

一类带不连续值的二维趋化系统解的全局存在性

钟 华, 彭红云

广东工业大学数学与统计学学院, 广东 广州

收稿日期: 2023年3月19日; 录用日期: 2023年4月20日; 发布日期: 2023年4月27日

摘 要

本文研究了描述肿瘤血管生成的二维趋化系统解的适定性和大时间行为。证明了当时间趋于无穷时, 该系统的解收敛到一个常平衡态。同以往的结果相比, 我们研究了不连续初值解的适定性。利用有效粘性通量和加权能量估计, 得到了解的一系列先验估计, 通过这些先验估计可以得到弱解的全局存在性。以往的研究都是关于连续初值的研究, 得到的都是经典解。而实际情况中不连续的情形更加普遍, 而本文的结果表明, 在不连续初始值的情况下, 我们能够得到二维趋化系统的全局弱解。

关键词

趋化, 渐近稳定, 不连续初值, 有效粘性通量

Global Existence of a Two-Dimension Chemotaxis System with Discontinuous Data

Hua Zhong, Hongyun Peng

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Technology, Guangzhou Guangdong

Received: Mar. 19th, 2023; accepted: Apr. 20th, 2023; published: Apr. 27th, 2023

Abstract

This paper is concerned with the well-posedness and large-time behavior of a two-dimensional PDEODE hybrid chemotaxis system describing the initiation of tumor angiogenesis. We prove the solution converge to the constant equilibrium when the time tends to infinity. In contrast to the existing related results, where continuous initial data is imposed, we are able to prove the asymptotic stability for discontinuous initial data with large oscillations. The key ingredient in our proof is

the use of the so-called “effective viscous flux”, which enables us to obtain the desired energy estimates and regularity. The previous results are all about the continuous initial data and the classical solutions are obtained. However, discontinuity is more common in practice, and the results of this paper show that we can obtain the global weak solution of the two-dimensional chemotaxis system under the discontinuous initial data.

Keywords

Chemotaxis, Asymptotic Stability, Discontinuous Initial Data, Effective Viscous Flux

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言和主要的结果

1.1. 背景

本文研究以下趋化模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (\xi u \nabla \ln c), \\ c_t = -\mu u c + \epsilon \Delta u. \end{cases} \quad (1)$$

该模型描述了在血管形成期间, 血管内皮细胞生长因子与血管内皮细胞之间的关系[1] [2]。其中 $u(x, t)$ 表示血管内皮细胞的密度, $c(x, t)$ 表示血管内皮细胞生长因子的浓度。参数 $\xi > 0$ 代表趋化系数, μ 表示趋化血管内皮细胞生长因子的消耗率, ϵ 表示生长因子的扩散率。

模型(1)中, 第一个方程含有一个对数敏感函数 $\ln c$, 为了消去对数奇性, 可以通过如下 Cole-Hopf 变换[3] [4]

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{\mu} \nabla (\ln c) = -\frac{1}{\mu} \frac{\nabla c}{c}, \quad (2)$$

和伸缩变换 $\tilde{t} = \epsilon \mu t$, $\tilde{x} = \sqrt{\epsilon \mu} x$, $\tilde{\mathbf{v}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{v}$, 将(1.1)转换为如下系统(为了方便起见, 还是用 t, \mathbf{v}, x 分别代替 $\tilde{t}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{x}$)

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (u \mathbf{v}) = \Delta u, \\ \mathbf{v}_t - \nabla \cdot (-\epsilon |\mathbf{v}|^2 + u) = \epsilon \Delta \mathbf{v}, \\ (u, \mathbf{v})(x, 0) = (u_0, \mathbf{v}_0) = (u_0, \mathbf{v}_0)(x), \end{cases} \quad (3)$$

