Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 829-838
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134087

论牛顿的数学机械化思想

杨欣童

清华大学人文学院科学史系，北京

收稿日期：2023年3月13日；录用日期：2023年4月14日；发布日期：2023年4月23日

摘　要

研究著名数学家牛顿蕴含在其众多数学研究中的数学思想具有重要意义。通过运用内容分析法和对比分析法，对牛顿的微积分和代数学研究进行讨论，发现：牛顿在其数学研究中广泛应用了数学机械化思想；牛顿的数学机械化思想与中国古代机械化思想非常相似，比笛卡尔的数学机械化思想更清晰和简洁。因此，牛顿也是西方数学机械化思想发展和实际应用的先驱。

关键词

牛顿，机械化，数学，微分，方程

On Newton's Thought of Mathematical Mechanization

Xintong Yang

Department of History of Science, School of Humanities, Tsinghua University, Beijing

Received: Mar. 13th, 2023; accepted: Apr. 14th, 2023; published: Apr. 23rd, 2023

Abstract

It is of great significance to study the mathematical thought of the famous mathematician Newton in his numerous mathematical studies. By analyzing Newton's research on calculus and algebra with the method of content analysis and comparative analysis, it could be found that Newton has widely applied the idea of mathematical mechanization in his mathematical research; Newton's thought of mathematical mechanization is very similar to that of ancient China, and is clearer and simpler than that of Descartes. Therefore, Newton was also a pioneer in the development and practical application of the thought of mathematical mechanization in the West.

文章引用：杨欣童. 论牛顿的数学机械化思想[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 829-838.
DOI: 10.12677/pm.2023.134087

Keywords

Newton, Mechanization, Mathematics, Differential, Equation

1. 引言

伊萨克·牛顿(Isaac Newton, 1643~1727)，英国著名天文学家、物理学家、数学家和化学家，为人类科学的进步做出了巨大贡献[1] [2]。提及牛顿的数学，人们最为熟悉的是其发明了微积分，给出了牛顿莱布尼兹公式，将无穷小(Infinitesimal analysis)分析思想广泛应用到了数学中[3] [4] [5]。其实，牛顿在研究和应用数学的时候，也很关注数学的程序化、自动化和算法化，有着非常明晰的数学机械化思想。数学机械化思想即是在数学运算或证明的过程中，每一步都要严格按照既定的步骤而进行的一种规格化的观念[6] [7]。牛顿的数学机械化思想不仅清晰，而且在某些方面与我国传统数学机械化思想有着异曲同工之妙，在另外一些方面则比前人更清晰和更简洁，由此更有实用价值。本文拟就这个问题做一阐述，已求教各位方家。

本文共四小节：第一节详细说明牛顿数学中含有明晰的数学机械化思想，第二节将牛顿的数学机械化思想与中国古代数学机械化思想作比较，第三节将其与笛卡尔的数学机械化思想作比较，最后一节给出所得到的结论。

2. 牛顿数学中含有明晰的数学机械化思想

1666 年，牛顿写成《流数简论》(Tractatus de Fluxiones)一文，正式宣告微积分这门新的学科的诞生。[8] [9]这其中其给出了两种求微分的方法。第一种方法是这样的[10]：

PROBL I: Data relatione, quam invicem habent Fluentes Quantitates, determinare Relationem, que inter carum Fluxiones intercedit. SOLUTIO: Equationem, qua date Relatio exprimitur, dispone juxta Dimensiones alicujus ex Fluentibus Quantitatibus, quas includidt, (puta, x,) & ejus Terminos multiplica per quancumque artihmeticam Progressionem, & deinde per $\frac{\dot{x}}{x}$: Hanc Operationem seorsum persice pro quavis Fluenti Quantitate; Tum sac Aggregatum ex his omnibus Factis equale nibilo, & habebis petitam Equationem. EXEMPL. I: Si Relatio inter vludngdx Quantitates x, & y exponitur Equatione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Primum dispone Terminos secundum x, deinde secundum y, & eos multiplica, ut hic vides factum.

