\frac{1}{2}(u_2-1)\le\frac{m_2}{\alpha-m_2}$ 成立。类似的，可用 v_* 满足的多项式方程验证条件(H1)的合理性。当然也可用 Sylvester 结式法得到上述三次方程 $p(x)=0$。

2.2. 一致渐近稳定性

设 $0=\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots$ 是对应于算子 $-\Delta$ 在 Ω 上满足条件(2c)的本征值，函数空间

$$X:=\left\{u,v\in C^1\left(\bar{\Omega}\right)\mid \partial_\nu u=\partial_\nu v=0,x\in\partial\left(\Omega\right)\right\}=\bigoplus_{j=0}^{\infty}X_j,$$

其中 X_j 是对应于本征值 μ_j 的本征子空间。再取 E_* 处 Jacobi 矩阵 $J=\left(J_{ij}\right)_{2\times2}$ 及算子

$$\hat{L}:=\begin{pmatrix} D_1\Delta+J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & D_2\Delta+J_{22}\end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_j:=\begin{pmatrix} -D_1\mu_j+J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & -D_2\mu_j+J_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $J_{11}=\frac{-u_*}{K_1}+\frac{\alpha u_*v_*}{\left(1+u_*\right)^2}$，$J_{12}=\frac{-\alpha u_*}{1+u_*}$，$J_{21}=\frac{\alpha v_*}{\left(1+u_*\right)^2}$，$J_{22}=-dv_*$，则 X_j 是 $\hat{L}$ 的不变子空间，ξ_j 是 $\hat{L}$ 的对应于 X_j 的本征值当且仅当 ξ_j 是 $\hat{L}_j$ 的本征值。定义 $\hat{L}_j$ 的迹、行列式和判别式分别为 $P_j=tr\left(\hat{L}_j\right)$，$Q_j=\det\left(\hat{L}_j\right)$ 和 $\Delta_{*,j}=P_j^2-4Q_j$，定义 J 的迹和行列式分别为 A_1 和 A_2。对于 E_* 的线性稳定性和 Turing 失稳分析，可参考[13]。

定理 1：对于系统(2)，如果 E_* 存在且 $\frac{1}{K_1}\ge\frac{\alpha v_*}{1+u_*}$，则按照[18]，$E_*$ 是一致渐近稳定的。

证明：定理的证明来源于[19]。显然此时 $J_{11}<0$，$J_{12}<0$，$J_{21}>0$，$J_{22}<0$，因此 $P_j\le A_1<0$，$Q_j\ge A_2>0$，ξ_j 都有负实部。再分情况讨论 $j\ge1$ 时 ξ_j 的实部。

情形 1. 若 $\Delta_{*,j}\le0$，则 $\mathrm{Re}\left(\xi_j\right)=\frac{1}{2}P_j\le\frac{1}{2}A_1<0$。

情形 2. 若 $\Delta_{*,j}>0$，则两个本征值

$$\mathrm{Re}\left(\xi_j^-\right)=\frac{1}{2}\left(P_j-\sqrt{\Delta_{*,j}}\right)\le\frac{1}{2}P_j\le\frac{1}{2}A_1<0,$$

$$\mathrm{Re}\left(\xi_j^+\right)=\frac{1}{2}\left(P_j+\sqrt{\Delta_{*,j}}\right)=\frac{2Q_j}{P_j-\sqrt{\Delta_{*,j}}}\le\frac{Q_j}{P_j}.$$

对于后者，取不依赖于 j 的正数 $\delta_1<\min\left\{\frac{A_2}{-A_1},\frac{-D_1J_{22}-D_2J_{11}}{D_1+D_2}\right\}$，有 $\mathrm{Re}\left(\xi_j^+\right)<-\delta_1$。

总之，存在不依赖于 j 的正数 δ_2，使得 $\mathrm{Re}\left(\xi_j^\pm\right)<-\delta_2$，$j\ge0$，因此 $\hat{L}$ 的本征谱落在某个区域 $\left\{\xi\mid\mathrm{Re}\left(\xi\right)<-\delta\right\}\left(\delta>0\right)$ 中。由[18]中的定理 5.1.1 可知结论成立。

