Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 875-880
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134092

形式级数域上Oppenheim连分数展式的一些算术性质

薛　文

重庆师范大学数学科学学院，重庆

收稿日期：2023年3月17日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘　要

本人出于对形式级数域上Engel连分数展式的算术性质和度量性质的学习和研究，而Engel连分数展式作为Oppenheim连分数展式的一个特例，考虑从特殊到一般的方法，在本文中，我们主要研究形式级数域上Oppenheim连分数展式的算术性质。主要结果包括该展式的有限性、收敛性和唯一性。本文的结论在Engel连分数展式，Sylvester连分数展式，正规连分数展式等这些特例中也成立，我们的结果更具有一般性和优越性，这有利于我们对形式级数域上的连分数展式有进一步的了解。

关键词

形式级数域，Oppenheim连分数展式，算术性质

Some Arithmetic Properties of Oppenheim Continued Fraction Expansion over the Field of Formal Series

Wen Xue

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: Mar. 17th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

I am interested in learning and researching the arithmetic and metric properties of Engel continued fraction expansions over formal series fields, the Engel continued fraction expansion is a special case of Oppenheim fraction expansion, consider the method of moving from specific to general, in this article, we mainly study the arithmetic properties of Oppenheim continued fraction expan-

文章引用: 薛文. 形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的一些算术性质[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 875-880.
DOI: 10.12677/pm.2023.134092

sions over formal series fields. The main results include the finiteness, convergence and uniqueness of the expansion, the conclusion of this paper also holds in the special cases of Engel continued fraction expansion, Sylvester continued fraction expansion and normal continued fraction expansion, our results are more general and superior, which is beneficial to our understanding of continued fraction expansions over formal series fields.

Keywords

The Field of Formal Series, Oppenheim Continued Fraction, Arithmetic Properties

1. 引言

实数有不同种类的表示，比如十进制展开，Engel 级数展开，Cantor 级数展开等等。此外，实数还可以展开成连分数的形式，研究较多的有 Engel 连分数展式，Sylvester 连分数展式，正规连分数展式等等，用这些展式去研究实数的算术性质和度量性质是一个非常有用的工具。在 2007 年 Fan，Wu [1]考虑了一种依赖于参函数的连分数展式，即 Oppenheim 连分数展式，它是正规连分数展式和 Enegl 连分数展式在形式上的推广，如果对参函数做适当的假设，那么也可以得到其它连分数展式的性质。对于实数域上连分数展式的性质，人们已经取得了很多结果，最早工作是由 Jarnik [2]开展的，关于简单连分数的展开的度量性质和算术性质，在 Khinchine [3]专著中有详细的记载。后来一些数学家们就尝试着将实数域中连分数的一些性质推广到级数域中去，早在 1924 年，Artin [4]就发现在实数域中的连分数展式可以推广到级数域中去，H. Niederreiter [5]模仿了实数域中连分数展式中的一些度量性质，把简单连分数展式在实数域上的 Borel-Bernstein 定理推广到级数域中去，与此同时，他还证明了变换 T 的遍历性质。M. Fuchs [6]证明了在形式级数域上 Khintchine 定理和 Hurwitz 定理。在文献[7]中，吴军等人还把 I. G. Good 的结果推广到了形式级数域中并且还给出了形式级数域上简单连分数展式。

本文基于简单连分数展式是 Oppenheim 连分数展式的特例之一，而且简单连分数展式在实数域上的相关性质可以推广到级数域中去，考虑从特殊到一般的方法，本文将研究形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的一些算术性质，相较于 Enegl 连分数展式，Sylvester 连分数展等这些特殊的连分数展式，文中的结论在这些展式中的结论也成立，说明我们的结果更具有一般性和优越性。

本文一共分为引言、预备知识、主要结果以及参考文献四个部分。

在第一部分引言中，我们主要介绍了一些特殊的展式，通过这些特殊的展式人们引进了 Oppenheim 连分数展式并且还考虑将一些特殊的连分数展式的性质从实数域上推广到级数域中去；第二部分是预备知识，我们简单介绍了形式级数域的一些基本知识和一些定义，并且给出了形式级数域 Oppenheim 连分数展式；第三部分我们将给出并证明我们的主要结果，主要包括形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的有限性，收敛性以及唯一性；最后一部分是相关的参考文献

2. 预备知识

2.1. 形式级数域的基本知识

记 $\mathbb{F}_q$ 是具有 q 个元素的有限域，这里 q 是某个素数 p 的整数次幂形式，$\mathbb{F}_q[z]$ 表示系数在 $\mathbb{F}_q$ 的多项