$$\begin{array}{ll} \text{Mult.} & x^3 - ax^2 + axy - y^3 \mid -y^3 + axy - ax^2 + x^3 \\ \text{Per} & \frac{3\dot{x}}{x};\ \frac{2\dot{x}}{x};\ \frac{\dot{x}}{x};\quad 0 \quad \mid \frac{3\dot{y}}{y};\ \frac{\dot{y}}{y};\quad 0 \end{array}$$

$$\text{Unde conficitur}:\ 3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} * \quad -3y^2\dot{y} + ax\dot{y} *$$

Aggregatum ex Productis est $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$; que Equatio monstrat quaenam Relatio sit inter Fluxiones $\dot{x}$, & $\dot{y}$.

由这段话可以知道，牛顿求微分的方法是：

首先，是将含有未知数的方程中的多项式按照未知数的次数由高到低排列出来；比如原方程是 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$，则这一步是列出如下两个多项式：

$$x^3-ax^2+axy-y^3 \text{ 和 } -y^3+axy-ax^2+x^3$$

第二步，是列出多项式每一项相对应的因子。对刚才列出的多项式，这一步是列出：

$$\frac{3\dot{x}}{x};\ \frac{2\dot{x}}{x};\ \frac{\dot{x}}{x};\quad 0 \text{ 和 } \frac{3\dot{y}}{y};\ \frac{\dot{y}}{y};\quad 0$$

第三步，是让多项式每一项都与其因子相乘，求得乘积。对刚才的多项式，这一步即是求得

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+0 \text{ 和 } -3y^2\dot{y}+ax\dot{y}+0$$

第四步，是将得到的所有项加起来，形成一个新的方程，即得到原方程的微分形式。对刚才的多项式，这一步即是将上述两个多项式加起来，形成一个新的方程：$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}-3y^2\dot{y}+ax\dot{y}=0$，这就是所求。

在篇这文章中，牛顿给出的第二个求微分的方法是[10]：

Quamobrem, Sit Equation $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, in ea substitue $x+\dot{x}o$, & $y+\dot{y}o$, ipsis *x*, & *y*, obtinebis,

$$\left.\begin{array}{c} x^3+3x^2\dot{x}o+3x\dot{x}o\dot{x}o+\dot{x}^3o^3 \\ -ax^2-2ax\dot{x}o-a\dot{x}o\dot{x}o \\ -ax^2-2x\dot{x}o-a\dot{x}o\dot{x}o \\ +ax\dot{y}o \\ -y^3-3y^2yo-3y\dot{y}o\dot{y}o-y^3o^3 \end{array}\right\}=0$$

Sed, per hypothesim, $x^3-ax^2+axy-y^3=0$, expunge igitur hos Terminos, cetersque divide per *o* & restabit

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+axy-3y^2\dot{y}+3x\dot{x}^2o-a\dot{x}^2o+a\dot{x}\dot{y}o-3y\dot{y}^2o+\dot{x}^3o^2-y^3o^2=0;$$

Cum autem finxerimus *o*. Quantitaem infinite parvam, ut exponere posset Quantitatum Momenta, Termini in eam ducti pro nihio possunt haberi cum aliis collati; eos igitur negligo, & superset $3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+ay\dot{x}+ax\dot{y}-3y^2\dot{y}=0$, ut antea inveneramus in Exemplo I.

由这段话可知，牛顿的第二种求微分的方法是：

第一步：将原方程中的 x 替换成 $x+\dot{x}_o$，并且将 y 替换成 $y+\dot{y}_o$；

第二步：用新得到的新方程减去原来的方程；

第三步：方程的两端同时除以 o；

第四步，在新方程中去掉所有带有 o 的项，即得到所求方程。

由此可以看出，牛顿给出的求曲线微分的方法是一个程序，是一套操作步骤。这套步骤，不仅清晰，而且次序性极强，不可随意调换。牛顿的微分方法中包含了明晰的数学机械化思想。