2.3. 全局渐近稳定性

根据上述结论，对于系统(2)，有如下定理。

定理 2：对于系统(2)，如果 E_* 存在且唯一，且 $\frac{1}{K_1}>\frac{\alpha v_*}{1+u_*}$，则 E_* 全局渐近稳定。

证明：取定正 Lyapunov 函数 $W\left(t\right)=\int_\Omega\left[\left(u-u_*-u_*\ln\frac{u}{u_*}\right)+A\left(v-v_*-v_*\ln\frac{v}{v_*}\right)\right]\mathrm{d}x$，$A=1+u_*$，利用 E_* 满足的方程(4)及 Neumann 边界条件，对 t 求导有

$$\left.\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{(2)}=\int_\Omega\left[-\frac{D_1u_*}{u^2}|\nabla u|^2-\frac{AD_2v_*}{v^2}|\nabla v|^2+\left(\frac{\alpha v_*}{(1+u)(1+u_*)}-\frac{1}{K_1}\right)\hat{u}^2-Ad\hat{v}^2\right]\mathrm{d}x$$
$$\leq\int_\Omega\left[\left(\frac{\alpha v_*}{1+u_*}-\frac{1}{K_1}\right)\hat{u}^2-Ad\hat{v}^2\right]\mathrm{d}x\leq 0,$$

其中 $\hat{u}=u-u_*$， $\hat{v}=v-v_*$，等号成立当且仅当 $(u,v)=(u_*,v_*)$。

此外，[1]中由系统(2)的持久性分析可引出 E_* 的若干全局渐进稳定性定理，这对于更复杂的系统，如出现三次的和四次的，具有一定参考。总之，关于 E_* 的全局渐进稳定性，具有丰富的结论。

3. 系统(3)的先验估计

本节考虑系统(3)的先验估计。显然由极值原理可得如下定理，证明略。

定理 3： 对于系统(3)，任意正解满足 $0\leq u(x)\leq K_1$， $0\leq v(x)\leq v_m$， $x\in\bar{\Omega}$。

其中上界 v_m 不作特别说明时一般指 $v_m(K_1):=\dfrac{\alpha K_1}{d(1+K_1)}$。其次，在上述定理基础上，给出如下定理。

定理 4： 如果 $1-m_1>\alpha v_m(K_1)$， $\dfrac{\alpha u_2}{1+u_2}\neq m_2$，则对于任意正解及某个 D_2^*，存在固定正常数 C，使得当 $D_2\geq D_2^*$ 时有

$$\begin{aligned}&K_1\left[1-m_1-\alpha v_m(K_1)\right]\leq u(x)\leq u_2,\\&C\leq v(x)\leq v_m\left[(1-m_1)K_1\right],x\in\bar{\Omega}.\end{aligned}\tag{5}$$

并注意到函数 $v_m\left[(1-m_1)K_1\right]$。

证明： 只需证明正数 C 存在即可。假设不成立，则存在一列正解 $\{u_i\}_{i=1}^\infty$， $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ 及正数 $\{D_{2,i}\}_{i=1}^\infty$， $D_{2,i}\geq D_2^*$，使得 $\min\limits_{\bar{\Omega}}\{v_i\}\to 0$，$i\to\infty$，由 Harnack 不等式[20]可知 v_i 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 0。现构造 $w_i=\dfrac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$，$\|w_i\|_\infty\equiv 1$，则 (u_i,w_i) 满足椭圆问题

$$-D_1\Delta u_i=u_i\left(1-\frac{u_i}{K_1}-m_1-\frac{\alpha v_i}{1+u_i}\right),x\in\Omega,\tag{6a}$$

$$-D_{2,i}\Delta w_i=w_i\left(\frac{\alpha u_i}{1+u_i}-m_2-dv_i\right),x\in\Omega,\tag{6b}$$

$$\partial_\nu u_i=\partial_\nu w_i=0,x\in\partial(\Omega).\tag{6c}$$

对(6)积分有

$$\int_\Omega u_i\left(1-\frac{u_i}{K_1}-m_1-\frac{\alpha v_i}{1+u_i}\right)\mathrm{d}x=0,\tag{7a}$$

$$\int_\Omega w_i\left(\frac{\alpha u_i}{1+u_i}-m_2-dv_i\right)\mathrm{d}x=0.\tag{7b}$$