式，$\mathbb{F}_q(z)$ 是 $\mathbb{F}_q[z]$ 的分式域，用 $\mathbb{F}_q((z^{-1}))$ 表示以 x 为元素所构成的形式级数域。这里 $x=\sum_{n=\nu}^{\infty}c_nz^{-n}$，$n\in\mathbb{Z}$，$c_n$ 属于给定的 $\mathbb{F}_q$。对于上述的 x，假设 $c_\nu\neq 0$，那么称 $\nu=\nu(x)$ 为 x 的次数，定义 x 的次数为 $\deg(x)=-\inf\{n\in\mathbb{Z}:c_n\neq 0\}$，我们约定 $\deg(0)=-\infty$，在 $\mathbb{F}_q((z^{-1}))$ 定义欧几里得范数 $\|x\|=q^{\deg x}$，记 $B(a,r)=\left\{x\in\mathbb{F}_q((z^{-1})):\|x-a\|\leq r\right\}$ 为中心在 a 半径为 r 的圆盘，则 $\mathbb{F}_q((z^{-1}))$ 在度量 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 下构成一个局部紧的完备空间，记 $I=\left\{x\in\mathbb{F}_q((z^{-1})):\|x\|<1\right\}$。对于每一个 $x=\sum_{n=\nu}^{\infty}c_nz^{-n}$，称 $[x]=\sum_{\nu\leq n\leq 0}c_nz^{-n}$ 为 x 的多项式部分，容易看到，如果 $\nu\leq 0$，那么 $-\nu(x):=-\nu$ 就与多项式 $[x]$ 的度(即 $\deg x$)等价。

下面我们将介绍形式级数域上 Oppenheim 连分数展式。

2.2. 级数域上 Oppenheim 连分数展式

对于任意 $x\in\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^{-n}\in\mathbb{F}_q((z^{-1}))$，$d_n(x)\in\mathbb{F}_q[z]$，根据 x，定义一个有限或者无限的形式级数序列 $\{x_n\}$，假设 $x_n(n\geq 1)$ 已经被定义好，$x_n\neq 0$，定义 $d_n(x)=d_n$ 并定义如下算法

$$x_1=x,\quad d_n(x)=\left[\frac{1}{x_n}\right],\quad x_{n+1}=\frac{1}{h_n(d_n(x))}\left(\frac{1}{x_n}-d_n(x)\right)\tag{2.2.1}$$

其中 $h_n(d_n(x))$ 表示 $d_n(x)$ 所对应的多项式组合，通过上述算法，我们有

$$x=\cfrac{1}{d_1(x)+\cfrac{h_1(d_1(x))}{d_2(x)+\cdots+\cfrac{h_{n-1}(d_{n-1}(x))}{d_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}}}}:=\left[0;d_1(x),d_2(x),\cdots,d_n(x)\right]\tag{2.2.2}$$

这里 $\deg d_{n+1}(x)\geq\deg h_n(d_n(x))+1$，$n\geq 1$。

我们可以例举出形式级数上 Oppenheim 连分数展式的一些特例：

正规连分数展式：$h_n(d_n(x))=1$；

Engel 连分数展式：$h_n(d_n(x))=d_n(x)$；

Sylvester 连分数展式：$h_n(d_n(x))=d_n(x)(d_n(x)-1)+1$。

接下来，我们将给出我们的一些结果以及证明过程，即形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的算术性质。

3. 主要结果及其证明过程

我们称一个级数 $x\in I$ 有有限连分数展式，如果存在正整数 $n\geq 1$，使得 $x_n=0$ 成立。下面这个定理就体现了形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的有理特征。

1) 定理一： $x\in I$ 有有限连分数展式当且仅当 $x\in\mathbb{F}_q(z)$

证明：由 x 在(2.2.2)中的展式容易知道必要性是显然的。因此我们只需要证明充分性。

令 $x=\dfrac{r(z)}{s(z)}\in\mathbb{F}(z)$，这里 $r(z)$，$s(z)$，$s(z)\neq 0$ 是 $\mathbb{F}_q[z]$ 中的多项式，那么通过算法(2.2.1)，我们有

$$\begin{aligned}x_2&=\frac{1}{h_1(d_1(x))}\left(\frac{1}{x_1}-d_1(x)\right)\\&=\frac{1}{h_1(d_1(x))}\left(\frac{s(z)}{r(z)}-d_1(x)\right)\\&=\frac{s(z)-r(z)d_1(x)}{h_1(d_1(x))r(z)}:=\frac{r^{(1)}(z)}{s^{(1)}(z)}\end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{s(z)}{r(z)}=d_1(x)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{-k} \Rightarrow s(z)=r(z)d_1(x)+r(z)\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{-k}$，