另外，牛顿于 1669 年担任剑桥大学三一学院卢卡斯数学教授一职，1689 年因出任英国皇家学会会员离开剑桥。这期间，其一直给剑桥大学的学生讲授数学。准确地说，主要是讲授代数学[11]。在其讲授的代数学中，关于多项式的因式分解，牛顿给出的方法是[12]：

首先，按照多项式其中一个字母的次幂从高到底进行排列；然后，用其一系列的算术级数的数值去替换这个字母，比如 3，2，0，−1，−2。将得到的数值和其因子放在一起，同时将因子的符号也列出来，

包括正的和负的。同时，将因子中与 3，2，1，0，−1，−2 顺序相同的因子从高到低也列出来。这些因子之间的差可以是 1，也可以能除以最高项的其他数字。这个数字与前面的 0 是相对应的，以此为分母，可以整除原多项式。

假设现有多项式 $x^3-x^2-10x+6$，用 1，0，−1 替换其中的 x 可以得到三个数值，即−4，6，+14。将这些数写出来，并在右侧写出与 1，0，−1 顺序相同的因子数 4，3，2，则得到如下列式：

$$\begin{array}{r|r|l|l} 1 & 4 & 1\cdot2\cdot4\cdot & +4\cdot \\ 0 & 6 & 1\cdot2\cdot3\cdot6 & +3\cdot \\ -1 & 14 & 1\cdot2\cdot7\cdot14 & +2\cdot \end{array}$$

因为最高次项 x^3 仅能被单位 1 整除，因此，可在众多因子中找出了间隔 1 的且是降序的三个数 4，3，2。其中+3 与前面序列中的 0 相对应，因此，可以尝试以 $x+3$ 为因子去除多项式，最后发现这是可以整除的，由此得到的商 x^2-4x+2。

假设有多项式是 $6y^4-y^3-21y^2+3y+20$，将字母 y 分别替换为 1，0，−1，则得到 7，20，9 三个数字。将他们的因子都列出来，则得到如下列式：

$$\begin{array}{r|r|l|r} 2 & 30 & 1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot10\cdot15\cdot30 & +10\cdot \\ 1 & 7 & 1\cdot7\cdot & +7\cdot \\ 0 & 20 & 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot10\cdot20 & +4\cdot \\ -1 & 31 & 1\cdot3\cdot & +1\cdot \\ -2 & 34 & 1\cdot2\cdot17\cdot34 & -2\cdot \end{array}$$

在所有的因子中，降序的三个数分别是 7，4，1。因为其间隔为 3，这个 3 能整除首相的系数 6。因此，用和前面的 0 对应的+4 除以间隔数 3，得除数 $y+\frac{4}{3}$，或 $3y+4$。相除，则得结果 $2y^3-3y^2-3y+5$。

由此可以看出，在牛顿的求多项式因子方法中也有明显的数学机械化思想。

其实，在牛顿讲授的代数学中，不仅有关于多项式因式分解的方法，而且还有关于代数式四则运算、乘方和开方的方法，还有关于几何问题如何转化为代数方程的方法和高次方程的求根方法等等[13]。这些方法，牛顿都是通过步骤和程序给出的，都给出的具体的求解例子和解法步骤图，都明显包含了的数学机械化思想。

还有，在 1692 年左右，牛顿还写成了关于曲线积分的一本书《曲线图形求积法》(Tractatus de Quadratura Curvarum)，详细说明了其求曲线积分的方法。仔细分析其求曲线积分的方法，其也是通过程序给出的[14]。其程序也有很强的次序性和不可随意调换的特点，也明显包含了数学机械化的思想。

3. 牛顿的数学机械化思想与中国古代数学机械化思想有异曲同工之妙

众所周知，中国古代数学有着明显的算法化倾向和机械化思想[15] [16] [17]。将中国古代数学中的机械化思想与牛顿的机械化思想相比较，可以发现，二者有着很大的相似性，特别是在传统数学内容方面，比如在开方算法方面。