无穷远状态为

$$(u, \mathbf{v})(\pm\infty, t) = (\bar{u}, 0), \quad (4)$$

其中 $\bar{u} > 0$ 。

对于模型(1)已经有了大量的研究, 比如在一维空间中该系统行波解稳定性的研究[5] [6] [7] [8], 关于解的全局存在性以及大时间行为的研究[9]-[14]。对于高维无界区域的情形, 研究者在文献[1]中给出了该模型在二维空间非线性行波解的稳定性, 在文献[15] [16]中得到了经典解的爆破准则, 在文献[4]中得到

了该系统的全局适定性以及解的大时间行为。对于高维有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d \geq 3)$, 在 Neuman 边界条件下, 研究者在文献[16]中得到了具有指数衰减的全局解。在文献[11]中, 研究者在二维空间研究了模型(1)的边界层问题。关于模(1)的型其它研究请参考文献[17] [18]。

以上的研究大都是关于连续初值的研究, 在连续初始值的情况下, 可以要求初始值足够光滑, 这时得到的都是经典解。而在实际应用中不连续的情形更加普遍(比如分片光滑的初值就是不连续的), 因此研究带不连续初值的趋化模型是一个重要而有意义的题。本文将研究二维趋化系统在不连续初值下解的存在性问题, 进而考虑解的大时间行为, 这有助于研究该模型在不连续初值下解的性态。

首先我们先介绍弱解的定义:

定义 1.1 我们说 (u, \mathbf{v}) 是系统(3)~(4)的弱解, 如果 (u, \mathbf{v}) 满足, 对于所有的测试函数 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, \infty))$ 满足以下关系

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_0 \phi_0 + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (u \phi_t - \nabla u \cdot \nabla \phi) dx dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} u \mathbf{v} \cdot \nabla \phi dt$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}_0^j \phi_0 dx + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{v}^j \phi_t - u \phi_{x_j} + \epsilon \phi_{x_j} |\mathbf{v}^j|^2 - \epsilon \phi_{x_j x_j} \mathbf{v}^j) dx dt = 0,$$

其中 $i, j = 1, 2, \phi_0(x) = \phi(x, 0)$ 。

1.2. 主要结果

定理 1.2 如果 $4 < p_0 < \infty$ 如果初始值满足

$$u_0 - 1 \in L^2(\mathbb{R}^2), \mathbf{v}_0 \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^2), \mathbf{v}_0 \geq 0, \nabla^\perp \mathbf{v}_0 = 0, \tag{5}$$

$\nabla^\perp = (\partial_2, -\partial_1)$ 是旋度算子。然后对于任意的 $M > 0, \|\mathbf{v}_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^2)} \leq M$, 那么存在 $\eta > 0$, 使得

$$\|u_0 - 1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \theta_0 \leq \eta,$$

那么 Cauchy 问题(3)-(4)有一个全局的弱解 (u, \mathbf{v}) , 使得

$$\begin{cases} u - 1 \in L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C((0, \infty); C(\mathbb{R}^2)), \nabla \mathbf{v}, \nabla u \in L^2([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2)) \\ \mathbf{v} \in L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^2) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^2)) \end{cases}$$

当 $2 < p_1, p_2 \leq \infty$, 则

$$\|u(x, t) - 1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, \|\mathbf{v}(x, t)\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^2)} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

2. 预备知识

下面介绍一些概念:

$H^k(\mathbb{R}^2)$ 代表 \mathbb{R}^2 上指标为 k 的 Sobolev 空间, 其范数定义为

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^2)} := \left(\sum_{j=0}^k \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_x^j f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

旋度算子

$$\nabla^\perp = (\partial_2, -\partial_1), \tag{7}$$

$$\theta_0 = \|u_0 - 1\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{v}_0\|_{L^2}^2. \quad (8)$$

其中 $\theta_0 < 1$, 下面我们将简写 $\|\cdot\|_{L^2}$ 为 $\|\cdot\|$. 首先介绍以下两个引理[5] [16].

