Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 987-995
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134104

Hans汉斯

一类半正二阶 Neumann 问题正解的存在性

石琳瑛

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年3月19日；录用日期：2023年4月20日；发布日期：2023年4月27日

摘 要

本文研究半正二阶问题

$$\begin{cases} -u''(t)+u(t)=\lambda(f(u(t))+w(t)), \quad t\in[0,1], \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \qquad (\mathbf{P})$$

正解的存在性，其中 λ 为正参数，$w\in C([0,1],\mathbb{R})$ 满足 $|w(t)|\leq c$, $t\in[0,1]$, c 为任意正常数，$f\in C([0,\infty),[0,\infty))$，且满足超线性条件，即 $f_0:=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ $f_\infty:=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$。通过运用锥上的不动点定理证明了存在常数 $\lambda_0>0$，当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时，问题 (**P**) 存在一个正解。

关键词

正解，半正，**Neumann** 问题，锥上的不动点定理

Existence of Positive Solutions for a Class of Semi-Positone Second Order Neumann Problems

Linying Shi

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Mar. 19^{th}, 2023; accepted: Apr. 20^{th}, 2023; published: Apr. 27^{th}, 2023

文章引用: 石琳瑛. 一类半正二阶 Neumann 问题正解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 987-995.
DOI: 10.12677/pm.2023.134104

Abstract

We are concerned with existence of positive solutions of semi-positone second order problems

$$\begin{cases} -u''(t)+u(t)=\lambda(f(u(t))+w(t)), \quad t\in[0,1], \\ u'(0)=u'(1)=0, \end{cases} \tag{P}$$

where λ **is a positive parameter,** $w\in C([0,1],\mathbb{R})$**, and** $|w(t)|\le c$, $t\in[0,1]$, **c is a positive constant,** $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$**, and** f **is superlinear, i.e,** $f_0:=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, $f_\infty:=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$. **By using fixed point theorem in cones, we show that there exists a constant** $\lambda_0>0$ **such that (P) has a positive solution for** $0<\lambda<\lambda_0$**.**

Keywords

Positive Solution, Semi-Positone, Neumann Problems, Fixed Point Theorem in Cones

1. 引言

二阶微分方程 Neumann 边值问题正解的存在性是一类重要的问题, 引起了许多学者的广泛关注, 并已经获得了一些正解的存在性结果 [1–7]. 特别地, 2000 年, Jiang 和 Liu [8]运用锥上的不动点定理研究了 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+Mu(t)=f(t,u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

正解的存在性, 得到如下结果

定理 A ([[8], 定理 1]) 假设 $f\in C([0,1]\times[0,\infty),\ [0,\infty))$, $0<M<\frac{\pi^2}{4}$. 若下面条件之一成立,

(A1) $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=0,\ \lim\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=+\infty;$

(A2) $\lim\limits_{u\to 0^+}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=+\infty,\ \lim\limits_{u\to+\infty}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,u)}{u}=0.$

则问题 (1.1) 至少有一个正解.

2006 年姚庆六 [9]运用拓扑度理论研究了 Neumann 边值问题

$$\begin{cases} -u''(t)+\eta^2 u(t)=h(t)f(t,u(t)), \quad t\in(0,1), \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.2}$$

正解的存在性, 其中 $\eta>0$, 设 $0\le\delta<\frac{1}{2}$, 且假定下列条件:

(H1) $f\in C([0,1]\times[0,+\infty),[0,+\infty))$ 是连续函数,

(H2) $h(t)\ge 0$, $t\in[0,1]$ 并且 $0<\int_\delta^{1-\delta}h(t)dt\le\int_0^1 h(t)dt<+\infty$.
获得了如下结果:

定理 B ([[9], 定理 2]) 假定 (H1)–(H2) 成立. 若存在正数 a 和 b 使得 $0\le\varphi(a)\le aA$, $\psi(b)\ge B$, 则问题 (1.2) 至少有一个正解 u^* 满足 $\min\{a,b\}\le||u^*||\le\max\{a,b\}$, 其中,

$$A=[\max_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)h(s)ds]^{-1},\ B=[\min_{\delta\le t\le 1-\delta}\int_\delta^{1-\delta}G(t,s)h(s)ds]^{-1},$$

$$\varphi(r)=\max\{f(t,u):(t,u)\in[0,1]\times[0,r]\},\ \psi(r)=\min\{\frac{f(t,u)}{u}:(t,u)\in[\delta,1-\delta]\times[\sigma r,r]\},$$

$G(t,s)$ 为 (1.2) 对应的线性问题的 Green 函数, r 为正常数.

值得注意的是, 文献 [8, 9]研究了带 Neumann 边界条件且非线性项 f 非负的问题正解的存在性. 一个自然的问题是, 若非线性项为半正情形, 能否得到正解的存在性结果? 确切地说, 我们考虑半正 Neumann 问题

$$\begin{cases} -u''(t)+u(t)=\lambda(f(u(t))+w(t)), \quad t\in[0,1], \\ u'(0)=u'(1)=0 \end{cases} \tag{1.3}$$

正解的存在性, λ 为正参数.

本文后面总假定:

(H1) $f\in C([0,\infty),[0,\infty))$;

(H2) $f_0:=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$, $f_\infty:=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$;

(H3) $w\in C([0,1],\mathbb{R})$, 且 $|w(t)|\le c$, c 为任意正常数.

本文的主要结果如下:

定理 1.1 假设 (H1)–(H3) 成立, 则存在常数 $\lambda_0>0$, 使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时, 问题 (1.3) 至少存在一个正解.

注 当 $w(t)=0$ 时, 问题 (1.3) 可退化为问题 (1.1) $M=1$ 时的情形. 本文假定 $|w(t)|\le c$, 令 $h=f+w$, 因为 $f\ge 0$, 所以 $h(t)\ge -c$ 属于半正的情形. 不难看出, 当 $w=0$ 时, 退化为 Jiang 和 Liu [8]的工作. 因此, 本文推广了 Jiang 和 Liu [8]的工作.

2. 预备知识

令空间 $X := C[0,1]$, 其在范数 $\|u\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |u(t)|$ 下构成 Banach 空间, $L^1[0,1]$ 在范数 $\|y\|_1 = \int_0^1 |y(t)|dt$ 下构成 Banach 空间.

引理 2.1 [10, 11]设 X 是一个 Banach 空间, 且 K 是 X 中的一个锥, 即 $K \subset X$. 假设 Ω_1, Ω_2 是 X 的有界开子集, 且有 $0 \in \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. 令

$$F : K \cap (\overline{\Omega}_2 \setminus \overline{\Omega}_1) \to K$$

是全连续算子且满足

(i) $\|Au\| \le \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Au\| \ge \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$;
或

(ii) $\|Au\| \ge \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_1$, 且 $\|Au\| \le \|u\|$, $u \in K \cap \partial\Omega_2$.
则 A 在 $K \cap (\overline{\Omega}_1 \setminus \Omega_2)$ 中有一个不动点.

引理 2.2 令 z 满足

$$\begin{cases} -z''(t) + z(t) = \lambda g(t), & t \in [0,1], \\ z'(0) = z'(1) = 0, \end{cases}$$

其中 $g \in L^1[0,1]$, 且 $\int_0^1 g(t)dt > 0$, 则

$$z(t) \ge \lambda\sigma ||z||_\infty,$$

其中 $\sigma = \frac{m}{M} = \frac{1}{\cosh 1^2}$, $M = \max\limits_{0\le t\le 1} G(t,s) = \frac{\cosh 1^2}{\sinh 1}$, $m = \min\limits_{0\le t\le 1} G(t,s) = \frac{1}{\sinh 1}$.