中国古代用筹算进行开方运算，具体方法如下[18]：

开平方算法：置积为实。借一算步之，超一等。议所得，以一乘所借一算为法，而以除。除已，倍法为定法。其复除。折法而下。复置借算步之如初，以复议一乘之，所得副，以加定法，以除。以所得副从定法。复除折下如前。若开之不尽者为不可开，当以面命之。若实有分者，通分内子为定实。乃开之，讫，开其母报除。若母不可开者，又以母乘定实，乃开之，讫，令如母而一。

翻译成现代文，中国古代开方运算的步骤是：

第一步(分组，借 1)：将被开方数从右向左两位分为一组。借 1 为用，放置在开方数的下端最右侧。之后让 1 向左移动，每次移动 2 位。直到最左端。

第二步(求第一组的开根)：求出最左侧 1 上面的一组数的平方根整数部分，作为开根的第一位。

第三步(作差)：让这个数乘以 1 得 A，用 A 再乘以这个数，去减 1 上面的一组数。

第四步(补数)：平方根的整数部分再乘以 1，加到刚才的 A 上得 B。

第五步(退位)：数 B 向右退 1 位，下面的 1 退 2 位。

第六步(找开根的下一位)：估算 B 上方的数是 B 的多少倍，此数作为开根的下一位。

循环进行三至六步的步骤，即得。

若被开方数有分数，其分母是一个平方数，则直接开方，之后对分子开方。若分母不是一个平方数，则用如下公式：$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$。

开立方算法：置积为实。借一算步之，超二等。议所得，以再乘所借一算为法，而除之。除已，三之为定法。复除，折而下。以三乘所得数置中行。复借一算置下行。步之，中超一，下超二等。复置议，以一乘中，再乘下，皆副以加定法。以定法除。除已，倍下、并中从定法。复除，折下如前。开之不尽者，亦为不可开。若积有分者，通分内子为定实。定实乃开之，讫，开其母以报除。若母不可开者，又以母再乘定实，乃开之。讫，令如母而一。

翻译成现代文，中国古代开三次方的步骤是：

第一步(分组，借 1)：将被开方数从右向左三位分为一组。借 1 为用，放置在开方数的下端最右侧。之后让 1 向左移动，每次移动三位。直到最左端。

第二步(求第一组数的立方根)：之后求出最左侧 1 上面的一组数的立方根整数部分。

第三步(作差)：让这个数乘以 1 得 A，用 A 再乘以这个数得 B，再用 B 乘以这个数去减 1 上面的一组数。

第四步(补数)：之后立方根的整数部分再乘以 1，加到刚才的 A 上得 C，立方根的整数部分乘以 C 加到刚才的 B 上得 D。再用立方根的整数部分乘以 1 加到 A 上得 E。

第五步(退位)：之后数 D 向右退 1 位，数 E 向右退 2 位，下面的 1 退 3 位。

第六步(找立方根的下一位)：估算 E 上方的数是 E 的多少倍，此数作为立方根的下一位。

循环进行三至六步的步骤，即得。

若被开立方数有分数，其分母是一个立方数，则直接开立方，之后对分子开立方。如果分母不是一个立方数，则用如下公式：$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$。

牛顿给出的开平方法是：[12]首先，从个位起隔一个数字用点来标注一下数字。然后，写出第一个商或者根，使其平方等于或接近第一个用点标注的数字。之后，减去这个商的平方数，之后(通过求剩余的数里面有多少个两倍的前面的根)求第二个商，以此类推即可。

比如求 99,856 的平方根，首先标注这个数字，得到$\dot{9}9\dot{8}5\dot{6}$。之后，对 9 进行开方，得 3。把 3 写在商的位置上(注：牛顿给出的算式如图 1 所示)。然后，从第一个数字 9 中减去 3 × 3，即 9，得到 0。然后落下直到第二小点标注的数字 98，以进行后面的操作。不要看这里的 8，而是看这里的 9 中有多少个 3 的两倍，即 6，答案是 1。这样在商的位置写上 1。然后从 98 中减去 1 × 61，或 61，这样余 37。这个数字连接后面的两个数字，得到 3756。之后对这个数字进行后续计算。同样，不要看最后的数字 6，而是看前面的三位数字 375 中有多少个 31 的二倍，即 62，答案是 6。这样在商中写上 6。之后在 3756 中减去 6 × 626 即 3756，余数为 0。因此，根即是 316。

$$
\begin{array}{r}
\dot{9}9\dot{8}5\dot{6}(316 \\
9 \\
\hline
6)98 \\
61 \\
\hline
62)3756 \\
3756 \\
\hline
0
\end{array}
$$

