

# 打靶法在分数阶微分方程边值问题中的一些应用

陈 辰

武汉数字工程研究所, 湖北 武汉

收稿日期: 2023年3月18日; 录用日期: 2023年4月19日; 发布日期: 2023年4月26日

## 摘 要

本文利用打靶法研究了一类分数阶非线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}_0D_t^\theta y(t)), t \in [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

的可解性。其中  $f: [0, 1] \times R^2 \rightarrow R$  连续,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \theta \leq \alpha - 1$ ,  ${}_0D_t^\alpha y(t)$  表示标准的Riemann-Liouville型导数。当  $f: [0, 1] \times R^2 \rightarrow R$  在假设下, 满足初始条件的解的唯一性和全局存在性时, 则相应的边值问题也至少存在一个解。

## 关键词

分数阶微分方程, 边值问题, 初值问题, 打靶法

# Some Applications of Shooting Method in Boundary Value Problem of Fractional Differential Equation

Chen Chen

Wuhan Institute of Digital Engineering, Wuhan Hubei

Received: Mar. 18<sup>th</sup>, 2023; accepted: Apr. 19<sup>th</sup>, 2023; published: Apr. 26<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

In this paper, we use the shooting method to study the solvability of boundary value problem for

fractional differential equation.

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}_0D_t^\theta y(t)), t \in [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

where  $f : [0, 1] \times R^2 \rightarrow R$  is continuous,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \theta \leq \alpha - 1$ ,  ${}_0D_t^\alpha y(t)$  is the Riemann-Liouville fractional derivative of  $y(t)$ . If the uniqueness and global existence of solutions satisfying the initial conditions are assumed, then there is at least one solution to the corresponding boundary value problem.

### Keywords

Fractional Differential Equation, Boundary Value Problems, Initial Value Problem, Shooting Method

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

大量事实证明，分数阶微分方程模型在描述复杂的物理、生物问题时更具有实际意义[1] [2] [3]。因此，近年来越来越多的专家学者对分数阶微分方程问题给予讨论，见文献[4] [5] [6] [7] [8]。其中常用的研究方法有，锥上的不动点定理、上下解方法等见文献[9]-[13]。而打靶法[14]是微分方程数值解中的常用方法，其基本思想是将微分方程边值问题转化为初值问题进行求解，文献[15]运用压缩映射原理，研究了分数阶两点边值问题解的存在唯一性，并设计打靶法给出了数值解。而本文试图结合分数阶微分方程初值问题的相关理论和打靶法的基本思想，研究下面边值问题

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}_0D_t^\theta y(t)), t \in [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的可解性。其中  $f : [0, 1] \times R^2 \rightarrow R$  连续， $1 < \alpha \leq 2$ ， $0 < \theta \leq \alpha - 1$ ， ${}_0D_t^\alpha y(t)$  表示标准的 Riemann-Liouville 型导数。文章的主要结构为：在第二部分中给出分数阶微分方程的相关概念；最后在第三部分将会给出主要定理的证明。

## 2. 预备知识

定义 2.1 [15] 函数  $f : (a, \infty) \times R^2 \rightarrow R$  的  $\alpha$  阶 Riemann-Liouville 型分数阶积分为：

$${}_0I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

其中  $\alpha > 0$ ， $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数。

定义 2.2 [15] 函数  $f : (a, \infty) \times R^2 \rightarrow R$  的  $\alpha$  阶 Riemann-Liouville 型导数

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

其中  $\alpha > 0$ ,  $\Gamma(\cdot)$  为 Gamma 函数,  $n = [\alpha] + 1$ 。

引理 2.1 [15] 设  $n-1 < \alpha \leq n$ ,  $f(t)$  在  $[a, b]$  上的  $n$  阶导数连续, 则有:

$${}_a D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t), \forall \alpha > 0.$$

引理 2.2 [15] 令  $\alpha > 0$ ,  $n-1 < \alpha \leq n$ 。  $f(t)$  在  $[a, b]$  上的  $n$  阶导数连续, 则有:

$${}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$$

引理 2.3 [4] (Banach 压缩映射原理) 设  $(X, \rho)$  是完备的度量空间。  $T: X \rightarrow X$  为压缩映射, 那么映射  $T$  在  $X$  内有且只有一个不动点  $X^*$ 。

### 3. 主要结果及其证明

首先我们考察初值问题

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha y(t) = f(t, y(t), {}_0 D_t^\theta y(t)), t \in [0, 1], \\ {}_0 D_t^{\alpha-1} y(t)|_{t=0} = \zeta, {}_0 D_t^{\alpha-2} y(t)|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  连续,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \theta \leq \alpha - 1$ 。