由 Sobolev 嵌入定理和椭圆方程正则估计可知，存在子列 $\{u_{i_k}\}_{k=1}^\infty$，$\{w_{i_k}\}_{k=1}^\infty$，使得 $u_{i_k}\to\tilde{u}$，$w_{i_k}\to\tilde{w}$，$k\to\infty$，其中 u_{i_k}， w_{i_k}， $\tilde{u}$， $\tilde{w}\in C^2(\Omega)$。由于 $v_{i_k}\to 0$， $k\to\infty$，故 $(\tilde{u},0)$ 也是(3)的解，因此(7a)化为

$\int_\Omega \tilde{u}\left(1-\frac{\tilde{u}}{K_1}-m_1\right)\mathrm{d}x=0$，这样 $\tilde{u}=u_2$。再由(7b)可知 $\int_\Omega \tilde{w}\left(\frac{\alpha u_2}{1+u_2}-m_2\right)\mathrm{d}x=0$，这导致矛盾！

4. 系统(3)非常数正解的不存在性

本节考虑系统(3)非常数正解的不存在性。

定理 5：对于系统(3)的正解，如果存在正数 λ_1，使得 $\lambda_1 D_1>1$ 且 $\lambda_1 D_2>\frac{\alpha^2 K_1 v_m}{\lambda_1 D_1-1}+\alpha K_1$，则(3)不存在非常数正解。

证明：首先定义可积函数 f 的平均为 $\bar{f}=\frac{\int_\Omega f\mathrm{d}x}{|\Omega|}$。取正解 u,v，设 $\phi=u-\bar{u}$，$\psi=v-\bar{v}$，利用 Neumann 边界条件可得

$$\int_\Omega D_1|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left\{\left[1-m_1-\frac{u+\bar{u}}{K_1}-\frac{\alpha\bar{v}}{(1+u)(1+\bar{u})}\right]\phi^2-\frac{\alpha u}{1+u}\phi\psi\right\}\mathrm{d}x, \tag{8a}$$

$$\int_\Omega D_2|\nabla\psi|^2\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\left\{\left[\frac{\alpha u}{1+u}-m_2-d\left(v+\bar{v}\right)\right]\psi^2+\frac{\alpha\bar{v}}{(1+u)(1+\bar{u})}\phi\psi\right\}\mathrm{d}x. \tag{8b}$$

引入正数 η 并相加有

$$\int_\Omega\left(D_1|\nabla\phi|^2+\eta D_2|\nabla\psi|^2\right)\mathrm{d}x=\int_\Omega\left(A\phi^2+B\phi\psi+C\psi^2\right)\mathrm{d}x, \tag{9}$$

其中

$$A=1-m_1-\frac{u+\bar{u}}{K_1}-\frac{\alpha\bar{v}}{(1+u)(1+\bar{u})}\le 1,$$

$$B=-\frac{\alpha u}{1+u}+\frac{\alpha\bar{v}\eta}{(1+u)(1+\bar{u})}\le\alpha\left(v_m\eta+K_1\right)=\bar{B},$$

$$C=\left[\frac{\alpha u}{1+u}-m_2-d\left(v+\bar{v}\right)\right]\eta\le\alpha\eta K_1=\bar{C}.$$