Figure 1. Newton-on method
图 1. 牛顿开方法

牛顿给出的开立方法方法是：首先，对个位数用小点做一个标记，然后从个位起每三个数字用小点做一个标记；如果是开四次方、五次方和其他更高次方的话，则后面就每四位、五位等用小点做一个标记。然后从左侧逐次开相应的次方，直到将所有的组数都开完。

比如对 13,312,053 开三次方。首先用小点做标记，得到$1\dot{3}31\dot{2}05\dot{3}$ (注：牛顿给出的算式如图 2 所示。)。然后，在商中写上 2，因为 2 的 3 次方为 8，是最靠近第一组数 13 的数。用 13 减去 8 得 5。将这个 5 与后面一组数中的 3 联合，看 53 中有几个刚才的 2 的平方的三倍即 3 × 4 = 12？答案是 4。这样商的第二数字即是 4。但是，因为 24 的三次方是 13,824，大于 13,312，所以，这里应该是 3。在另外的地方算出 23 的平方 529，然后再乘以 23，得 12,167，从 13,312 中减去这个数，得到 1145.这个数加上后面一组数中的 0，除以 23 的平方的三倍，即看 11,450 中有几个 3 × 529 = 1587？答案是 7。这是商的第三位数字。求出商 237 的平方数 56,169，再乘以 237，得到 13,312,053。被开方数减去这个数正好为 0。所以所求的根为 237。

$$
\begin{array}{r}
1\dot{3}31\dot{2}05\dot{3}(237 \\
\textit{Subtract the Cube } 8 \\
12)\ \textit{rem.}\,53(4\ \textit{or}\ 3 \\
\hline
\textit{Subtract Cube } 12167 \\
1587)\ \textit{rem.}\,11450(7 \\
\hline
\textit{Subtract Cube } 13312053 \\
\mathrm{Re}\textit{mains } 0
\end{array}
$$

Figure 2. Newton's opening method
图 2. 牛顿开立方法

对比中国古代的开方方法与牛顿的开方方法，很明显可以看到尽管二者的细节不同，但其都有清楚的程序，其程序都具有很强的连贯性和测序性，都有循环迭代，都能按照次序顺利得到正确的结果，也都没有过程合理性的说明和证明。因此，牛顿在传统数学内容上的数学机械化思想和中国古代数学中的机械化思想有着很大的相似性。从求到结果角度来看，二者有着异曲同工之妙。

4. 牛顿的数学机械化思想比笛卡尔的数学机械化思想更加清晰

笛卡尔(René Descartes, 1596~1650)被誉为现代数学机械化的先驱，[5]原因是其在《几何学》(La Géométrie)中给出了一个关于将任何几何问题都转化为方程问题的方法，具体如下[19]：

第一步，将几何学算术化，即定义几何元素的算术运算规则，例如线段的加、减、乘、除。

第二步，将几何问题归结为代数方程。方法是求一个量的两种不同的表示方式，然后让两个式子相等，构成一个方程。当有多个方程时，通过消元法化成一个方程。

第三步，对最后得到的方程进行归类，并且用这一类固定的方法求解。

其给出的一个例子是：设 GL 是一条直尺，GL 可以绕 G 点转。(注：笛卡尔给出的图形如图 3 所示。)。其与可以沿着 KA 直线滑动的平面图形(三角形) $CNKL$ 相交于固定点 L 点。此时，GL 与 CNK 的交点为 C 点。当 L 点移动时，设 C 的轨迹为 EC。下讨论其方程。