这意味着 $\deg r^{(1)}(z)=\deg\left(s(z)-r(z)d_1(x)\right)\le \deg r(z)-1$，

现在令 $x_{j+1}=\dfrac{r^j(z)}{s^j(z)}$， $j=1,2,\cdots$，那么，

$$-\infty<\cdots<\deg r^j(z)<\cdots<\deg r(z)$$

因此 $\deg r^j(z)\in N\cup\{0\}\cup\{-\infty\}$，即存在正整数 $n\ge 1$，使得 $x_n=0$，证毕。

在本文接下来的部分中，形式级数域上 Oppenheim 连分数展式由(2.2.1)，(2.2.2)两式给出，我们用 $\{p_n/q_n, n\ge 0\}$ 表示 x 的 n 阶收敛，即

$$\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=\cfrac{1}{d_1(x)+\cfrac{h_1(d_1(x))}{d_2(x)+\cdots+\cfrac{h_{n-1}(d_{n-1}(x))}{d_n(x)}}}:=\left[0;d_1(x),d_2(x),\cdots,d_n(x)\right]$$

对于形式级数域上 Oppenheim 连分数展式我们做出如下规定，由于它与实数域中的一般连分数展式具有类似性，这里证明我们就省略了，只给出结果。

规定： $p_0(x)=0$， $q_0(x)=1$； $p_1(x)=1$， $q_1(x)=d_1(x)$，那么有

$$p_n(x)=d_n(x)p_{n-1}(x)+h_{n-1}(d_{n-1}(x))p_{n-2}(x),\quad n\ge 2 \tag{2.2.3}$$

$$q_n(x)=d_n(x)q_{n-1}(x)+h_{n-1}(d_{n-1}(x))q_{n-2}(x),\quad n\ge 2 \tag{2.2.4}$$

从而

$$p_n(x)q_{n-1}(x)-p_{n-1}(x)q_n(x)=(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}h_j(d_j(x)) \tag{2.2.5}$$

通过上式，我们知道收敛的序列收敛于它所生成的形式级数，由如下定理所示

2) 定理二：对于任意 $x\in I$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=x$$

证明：如果 $x\in\mathbb{F}_q(z)$，通过(2.2.2)可直接得出结论。下面考虑 $x\notin\mathbb{F}_q(z)$ 的情况，对于任意 $n\ge 1$，结合(2.2.3)，(2.2.4)，有

$$x=\frac{p_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}p_{n-1}(x)}{q_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}q_{n-1}(x)}$$

然后通过等式(2.2.5)

$$\begin{aligned}x-\frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)}&=\frac{p_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}p_{n-1}(x)}{q_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}q_{n-1}(x)}-\frac{p_{n-1}(x)}{q_{n-1}(x)}\\&=\frac{(-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}h_j(d_j(x))}{q_{n-1}(x)\left(q_n(x)+h_n(d_n(x))x_{n+1}q_{n-1}(x)\right)}\end{aligned}$$

由(2.2.3)以及(2.2.4)，易知

$$\deg p_n(x)=\deg\left(d_n(x)p_{n-1}(x)\right)=\sum_{j=2}^{n}\deg d_j(x) \tag{2.2.7}$$

$$\deg q_n(x)=\deg\left(d_n(x)q_{n-1}(x)\right)=\sum_{j=1}^{n}\deg d_j(x) \tag{2.2.8}$$

因此通过条件 $\deg d_{n+1}\geq\deg h_n(d_n)+1$，我们有

$$\begin{aligned}\left\|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right\| &= q^{\sum_{j=1}^{n-1}\deg h_j(d_j(x))-\deg q_{n-1}(x)-\deg q_n(x)} \leq q^{\sum_{j=1}^{n-1}\deg d_{j+1}(x)-\sum_{j=1}^{n-1}\deg d_j(x)-\sum_{j=1}^{n}\deg d_j(x)} \\ &= q^{-\sum_{j=1}^{n-1}\deg d_j(x)-\deg d_1(x)} \leq q^{-n}\to 0,\end{aligned}$$