证明 根据文献 [12]可知,

$$z(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)g(s)ds.$$

其中

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\cosh(1-t)\cosh s}{\sinh 1}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ \frac{\cosh(1-s)\cosh t}{\sinh 1}, & 0 \le t \le s \le 1, \end{cases}$$

$\cosh t = \frac{e^{-t}+e^t}{2}$, $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$, 显然 $G(t,s) \ge 0$, $t \in [0,1]$, 可以得到

$$\begin{aligned} z(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)g(s)ds \ge \lambda m \int_0^1 g(s)ds \\ &= \lambda\sigma \int_0^1 Mg(s)ds = \lambda\sigma \max \int_0^1 G(t,s)g(s)ds \\ &= \lambda\sigma ||z||_\infty. \end{aligned}$$

引理 2.3 令 $u \in C[0,1]$, 满足

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) \geq -\lambda c, \quad t \in [0,1], \\ u'(0) \geq 0, \ \ u'(1) \geq 0, \end{cases}$$

则 $u \geq 0$, 假定 $||u||_\infty \geq \frac{Mc+\lambda\sigma Mc}{\sigma}$, 则

$$u(t) \geq \lambda\sigma||u||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc.$$

证明 设 $v_0(t)$ 是微分方程

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = -\lambda c, \quad t \in [0,1], \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

的唯一解, 则

$$-v_0(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)c\, ds \leq \lambda M \int_0^1 c\, ds \leq \lambda Mc.$$

因此,

$$-v_0(t) \leq \lambda Mc.$$

令 $y(t) = u(t) - v_0(t)$, 则 $y(t)$ 满足

$$\begin{cases} -y''(t) + y(t) \geq 0, \quad t \in [0,1], \\ y'(0) \geq 0, \ y'(1) \geq 0. \end{cases}$$

由引理 2.2 可知，

$$y(t) \geq \lambda\sigma||y||_\infty, \quad t \in [0,1].$$

对任意的 $t \in [0,1]$, 有

$$\begin{aligned} u(t) &= y(t) + v_0(t) \\ &\geq \lambda\sigma||y||_\infty - \lambda Mc \\ &= \lambda\sigma||u - v_0||_\infty - \lambda Mc \\ &\geq \lambda\sigma(||u||_\infty - ||v_0||_\infty) - \lambda Mc \\ &\geq \lambda\sigma(||u||_\infty - \lambda Mc) - \lambda Mc \\ &\geq \lambda\sigma||u||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc, \qquad t \in [0,1]. \end{aligned}$$

3. 主要结果的证明

定理1.1的证明 假设 $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$, 且问题

$$\begin{cases} -u''(t) + u(t) = \lambda(f(u(t)) + w(t)), & t \in [0,1], \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

等价于

$$u(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)(f(u(s)) + w(s))ds, \quad t \in [0,1].$$

定义

$$K = \{u \in X \mid u(t) \geq \lambda\sigma||u||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc,\ t \in [0,1]\}$$

由于 $||u||_\infty \geq \frac{Mc+\lambda\sigma Mc}{\sigma}$, 所以 $u(t) \geq 0$, 则 K 为 X 中的锥. 若 $u \in K$, 结合引理 2.3 可知,

$$\begin{aligned} Lu(t) &= \lambda \int_0^1 G(t,s)((f(u(s)) + w(s)))ds \\ &= \lambda \int_0^1 G(t,s)(f(u(s) + w(s) + c)ds - \lambda \int_0^1 G(t,s)c\, ds \\ &\geq \lambda m \int_0^1 (f(u(s)) + w(s) + c)\, ds - \lambda Mc \\ &= \lambda\sigma \int_0^1 M(f(u(s) + w(s) + c)\, ds - \lambda Mc \\ &\geq \lambda\sigma||Lu||_\infty + \lambda\sigma Mc - \lambda Mc \\ &\geq \lambda\sigma||Lu||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc. \end{aligned}$$

故 $L(K) \subset K$, 易知 L 是连续的, 下证 L 是紧算子.