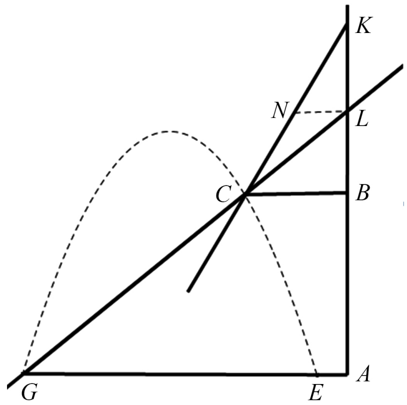

Figure 3. Cartesian geometry method
图 3. 笛卡尔几何方法

过 C 点做 CB 平行于 GA。令 CB 和 BA 这两个变量一个为 y 一个为 x。令 GA，KL，NL 这三个固定的量分别为 a，b，c。

因为 $NL:LK = CB:BK$，所以 $BK = \frac{b}{c}y$，

这样，$BL = \frac{b}{c}y - b$，$AL = x + \frac{b}{c}y - b$，

因为，$CB:LB = AG:LA$，所以，$\frac{ab}{c}y - ab = xy + \frac{b}{c}y^2 - by$。

这样就得到所求的方程：$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$。

在牛顿的数学中也有将几何问题转化为方程问题的做法，其做法为[12]：

令所求量为未知数，然后将几何问题中的关系表示出来即可得到想要的方程。比如线段 AB 被点 C 划分为等比例的三个线段(注：牛顿给出的图形见图 4)，其中一个为比例中项，两个为比例极项，也就是，最长线段的平方 BE 等于整个线段与最短线段的构成的矩形 BD 的面积；令 $AB = a$，$BC = x$，那么 $AC = a - x$，和 $x^2 = a$ 乘 $a - x$；通过化简得到了一个方程 $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{5}{4}aa}$。

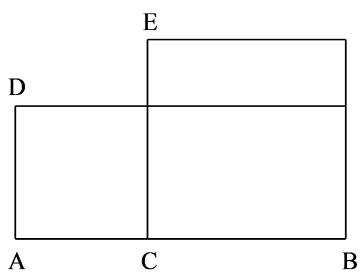

Figure 4. Newton's geometric method 1
图 4. 牛顿的几何方法 1

再比如，现有一等腰三角形 *CBD* 内接于一个圆(注：牛顿在这里给出的图形如图 5 所示)，它的边为 *BC*，*BD*，底为 *CD*，将它们与圆的直径 *AB* 做比较。这个问题可以表述为，通过所给的边和底求圆的直径，或者通过所给的边和直径求三角形的底边，或者通过所给的底边和直径求三角形的边；但是无论如何表述，这个问题都可以通过一系列的分析转化为方程，即：假设求圆的直径，令 $AB = x$， $CD = a$，BC 或 $BD = b$。由于三角形 *ABC* 和三角形 *CBE* 相似(连接 *AC*)，于是有 $AB : BC :: BC : BE$，或 $x : b :: b : BE$，得到 $BE = \frac{bb}{x}$。另外，$CE = \frac{1}{2}CD$ 或 $\frac{1}{2}a$；由于角 *CEB* 在右边，则有 $CEq + BEq = BCq$，也就是 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{x^2} = b^2$。化简这个方程，即可求得 x 的值。

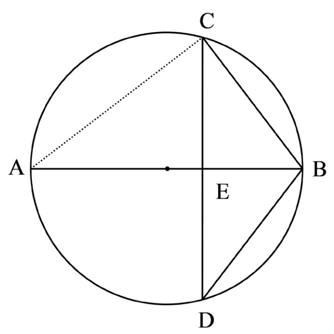

Figure 5. Newtonian geometry method 2
图 5. 牛顿几何方法 2

如果求三角形的底边，那么令 $AB = c$， $CD = x$，并且 BC 或 $BD = b$。由于三角形 *ABC* 和三角形 *CBE* 相似(连接 *AC*)，于是有 $AB : BC :: BC : BE$，或 $c : b :: b : BE$，得到 $BE = \frac{bb}{c}$。另外，$CE = \frac{1}{2}CD$ 或 $\frac{1}{2}x$。由于角 *CEB* 在右边，则有 $CEq + BEq = BCq$，即 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{b^4}{a^2} = b^2$。化简这个方程，即可求得 x 的值。