定理 3.1 (解的存在唯一性) 设  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  连续, 并且满足 Lipschitz 条件

$$|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)| \leq K|x_1 - x_2| + L|y_1 - y_2|$$

则当  $L + K < \Gamma(\alpha - \theta + 1)$  时, 初值问题(2)有唯一解。

证明: 定义算子  $T: P \rightarrow P$  如下:

$$Ty(t) = \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0 D_s^\theta y(s)) ds.$$

其中  $P = \{y(t) | y(t) \in C[0, 1], {}_0 D_t^\alpha y(t) \in C[0, 1]\}$ , 范数  $\|y(t)\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{K|y(t)| + L|{}_0 D_t^\theta y(t)|\}$ 。由引理 2.2 可知, 分数阶微分方程初值问题(2)的解就等价于算子  $T$  的不动点。

下面证明  $T: P \rightarrow P$  为压缩映射。对  $\forall x(t), y(t) \in P$ , 有

$$\begin{aligned} |Ty(t) - Tx(t)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0 D_s^\theta y(s)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), {}_0 D_s^\theta x(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s), {}_0 D_s^\theta y(s)) - f(s, x(s), {}_0 D_s^\theta x(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (K|y(s) - x(s)| + L|{}_0 D_t^\theta y(s) - {}_0 D_t^\theta x(s)|) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \|y(t) - x(t)\| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|y(t) - x(t)\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| {}_0D_t^\theta Ty(t) - {}_0D_t^\theta Tx(t) \right| \\
 &= \left| {}_0D_t^\theta \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s), {}_0D_s^\theta x(s)) ds \right) \right\} \right| \\
 &= \left| {}_0D_t^\theta {}_0I_t^\alpha \left\{ f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) - f(s, x(s), {}_0D_s^\theta x(s)) \right\} \right| \\
 &= \left| {}_0I_t^{\alpha-\theta} \left\{ f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) - f(s, x(s), {}_0D_s^\theta x(s)) \right\} \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\theta-1} \left\{ f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) - f(s, x(s), {}_0D_s^\theta x(s)) \right\} ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\theta-1} \left| f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) - f(s, x(s), {}_0D_s^\theta x(s)) \right| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\theta-1} ds \|y(t) - x(t)\| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta+1)} \|y(t) - x(t)\|,
 \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 \|Ty(t) - Tx(t)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \left\{ K \|Ty(t) - Tx(t)\| + L \left| {}_0D_t^\theta Ty(t) - {}_0D_t^\theta Tx(t) \right| \right\} \\
 &\leq \left( \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha-\theta+1)} \right) \|y(t) - x(t)\| \leq \frac{K+L}{\Gamma(\alpha-\theta+1)} \|y(t) - x(t)\|.
 \end{aligned}$$

因此当  $K+L \leq \Gamma(\alpha-\theta+1)$  时  $\frac{K+L}{\Gamma(\alpha-\theta+1)} < 1$ 。即  $T$  为压缩映射。从而由引理 2.3 可知，算子  $T$  存在唯一

不动点  $y^* \in P$ ，此不动点即为分数阶微分方程初值问题(2)的局部唯一解。下面将证这个唯一解可延拓到整个  $[0,1]$  区间。

定理 3.2 (解的延展性) 设定理 3.1 的条件成立，且存在常数  $M > 0$ ，使得

$$|f(t, x, y)| < M, \forall (t, x, y) \in [0,1] \times R^2.$$

则初值问题(2)的解的极大存在区间为  $[0,1]$ 。

证明 不妨设  $y(t)$  的极大存在区间是  $I = [0, T]$ ， $T < 1$ ，由定理 3.1 可知：

$$y(t) = \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds.$$

则对  $\forall \varepsilon$ ， $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ，对  $\forall t_1, t_2 \in (T-\delta, T)$ ，令  $t_1 < t_2$

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{\alpha-1} y(t) &= {}_0D_t^{\alpha-1} \left\{ \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds \right\} \\
 &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} {}_0D_t^{\alpha-1} t^{\alpha-1} + {}_0D_t^{\alpha-1} {}_0I_t^\alpha f(t, y(t), {}_0D_t^\theta y(t)) \\
 &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha+\theta)} + {}_0I_t^1 f(t, y(t), {}_0D_t^\theta y(t)) \\
 &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha+\theta)} + \int_0^t f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| {}_0D_t^{\alpha-1}y(t_2) - {}_0D_t^{\alpha-1}y(t_1) \right| &= \left| \int_0^{t_2} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds - \int_0^{t_1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s))| ds \\ &\leq M |t_2 - t_1| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