引理 2.1 令 $s > \frac{d}{2}$, $(u_0 - 1, \mathbf{v}_0) \in H^s(\mathbb{R}^d)$. 那么存在一个最大时间 $T_* = (\|u_0 - 1\|_{H^s}, \|\mathbf{v}_0\|_{H^s}) > 0$ 使得 Cauchy 问题(3)~(4), 存在一个唯一解使得

$$(u - 1, \mathbf{v}) \in L^\infty((0, T_*], H^s(\mathbb{R}^d)).$$

引理 2.2 令 $s > \frac{d}{2} + 1$, 且 $(u_0 - 1, \mathbf{v}_0) \in H^s(\mathbb{R}^d)$, (u, \mathbf{v}) 是引理 2.1 中得到的解, 如果

$$\int_0^T \|\mathbf{v}\|_{L^q}^{\frac{2q}{q-d}} dt < \infty \quad (d < q < \infty), \quad (9)$$

那么解可以延拓到 T_* 之外.

作变量替换 $\tilde{u} = u - 1$, 系统(3)可转化为

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} = \nabla \cdot (\tilde{u} \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{v}_t - \nabla \tilde{u} = \epsilon (\nabla |\mathbf{v}|^2 + \Delta \mathbf{v}), \\ (\tilde{u}, \mathbf{v})(x, 0) = (u_0 - 1, \mathbf{v}_0)(x). \end{cases} \quad (10)$$

定义有效粘性通量 \mathbf{F} 为:

$$\mathbf{F} = \nabla \tilde{u} + (\tilde{u} + 1) \mathbf{v}. \quad (11)$$

那么(10)中的第一个方程可以写成

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \tilde{u}_t. \quad (12)$$

由此可以得到关于 F 的估计:

引理 2.3 [19] 如果 (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是(10)的光滑解, 那么存在常数 C 使得

$$\|\nabla \mathbf{F}\|_{L^p} \leq C (\|\tilde{u}_t\|_{L^p}) + \|\nabla^\perp \tilde{u} \cdot \mathbf{v}\|_{L^p} \quad (p > 1).$$

引理 2.4 [20] 令 $1 \leq q$, $r \leq \infty$ 且 $0 < a \leq 1$ 使得

$$\frac{1}{p} = a \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) + (1-a) \frac{1}{r},$$

那么对于 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2) \cap L^r(\mathbb{R}^2)$, 然后存在一个常数只依赖于 q, r, n 的 C , 使得

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}^a \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}^{1-a}. \quad (13)$$

3. 渐进解的先验估计

首先对初值进行磨光

$$\tilde{u}_0^\delta = j^\delta * \bar{u}_0, \mathbf{v}_0^\delta = j^\delta * \mathbf{v}_0.$$

考虑以下渐进系统

$$\begin{cases} \tilde{u}_t^\delta - \Delta \tilde{u}^\delta = \nabla \cdot (\tilde{u}^\delta \mathbf{v}^\delta) + \nabla \cdot \mathbf{v}^\delta \\ \mathbf{v}_t^\delta - \nabla \tilde{u}^\delta = \epsilon \left(-\nabla (|\mathbf{v}^\delta|^2) + \Delta \mathbf{v}^\delta \right), \end{cases} \quad (14)$$

其中初始值为

$$(\tilde{u}_0^\delta, \mathbf{v}_0^\delta) \in H^3(\mathbb{R}^2)$$

且

$$\|\tilde{u}_0^\delta\|^2 + \|\mathbf{v}_0^\delta\|^2 \leq \|\tilde{u}_0\|^2 + \|\mathbf{v}_0\|^2 = \theta_0.$$