当求边 *BC* 和 *BD* 时，令 $AB = c$， $CD = a$， BC 或 $BD = x$。由于三角形 *ABC* 和三角形 *CBE* 相似(连接 *AC*)，于是有 $AB : BC :: BC : BE$，或 $c : x :: x : BE$，得到 $BE = \frac{xx}{c}$。另外，$CE = \frac{1}{2}CD$ 或 $\frac{1}{2}a$；由于角 *CEB* 在右边，则有 $CEq + BEq = BCq$，也就是 $\frac{1}{4}a^2 + \frac{b^4}{c^2} = x^2$。化简这个方程，即可求得 x 的值。

对比牛顿和笛卡尔的将几何问题转化为方程问题的方法，可以发现，牛顿的方法在策略性、程序性和步骤性上一点也不逊于笛卡尔的方法，并且，牛顿的方法明显更为简洁和迅捷。

另外，牛顿不仅有将几何问题转化为方程问题的做法，而且还有将一般的应用问题转化为方程问题的做法。牛顿的做法如下[12]：

首先思考一个命题或者句子的表述，思考他们是否将这些概念写成代数术语。如果可以，则给出已知量和未知量的名字；然后，将它们用代数语言表示出来。于是，实际问题就被转换为代数方程。

比如在连续比例式中有三个数字，它们的和是 20，它们的平方和为 140；令 *x*，*y* 和 *z* 是所求的三个数，则这个文字问题可以通过如表 1 中的步骤转化为方程。

Table 1. Algebra problem transformation equation problem 1
表 1. 代数问题转化方程问题 1

用文字表述的问题	用符号表述的相同问题
求满足如下条件的三个数：	x, y, z?

Continued

他们成连续比。	$x:y::y:z$，或 $xz=y^2$
它们的和为 20。	$x+y+z=20$
它们的平方和为 140。	$x^2+y^2+z^2=140$

再比如这样一个题：有一个商人每年使得自己的财产增长三分之一，同时，每年家用 100 钱。三年之后，他的财产实现了翻倍，问他有多少财产？

牛顿给出的列方程程序如表 2 所示。

由此可以看出，牛顿的数学机械化思想比笛卡尔的数学机械化思想更为简洁、方便和清晰，更加便于读者学习和掌握。

Table 2. Newton algebra problem transformed into equation problem 2
表 2. 牛顿代数问题转化为方程问题 2

用文字表述的问题	用.符号表述的相同问题
一个商人有财产……	$x.$
除去第一年的家用 100 钱。	$x-100.$
剩余的增加三分之一。	$x-100+\frac{x-100}{3}$ 或 $\frac{4x-400}{3}.$
第二年家用 100 钱……	$\frac{4x-400}{3}-100$ 或 $\frac{4x-700}{3}.$
再增加三分之一……	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}$ 或 $\frac{16x-2800}{9}.$
第三年家用 100 钱……	$\frac{16x-2800}{9}-100$ 或 $\frac{16x-3700}{9}.$
剩余的增加三分之一……	$\frac{16x-3700}{9}+\frac{16x-3700}{27}$ 或者 $\frac{64x-14800}{27}.$
财产是原来的两倍……	$\frac{64x-14800}{27}=2x.$