当 $n\to\infty$，证毕。

下面的这个定理将说明级数域上 Oppenheim 连分数展式是唯一的。

3) 定理三： 对于任意的 $1\leq j\leq n$，存在 $x\in I$ 使得 $d_j(x)=d_j$，那么 $\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$ 收敛于某个 $x\in I$，且对于任意 $n\geq 1$，有 $d_n(x)=d_n$ 成立。

证明：由(2.2.5)，(2.2.7)，(2.2.8)可知

$$\left\|\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right\|\leq q^{-n}$$

由于 $\mathbb{F}_q\left(\left(z^{-1}\right)\right)$ 是非阿基米德的，所以 $\frac{p_n}{q_n}$ 收敛于某个 $x\in\mathbb{F}_q\left(\left(z^{-1}\right)\right)$，通过(2.2.7)，(2.2.8)，对于任意 $n\geq 1$，有 $\left\|\frac{p_n}{q_n}\right\|=q^{-\deg d_1}\leq 1$，因此 $x\in I$。

现在

$$\frac{p_n}{q_n}=[0;d_1,d_2,\cdots,d_n]=\cfrac{1}{d_1+\cfrac{h_1(d_1)}{d_2+\cdots+\cfrac{h_{n-1}(d_{n-1})}{d_n}}} \tag{2.2.9}$$

运用上述相同的证明方法，假设

$$[0;d_2,d_3,\cdots,d_n]=\cfrac{1}{d_2+\cfrac{h_1(d_1)}{d_3(x)+\cdots+\cfrac{h_{n-1}(d_{n-1})}{d_n}}}\to x'\in I, n\to\infty$$

那么 $-\deg x'=\deg d_2\geq\deg h_1(d_1)+1$，这就意味着 $h_1(d_1)x'\in I$，在(2.2.9)中，当 n 趋于无穷时，我们可以发现

$$x=\frac{1}{d_1+h_1(d_1)x'},$$

为此 $\frac{1}{x}-d_1=h_1(d_1)x'\in I$。

因此 $\left[\frac{1}{x}\right]=d_1$ *i.e.* $d_1(x)=d_1$，重复上述的方法可以得到 $d_2(x)=d_2$，通过归纳，可以得出对于任意

的 $n \geq 1$， $d_n(x) = d_n$ 成立，证毕。

4. 结论与展望

本文结合实数域上 Oppenheim 连分数展式的相关知识，将其推广到了级数域中。相较于其它文献，本文的主要优点是本文的结论作为一般的结果，把其它特殊的连分数展式的结果应用到我们这里，其结果也成立，所以本文的研究结果更具有一般性。本文研究了形式级数域 Oppenheim 连分数展式的算术性质，除了在形式级数域上研究，是否还可以推广到其它的级数域中？其算术性质是否可以用类似的方法解决？得到的结论是否和本论文的结论类似？这些都值得研究。

本文只考虑了形式级数域上 Oppenheim 连分数展式的算术性质，关于其 Hausdorff 维数和例外集的相关问题还有待解决。

参考文献

[1] Fan, A.H., Wang, B.W. and Wu, J. (2007) Arithmetic and Metric Properties of Oppenheim Continued Fraction Expansion. *Journal of Number Theory*, **127**, 64-82. https://doi.org/10.1016/j.jnt.2006.12.016

[2] Jarnik, V. (1929) Zurmetrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Pracematematyczno-Fizyczne*, **36**, 91-106.

[3] Khintchine, A.Y. and Teichmann, T. (1964) Continued Fractions. *Physics Today*, **17**, 70-71.

[4] Artin, E. (1924) Quadratische Korper in Gebiete der hoheren Kongruenzen. I. *Mathematische Zeitschrift*, **19**, 153-246. https://doi.org/10.1007/BF01181074

[5] Niederreiter, H. (1998) The Probabilistic Theory of Linear Complexity. *Advances in Cryptology-EUROCRYPT* 88, **330**, 191-209. https://doi.org/10.1007/3-540-45961-8_17

[6] Fuchs, M. (2002) On metric Diophantine Approximation in the Field of Formal Laurent Series. *Finite Fields and Their Applications*, **8**, 343-368. https://doi.org/10.1006/ffta.2001.0346

[7] Hu, X.H., Wang, B.W., Wu, J. and Yu, T.L. (2008) Cantor Sets Determined by Partial Quotients of Continued Fractions of Laurent Series. *Finite Fields and Their Applications*, **14**, 417-437. https://doi.org/10.1016/j.ffa.2007.04.002