为方便起见, 下面用 (\tilde{u}, \mathbf{v}) 代替 $(\tilde{u}^\delta, \mathbf{v}^\delta)$ 。令 $T > 0$, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是(14)在 $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ 上的光滑解, 令 $\sigma(t) = \min\{1, t\}$, 定义

$$\begin{cases} A_1(T) = \sup_{t \in [0, T]} (\|\tilde{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) + \int_0^T \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt, \\ A_2(T) = \sup_{t \in [0, T]} (\sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_t\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2) + \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt \\ \quad + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt, \\ A_3(T) = \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 + \int_0^T \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt. \end{cases} \quad (15)$$

下面我们将通过先验假设的方法来得到解的先验估计, 我们首先假设

$$A_1(T) \leq 2\theta_0, A_2(T) \leq 2\theta_0^{\frac{1}{2}}, A_3(T) \leq 2\theta_0^{p_0}, \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_0}} \leq 6M, \quad (16)$$

其中

$$\eta_0 = \frac{p_0 - 4}{2(p_0 - 2)} \in \left(0, \frac{1}{2}\right). \quad (17)$$

下面我们从基本能量估计开始。

引理 3.1 如果定理 1.2 中的条件满足, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是满足初值条件并且满足(16)的光滑解, 则有下面不等式成立

$$\|\tilde{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \int_0^T \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dt \leq \frac{3}{2} \theta_0, \quad (18)$$

证明 用 \tilde{u} 乘以(10)式中的第一个方程, 用 $\sigma \mathbf{v}$ 乘以(10)中的第二个方程, 把两式所得结果相加, 然后在 \mathbb{R}^2 上作积分, 则有然后用类似文献[19]引理 3.1 的方法, 容易得到所需的结果。

接下来我们将给出解的一阶能量估计, 得到解的一阶能量估计时需要利用加权能量的技巧。

引理 3.2 如果定理 1.2 中的条件满足, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是满足初值条件并且满足(16)的光滑解, 则有

$$\begin{aligned} & \sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 + \sigma \epsilon \|\mathbf{v}_t\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{v}_t\|^2 dt \\ & + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt \leq \theta_0^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $\sigma = \sigma(t) = \min\{1, t\}$ 。

证明 第一步: 用 $\sigma \tilde{u}_t$, $\sigma \mathbf{v}_t$, 分别乘以(14)中第一个方程, 第二个方程, 然后在 $\mathbb{R}^2 \times (0, T]$ 作积分, 可得到

$$\frac{1}{2} \sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^{\sigma(T)} \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt - \int_0^T \sigma \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u} \nabla \tilde{u}_t dx dt - \int_0^T \sigma \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v} \nabla \tilde{u}_t dx dt \quad (20)$$

和

$$\frac{1}{2}\sigma\epsilon\|\nabla\mathbf{v}\|^2 + \int_0^T \sigma\|\mathbf{v}_t\|^2 dt = -\epsilon\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{v}_t\nabla|\mathbf{v}|^2) dxdt + \epsilon\int_0^{\sigma(t)} \|\nabla\mathbf{v}\|^2 dt + \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}_t\nabla\tilde{u} dxdt. \quad (21)$$

其中上式用了 $\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t\|\nabla\tilde{u}\|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\sigma(t)} \|\nabla\tilde{u}\|^2 dt$, $\frac{1}{2}\int_0^T \sigma_t\|\nabla\mathbf{v}\|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{\sigma(t)} \|\nabla\mathbf{v}\|^2 dt$ 。

首先处理(20)式右边的第二项, 根据 G-N 不等式有

$$\begin{aligned} & -\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}\mathbf{v}\nabla\tilde{u}_t dxdt \\ & \leq \lambda\int_0^T \sigma^2\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 dt + C\int_0^T \|\tilde{u}\mathbf{v}\|^2 dt \\ & \leq \lambda\int_0^T \sigma^2\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 dt + C\int_0^T \|\tilde{u}\|_{L^4}^2\|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \\ & \leq \lambda\int_0^T \sigma^2\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 dt + C\int_0^T \|\nabla\tilde{u}\|^2 dt + C\int_0^T \|\tilde{u}\|^2\|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt \\ & \leq \lambda\int_0^T \sigma^2\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 dt + C\theta_0. \end{aligned} \quad (22)$$