设 $S \subset C[0,1]$ 为有界集, 由 $f + w$ 的连续性知, 存在 $D > 0$, 有

$$f(u) + w \leq D, \quad u \in S.$$

对于 $u \in S$ 有

$$\begin{aligned} ||Lu||_\infty &= \max_{t\in[01]} \left|\lambda \int_0^1 G(t,s)((f(u(s)) + w(s)))ds\right| \\ &\leq \lambda \int_0^1 MDds \\ &\leq \lambda MD. \end{aligned}$$

因此, $L(S)$ 在 $C[0,1]$ 上一致有界. 对任意 t_1, $t_2 \in [0,1]$ $(t_1 < t_2)$ 有

$$\begin{aligned}\big|Lu(t_1) - Lu(t_2)\big| &= \big|\lambda \int_0^1 G(t_1,s)(f(u(s)) + w(s))ds - \lambda \int_0^1 G(t_2,s)(f(u(s)) + w(s))ds\big| \\ &\le \lambda D \int_0^1 \big|G(t_1,s) - G(t_2,s)\big|ds.\end{aligned}$$

由 $G(t,s)$ 连续性可知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得若 $|t_1 - t_2| < \delta$, 则 $|Lu(t_1) - Lu(t_2)| < \varepsilon$. 故,$L(S)$ 在 $C[0,1]$ 上等度连续. 由 Arzèla-Ascoli 定理知, $L(S)$ 在 $C[0,1]$ 上是相对紧的, 因此, L 是全连续的.

(a) 若 $f_0 = 0$, 则对任意 $\eta > 0$, 存在 $H_1 > 1$, 当 $1 < u \le H_1$ 时, 有 $f(u) \le \eta u$, 满足

$$\lambda M(\eta + c) \le 1.$$

因此, 若 $u \in K$ 且 $||u||_\infty = H_1$, 则

$$\begin{aligned}\big|Lu(t)\big| &= \big|\lambda \int_0^1 G(t,s)((f(u(s)) + w(s)))ds\big| \\ &\le \lambda \int_0^1 G(t,s)\big|((f(u(s)) + w(s))\big|ds \\ &\le \lambda M \int_0^1 (\big|\eta u(s)\big| + c)ds \\ &\le \lambda M \int_0^1 (\eta||u||_\infty + c||u||_\infty)ds \\ &\le ||u||_\infty. \end{aligned} \tag{3.1}$$

即 $\lambda \le \frac{1}{M(\eta+c)} := \lambda_0$.

令

$$\Omega_1 := \{u \in X : ||u||_\infty < H_1\}.$$

由 (3.1) 知

$$||Lu||_\infty \le ||u||_\infty, \qquad u \in K \cap \partial\Omega_1. \tag{3.2}$$

(b) 若 $f_\infty = \infty$, 则对任意 $\mu > 0$, 存在 $\widehat{H}_2 > 0$, 当 $u \ge \widehat{H}_2$ 时, 有 $f(u) \ge \mu u$, 且满足

$$\lambda^2 m\mu\sigma - \lambda^2\mu m M c - \lambda^3\mu m^2 c - \lambda m c \ge 1.$$

令 $H_2 = \max\{2H_1, \frac{\widehat{H}_2 + \lambda Mc + \lambda^2\sigma Mc}{\lambda\sigma}\}$ 且 $\Omega_2 := \{u \in X : ||u||_\infty < H_2\}$, 则 $u \in K$, $||u||_\infty = H_2$,

$$u(t) \ge \lambda\sigma||u||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc \ge \widehat{H}_2.$$