5. 结语

数学自产生以来，一直有两大思想深刻地影响着其发展方向和进程，一是公理化思想，二是数学机械化思想[20]。在中国古代，数学机械化思想始终占据着主导位置。在西方，自古希腊起，公理化思想几乎主导了所有数学分支的进程。但是，自文艺复兴时期开始，西方数学的某些方面也逐渐向着机械化的方向转变[21]。在这个过程中，法国著名数学家笛卡尔和德国著名数学家莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)是公认的西方数学机械化的先驱，[5]法国数学家嘉当(Henri Cartan, 1904~2008)借用代数拓扑同调群的研究工作给出了数学机械化的成功范例[22] [23]。其实，在这个过程中英国著名数学家牛顿也做出了重大贡献。牛顿生前进行过的数学研究很多，不仅有大家熟知的微积分研究，而且还有算术

方面、代数方面、几何方面、微分方程和级数等方面的研究。仔细分析牛顿在这些数学研究中给出的方法和结论，有很多都是通过次序性很强且应用简洁和正确的程序和步骤给出的，比如他给出的求流数的方法、开方的方法和求代数式因子的方法等等。其给出的这些程序和步骤，有些与中国古代数学的方法是类似的，从求得结果方面来看，其方法与中国古代的方法有异曲同工之妙。其给出的某些程序和步骤与当时其他数学家的程序与步骤相比较，比如与笛卡尔给出的几何问题转为代数方程的方法相比较，明显更为简洁和快捷，更能为读者所接受和应用。由此，牛顿的数学机械化思想在当时应当是更为明晰的、先进的和有实际应用价值的，牛顿应当是文艺复兴后期西方数学部分分支开始转向机械化发展倾向的最为有力的推动者之一，同笛卡尔和莱布尼兹一样，其也是当时西方数学机械化思想发展和实际应用的先驱。

参考文献

[1] 吴国盛. 科学的历程[M]. 长沙: 湖南科学技术出版社, 2018: 269-276.

[2] 丹皮尔 W.C. 科学史及其与哲学和宗教的关系·上册[M]. 李珩, 译. 北京: 商务印书馆, 1975: 217-255.

[3] 贝尔. 数学精英[M]. 徐源, 译. 北京: 商务印书馆, 1997: 102-133.

[4] Dunham, W. (1990) Journey through Genius. John Wiley & Sons, Inc., New York, 155-183.

[5] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想·第一册[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.

[6] 吴文俊. 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 1-6.

[7] 吴文俊. 吴文俊论数学机械化[M]. 济南: 山东教育出版社, 1996: 3-14.

[8] 卡尔·B·波耶. 微积分概念发展史[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2007: 121.

[9] 李文林. 数学史概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011: 157.

[10] Newton, I. (1736) Methodus Fluxionum et serierum Infinitarum. Henry Woodfall, London, 55-60.

[11] Westfull, R.S. (2010) Never at Rest: A Biography of Isaac Newton. Cambridge University Press, Cambridge, 105-237.

[12] Newton, I. (1720) Universal Arithmetick: A Treatise of Arithmetrcal Composition and Resolution. J. Senex, W. Taylor, London, 30-100.

[13] Newton, I. (1744) Isaaci Newtoni opuscula mathematica, philosophica et philologica. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, Lausannæ.

[14] Newton, I. (1762) Tractatus de Quadratura Curvarum. Upsalie, Astron.

[15] 中外数学简史编写组. 中国数学简史[M]. 济南: 山东教育出版社, 1986: 23.

[16] 吴文俊. 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 3-35.

[17] 郭书春. 中国传统数学与数学机械化[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2006(3): 1-9.

[18] 张苍. 九章算术[M]//任继愈. 中国科学技术典籍通汇(数学卷一). 郑州: 河南教育出版社, 1994: 98-214.

[19] 笛卡尔. 几何学[M]. 袁向东, 译, 武汉: 武汉出版社, 1992: 24-26.

[20] 高小山. 数学机械化进展综述[J]. 数学进展, 2001(5): 385-404.

[21] 吴文俊. 数学机械化研究回顾与展望[J]. 系统科学与数学, 2008(8): 898-904.

[22] 纪志刚. 吴文俊与数学机械化[J]. 上海交通大学学报(社会科学版), 2001(3): 13-18.

[23] 胡作玄, 邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南: 山东教育出版社, 1999: 379-442.