对于(21)中右边最后一项, 通过计算可得

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\nabla\tilde{u}_t dxdt & = -\int_0^T \left(\sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\nabla\tilde{u}_t dx \right)_t dt + \int_0^{\sigma(t)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\nabla\tilde{u} dxdt + \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}_t\nabla\tilde{u} dxdt \\ & =: I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned} \quad (23)$$

由 Cauchy 不等式, (15), (16), 及 $0 \leq \sigma \leq 1$, 则有

$$I_1 = -\sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\nabla\tilde{u} dx \leq \frac{\sigma}{4}\|\nabla\tilde{u}\|^2 + \sigma\|\mathbf{v}\|^2 \leq \frac{\sigma}{4}\|\nabla\tilde{u}\|^2 + 2\theta_0, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} I_2 & = \int_0^{\sigma(t)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}\nabla\tilde{u} dxdt \leq \frac{1}{2}\int_0^{\sigma(t)} \|\nabla\tilde{u}\|^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^{\sigma(t)} \|\mathbf{v}\|^2 dt \\ & \leq \frac{1}{2}\int_0^T \|\nabla\tilde{u}\|^2 dt + \frac{1}{2}\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|^2 \leq 2\theta_0. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} I_3 & = \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}_t\nabla\tilde{u} dxdt \\ & = \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dxdt + \epsilon\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \nabla|\mathbf{v}|^2 \nabla\tilde{u} dxdt + \epsilon\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \Delta\mathbf{v}\nabla\tilde{u} dxdt, \end{aligned}$$

对于 I_3 中的第二项, 由 Cauchy 不等式以及(16)有

$$\epsilon\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \nabla|\mathbf{v}|^2 \nabla\tilde{u} dxdt \leq C\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \epsilon|\mathbf{v}|\|\nabla\mathbf{v}\|\|\nabla\tilde{u}\| dxdt \leq C\theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}.$$

I_3 中的第三项, 由(14)中的第一个等式有

$$I_3 = \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}_t\nabla\tilde{u} dxdt \leq C\theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}. \quad (26)$$

由(20), (22), (23), (24), (25), (26)得

$$\frac{1}{4}\sigma\|\nabla\tilde{u}\|^2 + \int_0^T \sigma\|\tilde{u}_t\|^2 dt \leq \lambda\int_0^T \sigma^2\|\nabla\tilde{u}_t\|^2 dt + C\theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}. \quad (27)$$

并且

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \mathbf{v}_t dxdt & \leq \frac{1}{8}\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \|\mathbf{v}_t\|^2 dxdt + C\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\tilde{u}|^2 dxdt \\ & \leq \frac{1}{8}\int_0^T \sigma\int_{\mathbb{R}^2} \|\mathbf{v}_t\|^2 dxdt + C\theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt &\leq \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{\sigma} |\nabla \mathbf{v}| \sqrt{\sigma} |\mathbf{v}| dx dt \\
 &\leq \epsilon \sqrt{\sigma} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{4} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma |\mathbf{v}_t|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt \right) \\
 &\leq \frac{\epsilon}{4} \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0},
 \end{aligned} \tag{29}$$

则有

$$\sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt \leq \lambda \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}. \tag{30}$$

步骤 2. 估计 $\int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt$, 对时间求导得

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u}_t = \nabla \cdot (\tilde{u} \mathbf{v})_t + \nabla \cdot \mathbf{v}_t \\ \mathbf{v}_t - \nabla \tilde{u}_t = 2\epsilon (\nabla |\mathbf{v}|^2)_t + \epsilon \Delta \mathbf{v}_t. \end{cases} \tag{31}$$

所得方程第一个方程乘以 $\sigma^2 \tilde{u}_t$, 第二个方程乘以 $\sigma^2 \mathbf{v}_t$, 把所得结果相加并在作积分可得