由 Poincare 不等式可知，存在正数 λ_1 使得

$$\int_\Omega\left(D_1|\nabla\phi|^2+\eta D_2|\nabla\psi|^2\right)\mathrm{d}x\ge\lambda_1\int_\Omega\left(D_1\phi^2+\eta D_2\psi^2\right)\mathrm{d}x, \tag{10}$$

因此

$$\int_\Omega\left[(1-\lambda_1 D_1)\phi^2+\bar{B}|\phi\psi|+\left(\bar{C}-\lambda_1 D_2\eta\right)\psi^2\right]\mathrm{d}x\ge 0. \tag{11}$$

特别的，取正数 $\eta_0=\frac{K_1}{v_m}$，(11)中的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta_{\phi\psi}&=\bar{B}^2-4(1-\lambda_1 D_1)\left(\bar{C}-\lambda_1 D_2\eta_0\right)\\&=4\eta_0\left(\lambda_1 D_1-1\right)\left[\frac{\alpha^2 K_1 v_m+\left(\lambda_1 D_1-1\right)\alpha K_1}{\lambda_1 D_1-1}-\lambda_1 D_2\right]<0,\end{aligned}$$

因此 $\phi=\psi=0$。

定理 6: 对于(3)的正解，如果存在正数 λ_1，使得 $\lambda_1 D_1 > 1+\frac{\alpha K_1}{2(1+K_1)}+\frac{\alpha v_m}{2}$ 且 $\lambda_1 D_2 > \frac{3\alpha K_1}{2(1+K_1)}+\frac{\alpha v_m}{2}$ 成立，则系统(3)不存在非常数正解。

证明： 显然由(8)可得

$$\int_\Omega D_1 |\nabla\phi|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left[\phi^2+\frac{\alpha K_1}{2(1+K_1)}\left(\phi^2+\psi^2\right)\right]\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega D_2 |\nabla\psi|^2 \mathrm{d}x \le \int_\Omega \left[\frac{\alpha K_1}{1+K_1}\psi^2+\frac{\alpha v_m}{2}\left(\phi^2+\psi^2\right)\right]\mathrm{d}x.$$

将上述不等式相加，并由定理条件及 Poincare 不等式(10)可知结论成立。

5. 系统(3)的局部分支

本节利用文献[21]的单重本征值分支理论，考虑系统(3)正常数解的局部分支，例如以 $\delta=d$ 或扩散常数为分支参数。设 1.2 节中本征值 μ_j 是单重的，对应本征函数族 $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ 是 $L^2(\Omega)$ 中正交归一基，内积为 $\langle U,V\rangle=\int_\Omega U^{\mathrm{T}}V\mathrm{d}x$。再定义算子 $\hat{K}(\delta,E_*)=\frac{\partial}{\partial\delta}J(\delta,E_*)$ 及映射

$$F(\delta,u,v)=\begin{pmatrix} D_1\Delta u+u\left(1-\frac{u}{K_1}\right)-m_1u-\frac{\alpha uv}{1+u} \\ D_2\Delta v+\frac{\alpha uv}{1+u}-m_2v-\delta v^2 \end{pmatrix}.$$

如果有条件(H2)： $\mu_k D_1 < J_{11}(E_*)$， $D_2 < \frac{-J_{12}(E_*)J_{21}(E_*)D_1}{J_{11}^2(E_*)}$，则由 $\det\hat{L}_k(\delta,E_*)=0$ 可确定临界值

$$\delta_0=\frac{D_1D_2\mu_k^2-D_2J_{11}(E_*)\mu_k-J_{12}(E_*)J_{21}(E_*)}{v_*\left[J_{11}(E_*)-D_1\mu_k\right]}>0. \tag{12}$$

进一步的，如果 $\frac{\partial\delta_0}{\partial\mu_k}$ 定号，或者 δ_0 关于 μ_k 严格单调，或者 $\delta_0(\mu_k)\ne\delta_0(\mu_j)(k\ne j)$，则