因此  $\lim_{t \rightarrow T^-} {}_0D_t^{\alpha-1}y(t)$  存在, 记为  $\xi^*$ 。

再由定理 3.1 可知, 初值问题

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t), {}_0D_t^\theta x(t)), t \in [0, 1], \\ {}_0D_t^{\alpha-1}x(t)|_{t=T} = \xi^*, {}_0D_t^{\alpha-2}y(t)|_{t=T} = 0 \end{cases}$$

在  $[T, T+h]$  上有唯一解, 则初值问题(2)的解  $y(t)$  可以延展到  $[0, T+h]$  上, 这与  $y(t)$  的极大存在区间为  $[0, T]$  矛盾。故  $y(t)$  的极大存在区间是  $[0, 1]$ 。

定理 3.3 (解对初值的连续依赖性) 设定理 3.1 的条件成立,  $y(t, \zeta)$  是初值问题(2)的解, 它在区间  $[0, 1]$  上有定义, 那么对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta$ , 使得当

$$|\zeta - \zeta_1| < \delta$$

时, 问题(2)满足  ${}_0D_t^{\alpha-1}|_{t=0} = \zeta_1$  的解  $y(t, \zeta_1)$  在区间  $[0, 1]$  上有也定义, 并且

$$\|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)\| < \varepsilon, 0 \leq t \leq 1.$$

证明 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{G}$ , 其中  $G = \frac{\frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha+\theta)}}{1 - \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{L}{\Gamma(\alpha-\theta+1)}}$ , 则当  $|\zeta - \zeta_1| < \delta$  时有:

$$\begin{aligned} &|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)| \\ &= \left| \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\zeta - \zeta_1) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \{ f(s, y(s, \zeta), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta)) - f(s, y(s, \zeta_1), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1)) \} ds \right| \\ &\leq \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\zeta - \zeta_1| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s, \zeta), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta)) - f(s, y(s, \zeta_1), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1))| ds \\ &\leq \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} |\zeta - \zeta_1| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (K|y(s, \zeta) - y(s, \zeta_1)| + L|{}_0D_s^\theta y(s, \zeta) - {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1)|) ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} |\zeta - \zeta_1| + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)\|, \\ &|{}_0D_t^\theta y(t, \zeta) - {}_0D_t^\theta y(t, \zeta_1)| \\ &= \left| \frac{\zeta - \zeta_1}{\Gamma(\alpha)} {}_0D_t^\theta t^{\alpha-1} + {}_0I_t^{\alpha-\theta} \{ f(s, y(s, \zeta), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta)) - f(s, y(s, \zeta_1), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1)) \} \right| \\ &\leq \frac{|\zeta - \zeta_1|}{\Gamma(\alpha+\theta)} t^{\alpha-\theta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\theta-1} |f(s, y(s, \zeta), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta)) - f(s, y(s, \zeta_1), {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1))| ds \\ &\leq \frac{|\zeta - \zeta_1|}{\Gamma(\alpha+\theta)} t^{\alpha-\theta-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\theta-1} (K|y(s, \zeta) - y(s, \zeta_1)| + L|{}_0D_s^\theta y(s, \zeta) - {}_0D_s^\theta y(s, \zeta_1)|) ds \\ &\leq \frac{|\zeta - \zeta_1|}{\Gamma(\alpha+\theta)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\theta+1)} \|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)\|. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \{K|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)| + L|{}_0D_t^\theta y(t, \zeta) - {}_0D_t^\theta y(t, \zeta_1)|\} \\ &\leq \frac{K|\zeta - \zeta_1|}{\Gamma(\alpha)} + \frac{L|\zeta - \zeta_1|}{\Gamma(\alpha + \theta)} + \left( \frac{K}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha + \theta)} \right) \|y(t, \zeta) - y(t, \zeta_1)\| \\ &\leq \frac{\frac{K}{\Gamma(\alpha)} + \frac{L}{\Gamma(\alpha + \theta)}}{1 - \frac{K}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{L}{\Gamma(\alpha + \theta)}} |\zeta - \zeta_1| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

成立，所以解  $y(t)$  关于初值  $\zeta$  连续。

定理 3.4 设定理 3.1-3.2 的条件成立，则边值问题(1)在  $P$  中至少存在一个解。

证明 记初值问题(1)的解为  $y(t, \zeta)$ ，根据定理 3.2 可知， $y(t, \zeta)$  在  $[0, 1]$  上唯一存在。并有

$$\begin{aligned} y(t, \zeta) &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds \\ &\geq \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} - \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \end{aligned}$$

特别的当  $t=1$  时有： $y(1, \zeta) \geq \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} - \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}$ 。对充分大的  $\zeta = \zeta_1$ ，可以使得  $y(1, \zeta_1) > 0$ 。

另一方面，

$$\begin{aligned} y(t, \zeta) &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s), {}_0D_s^\theta y(s)) ds \\ &\leq \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \end{aligned}$$