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sigma^2}{2} \|\tilde{u}_t\|^2 + \frac{\sigma^2}{2} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt \\
 &\leq \int_0^{\sigma(T)} \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^{\sigma(T)} \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^{\sigma(T)} \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} v_t (\nabla |\mathbf{v}|^2) dx dt + \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{u} \mathbf{v})_t |\nabla \tilde{u}_t| dx dt \\
 &\leq \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^{\sigma(T)} \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u} \mathbf{v}_t \nabla \tilde{u}_t| dx dt + \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}_t \mathbf{v} \nabla \tilde{u}_t| dx dt + \epsilon \left| \int_0^{\sigma(T)} \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} v_t (\nabla |\mathbf{v}|^2) dx dt \right|.
 \end{aligned} \tag{32}$$

因此有

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sigma^2}{2} \|\tilde{u}_t\|^2 + \frac{\sigma^2}{2} \|\mathbf{v}_t\|^2 + \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \theta_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\sigma(T)} \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u} \mathbf{v}_t \nabla \tilde{u}_t| dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^2 \tilde{u}_t \mathbf{v} \nabla \tilde{u}_t dx dt.
 \end{aligned} \tag{34}$$

下面估计(34)右边第四项, 由

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u} \mathbf{v}_t \nabla \tilde{u}_t| dx dt &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}_t|^2 dx dt + \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u} \mathbf{v}_t|^2 dx dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}_t|^2 dx dt + \left(\sqrt{\sigma} \|\tilde{u}\|_{L^\infty} \right)^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma |\mathbf{v}_t|^2 dx dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \tilde{u}_t|^2 dx dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}+\eta_0}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

下面估计(34)中右边最后一项, 由(13)和(16)可得

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{u}_t \mathbf{v} \nabla \tilde{u}_t dx dt &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}_t \mathbf{v}\|^4 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + C \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}_t\| \|\nabla \tilde{u}_t\| \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + C \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + C \theta_0^{\eta_0} \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 dt.
 \end{aligned} \tag{36}$$

根据 $0 \leq \sigma \leq 1$, $\theta_0 \leq 1$, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 \|\mathbf{v}_t\|^2 + \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt \\ & \leq C \lambda \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} + \frac{1}{4} \theta_0^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

选取 $(C+4)\lambda \leq \frac{1}{8}$, 可得

$$\begin{aligned} & \sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_t\|^2 + 100 \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt \\ & + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt \leq C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} + \frac{1}{2} \theta_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (37)$$

选取 θ_0 , 使得 $C \theta_0^{\eta_0} \leq \frac{1}{2}$, 则有

$$\begin{aligned} & \sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}\|^2 + \sigma^2 \|\tilde{u}_t\|^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_t\|^2 + 100 \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t\|^2 dt \\ & + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}_t\|^2 dt \leq \theta_0^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此完成引理 3.2 的证明。

接下来, 我们将给出 $\tilde{u}(x, t)$ 的估计, 从而得到 $\tilde{u}(x, t)$ 的大时间行为。

引理 3.3 [19] 如果定理 1.2 中的条件满足, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是满足初值条件并且满足(16)的光滑解, 则有

$$\sigma^4 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^4 \leq C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0},$$

且 $t \in (\sigma(T), T]$, 则

$$-\frac{1}{4} \leq \tilde{u}(x, t) \leq \frac{1}{4}. \quad (38)$$

证明: 引理 3.3 的证明可参考文献[19]。

以下引理是关于 \mathbf{v} 的估计。

引理 3.4 如果定理 1.2 中的条件满足, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是满足初值条件并且满足(16)的光滑解, 那么