$\det\hat{L}_j(\delta_0,E_*)\ne 0(j\ne k)$。不难计算得到 $Ker\ \hat{L}(\delta_0,E_*)=span\{\varphi\}$， $\varphi=\begin{pmatrix}1\\ b_k\end{pmatrix}\varphi_k$，其中

$b_k=\frac{\alpha v_*}{(1+u_*)^2(D_2\mu_k+\delta_0 v_*)}>0$，再由 Fredholm 选择定理知

$$codim\ \Re\hat{L}(\delta_0,E_*)=dimKer\ \hat{L}(\delta_0,E_*)=1. \tag{13}$$

考虑伴随算子 $\hat{L}(\delta_0,E_*)^*=\hat{L}(\delta_0,E_*)^{\mathrm{T}}$，不难计算得到 $Ker\ \hat{L}(\delta_0,E_*)^*=span\{\psi\}$， $\psi=\begin{pmatrix}1\\ b_k^*\end{pmatrix}\varphi_k$，其中 $b_k^*=\frac{-\alpha u_*}{(1+u_*)(D_2\mu_k+\delta_0 v_*)}<0$。最后计算可得

$$\left\langle\hat{K}(\delta_0,E_*)\varphi,\psi\right\rangle=J'_{11}+b_kJ'_{12}+b_k^*(J'_{21}+b_kJ'_{22}). \tag{14}$$

其中 $J'_{ij}=\frac{\partial}{\partial\delta}J_{ij}(\delta_0,E_*)$。只要 $\left\langle\hat{K}(\delta_0,E_*)\varphi,\psi\right\rangle\ne 0$，就有 $\hat{K}(\delta_0,E_*)\varphi\notin\Re\hat{L}(\delta_0,E_*)$。这样就得到下面的定理。

定理 7：对于系统(3)及 E_*，如果存在 μ_k 使得(H2)和 $\left\langle \hat{K}(\delta_0, E_*)\varphi, \psi \right\rangle \neq 0$ 成立，而 $\frac{\partial \delta_0}{\partial \mu_k}$ 定号，或者 δ_0 关于 μ_k 严格单调，或者 $\delta_0(\mu_k) \neq \delta_0(\mu_j)$ $(k \neq j)$，则 (δ_0, E_*) 是方程 $F(\delta, u, v) = 0$ 的分支点。此外，对于参数 $|s| \ll 1$，存在方程 $F(\delta, u, v) = 0$ 的 C^1 函数类 $(\delta(s), u(s), v(s))$ 满足

$$(\delta(0), u(0), v(0)) = (\delta_0, E_*), u(s) = u_* + s\varphi_k + o(s), v(s) = v_* + sb_k\varphi_k + o(s).$$

6. 总结

本文定性分析了一类具有 Holling II 功能反应和 Neumann 边界条件的扩散捕食系统及其对应稳态系统(椭圆问题)，包括先验估计，非常数正解的不存在性和局部分支定理。今后可继续考虑全局渐近稳定性条件(例如持久性引出的结论，V 函数的构造)，非常数正解的存在性问题(例如嵌入定理和正则性理论，利用拓扑度理论证明非常数正解的存在性)，以及对局部分支作深入研究(例如分支参数的具体化，正常数解局部分支的存在性条件)。

致　谢

作者感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见，感谢编辑的细致工作，感谢温州大学的赵敏老师和戴传军老师，感谢乐清市柳市镇第三中学的郑孟老师和赵淑静老师，感谢乐清城南中学的陈谱锦老师

参考文献

[1] Wang, S.T., Yu, H.G., Dai, C.J. and Zhao, M. (2020) Global Asymptotic Stability and Hopf Bifurcation in a Homogeneous Diffusive Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response. *Applied Mathematics*, **11**, 389-406. https://doi.org/10.4236/am.2020.115028

[2] Holling, C.S. (1965) The Functional Response of Predators to Prey Density and Its Role in Mimicry and Population Regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, **97**, 3-60. https://doi.org/10.4039/entm9745fv