特别的当  $t=1$  时有： $y(1, \zeta) \leq \frac{\zeta}{\Gamma(\alpha)} + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)}$ 。对绝对值充分大的  $\zeta = \zeta_2$ ，可以使得  $y(1, \zeta_2) < 0$ 。

由定理 3.3 可知， $y(t, \zeta)$  是  $\zeta$  的一个连续函数，所以至少存在一个  $\zeta^*$  使  $y(t, \zeta^*) = 0$ ，此时初值问题(1)的解  $y(t, \zeta^*)$  也就是所求边值问题(1)的解。

用打靶法解分数阶两点边值问题(1)的具体计算过程如下：

步骤 1：选取初值  $\zeta^0$  和迭代精度  $\varepsilon$ 。

步骤 2：通过解分数阶初值问题(2)，其中  ${}_0D_t^{\alpha-1} y(t)|_{t=0} = \zeta^k, (k=0, 1, 2, \dots)$ ，得到  $y(t, \zeta^k)$ ，若  $y(b, \zeta^k) = 0$ ，则  $y(t, \zeta^k)$  就是问题(1)的解。一般情况下  $y(b, \zeta^k) \neq 0$ ，则记  $\phi(\zeta) := y(b, \zeta)$ ，从初值逼近  $\zeta^0$  开始，得到  $\zeta^k$  如下

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k - \frac{\phi(\zeta^k)}{\Delta\phi(\zeta^k)}, k=0, 1, 2, \dots$$

步骤 3: 重复第二步, 直至  $|\zeta^{k+1} - \zeta^k| < \varepsilon$ 。并将最后的  $\zeta^{k+1}$  记作  $\zeta^*$ 。

步骤 4: 最后通过解分数阶初值问题(2), 其中  ${}_0D_t^{\alpha-1}y(t)|_{t=0} = \zeta^*, (k=0,1,2,\dots)$ , 得到  $y(t, \zeta^*)$ 。即为边值问题(1)的解。

## 参考文献

- [1] Lakshmikantham, V. and Vatsala, A.S. (2008) Basic Theory of Fractional Differential Equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **69**, 2677-2682. <https://doi.org/10.1016/j.na.2007.08.042>
- [2] Che, J., Li, Q. and Wei, Z. (2010) Initial Value Problems for Fractional Differential Equations Involving Riemann-Liouville Sequential Fractional Derivative. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **367**, 260-272. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.023>
- [3] Cheng, Y., Zhu, G. and Marichev, O.I. (2015) Existence of Solutions to Fractional Differential Equations. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, **310**, 26-29.
- [4] Cheng, Q.X. (2003) Basis of Real Variable Function and Functional Analysis. Higher Education Press, Beijing.
- [5] Chen, P.Y., Yang, J. and Zhang, S.B. (2018) Application of Power Compression Mapping Principle in Fractional Ordinary Differential Equations. *College Mathematics*, **34**, 84-88.
- [6] Samko, S.G. and Kibas, A.A. (1993) Fractional Integrals and Derivatives. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon.
- [7] Abdeljawad, T. (2015) On Conformable Fractional Calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **279**, 57-66. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.10.016>
- [8] Khalil, R., Al Horani, M. and Torres, D.F.M. (2014) A New Definition of Fractional Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **264**, 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>
- [9] Benchohra, M., Henderson, J., Ntouyas, S.K. and Ouahab, A. (2008) Existence Results for Fractional Functional Differential Inclusions with Infinite Delay and Application to Control Theory. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **11**, 35-56.
- [10] Wang, J., Zhou, Y., Wei, W. and Xu, H. (2011) Nonlocal Problems for Fractional Integrodifferential Equations via Fractional Operators and Optimal Controls. *Computers & Mathematics with Applications*, **62**, 1427-1441. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.02.040>
- [11] Granas, A. and Dugundji, J. (2003) Fixed Point Theory. In: *Springer Monographs in Mathematics*, Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8>
- [12] Jia, M. and Liu, X.P. (2014) Multiplicity of Solutions for Integral Boundary Value Problems of Fractional Differential Equations with Upper and Lower Solutions. *Applied Mathematics and Computation*, **232**, 313-323. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.01.073>
- [13] Rehman, M., Ali Khan, R. and Asif, N.A. (2022) Three Point Boundary Value Problems for Nonlinear Fractional Differential Equations. *Acta Mathematica Scientia*, **31**, 1337-1346. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(11\)60320-2](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60320-2)
- [14] Baily, P.B., Shampine, L.F. and Waltman, P.E. (1968) Non-Linear Two-Point Boundary Value Problems. Academic Press, New York.
- [15] Bai, Z.B. (2012) Theory and Application of Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations. China Science and Technology Press, Beijing.