因此

$$
\begin{aligned}
|Lu(t)| &= |\lambda \int_0^1 G(t,s)(f(u(s)) + w(s))ds| \\
&\geq \lambda| \int_0^1 G(t,s)(\mu u(s) - c)ds| \\
&\geq \lambda m \int_0^1 [\mu(\lambda\sigma||u||_\infty - \lambda Mc - \lambda^2\sigma Mc) - c]ds \\
&= \lambda^2\mu m\sigma||u||_\infty - \lambda^2\mu mMc - \lambda^3\mu m^2 c - \lambda mc \\
&\geq \lambda^2 m\mu\sigma||u||_\infty - (\mu\lambda^2 mMc + \lambda^3\mu m^2 c + \lambda mc)||u||_\infty \\
&\geq (\lambda^2 m\mu\sigma - \lambda^2\mu mMc - \lambda^3\mu m^2 c - \lambda mc)||u||_\infty \\
&\geq ||u||_\infty.
\end{aligned}
$$

因此

$$
||Lu||_\infty \geq ||u||_\infty,\ u \in K \cap \partial\Omega_2. \tag{3.3}
$$

从而, 由 (3.2), (3.3) 和引理 2.1 可知, L 在 $K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \overline{\Omega}_1)$ 中有一个不动点, 使得 $H_1 \leq ||u||_\infty \leq H_2$. 因此, 当 $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$ 时有一个正解.

4. 应用

例 考虑问题

$$
\begin{cases}
-u''(t) + u(t) = \lambda(2u^2 + \sin 2t), & t \in [0,1], \\
u'(0) = u'(1) = 0
\end{cases} \tag{4.1}
$$

正解的存在性, 其中 $\lambda > 0$ 为参数.

解 这里取 $f(u) = 2u^2$, $w(t) = \sin 2t$, 显然 $f(u) \geq 0$, 且 f 满足 $f_0 = 0$, $f_\infty = \infty$, 条件 (H1)-(H2) 成立, 并且 $|\sin 2t| \leq 1,\ t \in [0,1]$, 条件 (H3) 成立.

根据定理 1.1 存在常数 $\lambda_0 > 0$, 使得当 $0 < \lambda < \lambda_0$ 时, 问题 (4.1) 存在一个正解.

基金项目

国家自然科学基金(批准号: 12061064).

参考文献

[1] Sun, J.P., Li, W.T. and Cheng, S.S. (2004) Three Positive Solution to Second-Order Neumann Boundary Value Problem. *Applied Mathematics Letters*, **17**, 1079-1084.

https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.07.012

[2] Hai, D.D. and Shivaji, R. (2017) Positive Radial Solutions for a Class of Singular Superlinear Problems on the Exterior of a Ball with Nonlinear Boundary Conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **456**, 872-881. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.06.088

[3] Li, Z.L. (2010) Existence of Positive Solution of Superlinear Second-Order Neumann Boundary Value Problems. *Nonlinear Analysis*, **72**, 3216-3221. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.12.021

[4] Sun, Y., Cho, Y.J. and O'Regan, D. (2009) Positive Solution for Singular Second Order Neumann Boundary Value Problems via a Cone Fixed Point Theorem. *Applied Mathematics and Computation*, **210**, 80-86. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.11.025

[5] 郭大钧, 孙经先. 非线性积分方程[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 1987.

[6] Chu, J.F., Sun, Y.G. and Chen, H. (2008) Positive Solution of Neumann Problem with Singularities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **337**, 1267-1272. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.04.070

[7] Ma, R.Y. and Chen, R.P. (2012) Existence of One-Signed Solutions of Nonlinear Four-Point Boundary Value Problems. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **62**, 593-612. https://doi.org/10.1007/s10587-012-0052-3

[8] Jiang, D.Q. and Liu, H.Z. (2000) Existence of Positive Solution to Second Order Neumann Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, **20**, 360-364.

[9] 姚庆六. 非线性二阶Neumann边值问题的正解[J]. 工程数学学报, 2006, 23(5): 939-942.

[10] Deimling, K. (1985) Nonlinear Function Analysis. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00547-7

[11] Krasnoselskii, M.A. (1964) Positive Solution of Operator Equation. Noordhoff, Groningen, 381.

[12] Sun, J.P. and Li, W.T. (2003) Multiple Positive Solution to Second Order Neumann Boundary Value Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **146**, 187-194. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00535-0