[3] Pei, Y.Z., Chen, L.S., Zhang, Q.R. and Li, C.G. (2005) Extinction and Performance of One-Prey Multi-Predators of Holling Type II Function Response System with Impulsive Biological Control. *Journal of Theoretical Biology*, **235**, 495-503. https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.02.003

[4] Misha, P. and Raw, S.N. (2019) Dynamical Complexities in a Predator-Prey System Involving Teams of Two Prey and One Predator. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **61**, 1-24. https://doi.org/10.1007/s12190-018-01236-9

[5] Huang, J.C., Ruan, S.G. and Song, J. (2014) Bifurcations in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1721-1752. https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024

[6] Pascual, M. (1993) Diffusion-Induced Chaos in a Spatial Predator-Prey System. *Proceedings of the Royal Society of London B*, **251**, 1-7. https://doi.org/10.1098/rspb.1993.0001

[7] Yi, F.Q., Wei, J.J. and Shi, J.P. (2009) Bifurcation and Spatiotemporal Patterns in a Homogeneous Diffusive Predator-Prey System. *Journal of Differential Equations*, **246**, 1944-1977. https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.10.024

[8] Ye, Q.X., Li, Z.Y., Wang, M.X. and Wu, Y.P. (2011) Introduction to Reaction-Diffusion Equations. Science Press, Beijing, 68-70.

[9] Freedman, H.I. (1979) Stability Analysis of a Predator Prey System with Mutual Interference and Density Dependent Death Rate. *Bulletin of Mathematical Biology*, **41**, 67-78. https://doi.org/10.1016/S0092-8240(79)80054-3

[10] Wang, Y.Q., Jing, Z.J. and Chan, K.Y. (1999) Multiple Limit Cycles and Global Stability in Predatorprey Model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **15**, 206-219. https://doi.org/10.1007/BF02720497

[11] Bazykin, A.D. (1998) Nonlinear Dynamics of Interacting Populations. World Scientific, Singapore, 67. https://doi.org/10.1142/2284

[12] Wang, S.T., Yu, H.G., Dai, C.J. and Zhao, M. (2020) The Dynamical Behavior of a Certain Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **8**, 527-547. https://doi.org/10.4236/jamp.2020.83042

[13] Wan, A.Y., Song, Z.Q. and Zheng, L.F. (2016) Patterned Solutions of a Homogeneous Diffusive Predator-Prey System of Holling Type-III. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, *English Series*, **32**, 1073-1086. https://doi.org/10.1007/s10255-016-0628-z

[14] Yang, W.S. (2014) Dynamics of a Diffusive Predator-Prey Model with General Nonlinear Functional Response. *The Scientific World Journal*, **2014**, Article ID: 721403. https://doi.org/10.1155/2014/721403

[15] Li, S.B., Wu, J.H. and Dong, Y.Y. (2018) Effects of a Degeneracy in a Diffusive Predator Prey Model with Holling II Functional Response. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **43**, 78-95. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.02.003

[16] Peng, R. and Shi, J.P. (2009) Non-Existence of Non-Constant Positive Steady States of Two Holling Type-II Predator-Prey Systems: Strong Interaction Case. *Journal of Differential Equations*, **247**, 866-886. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.03.008

[17] Ko, W. and Ryu, K. (2006) Qualitative Analysis of a Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response Incorporating a Prey Refuge. *Journal of Differential Equations*, **231**, 534-550. https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.08.001

[18] Henry, D. (1993) Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. Springer, Berlin, 98-111.

[19] Wang, M.X. (2003) Non-Constant Positive Steady States of the Sel'kov Model. *Journal of Differential Equations*, **190**, 600-620. https://doi.org/10.1016/S0022-0396(02)00100-6

[20] Lin, C.S., Ni, W.M. and Takagi, I. (1988) Large Amplitude Stationary Solutions to a Chemotaxis Systems. *Journal of Differential Equations*, **72**, 1-27. https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90147-7

[21] Smoller, J. (1983) Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, Berlin, 176-180. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-0152-3