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt \leq \theta_0^{\eta_0},$$

其中 $\eta_0 = \frac{p_0 - 4}{2(p_0 - 2)}$ 。

证明: 由 $\mathbf{v}_t = \nabla \tilde{u} + \epsilon \Delta \mathbf{v} + \epsilon \nabla |\mathbf{v}|^2$, 有

$$\Delta \mathbf{v} - \epsilon \nabla |\mathbf{v}|^2 + (\tilde{u} + 1) \mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (39)$$

两边同时乘以 $|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}$, 然后在 \mathbb{R}^2 作积分, 则

$$\frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \right)_t + \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{u} + 1) \mathbf{v}^4 dx = \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} \nabla |\mathbf{v}|^2 dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \mathbf{v} \cdot |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{F} |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} dx.$$

在 $[\sigma(T), T]$ 作积分, 可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx + \frac{3}{4} \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt \\
 & \leq \sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \left(\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \right) + \int_{\sigma(T)} |\mathbf{F}| |\mathbf{v}|^3 dx dt + C \epsilon \int_{\sigma(T)} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{v}| dx dt - 3 \epsilon \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt \\
 & \leq \sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \right) + C \epsilon \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} (|\mathbf{v}|^4 + |\nabla \mathbf{v}|^2) dx dt + \frac{1}{4} \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt + C \int_{\sigma(T)} |\mathbf{F}|^4 dx dt \\
 & \leq \sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \left(\frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \right) + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} + \frac{1}{4} \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt + C \int_{\sigma(T)} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{F}|^4 dx dt.
 \end{aligned} \tag{40}$$

由 G-N 不等式(13)有

$$\int_{\sigma(T)} \|\mathbf{F}\|_{L^4}^4 dt \leq C \int_{\sigma(T)} \|\mathbf{F}\|^2 \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt \leq C \left(\sup_{\sigma(T) \leq t \leq T} \|\mathbf{F}\|^2 \right) \int_{\sigma(T)} \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt. \tag{41}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{F}\| & \leq \|\nabla \tilde{u} + \tilde{u} \mathbf{v} + \mathbf{v}\| \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + \|\tilde{u} \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + \|\tilde{u}\|_{L^4} \|\mathbf{v}\|_{L^4} + \|\mathbf{v}\| \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + C \|\tilde{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^4} + \|\mathbf{v}\| \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + C \|\tilde{u}\| \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 + \|\mathbf{v}\| \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \frac{\eta_0}{2}} + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \|\nabla \tilde{u}\| + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \frac{\eta_0}{2}},
 \end{aligned} \tag{42}$$

当 $\sigma(T) \leq t \leq T$, $\sigma = 1$, 则

$$\sup_{\sigma(T) \leq t \leq T} \|\mathbf{F}\|^2 \leq 4 \sigma \|\nabla \tilde{u}\|^2 + C \left(\theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} \right)^2 \leq 4 \theta_0^{\frac{1}{2}} + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} \leq C \theta_0^{\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

那么由(13)有

$$\begin{aligned}
 \int_{\sigma(T)} \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt & \leq C \int_{\sigma(T)} \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + C \int_{\sigma(T)} \sigma \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \\
 & \leq C \theta_0^{\frac{1}{2}} + C \int_{\sigma(T)} \sigma \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{44}$$

由 $\int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt \leq C \theta_0^{\eta_0}$ 和(16)可得

$$C \int_{\sigma(T)} \sigma \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \leq C \int_{\sigma(T)} \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \int_{\sigma(T)} \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt \leq C \theta_0^{\eta_0}, \tag{45}$$

因此

$$\int_{\sigma(T)} \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt \leq C \theta_0^{\eta_0}, \tag{46}$$

由(41), (44), (46)得

$$\int_{\sigma(T)} \|\mathbf{F}\|_{L^4}^4 dt \leq C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0}.$$

那么

$$\sup_{t \in [\sigma(T), T]} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx + \int_{\sigma(T)}^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt \leq C(M) \theta_0^{4\eta_0} + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0}. \quad (47)$$

当 $0 \leq t \leq \sigma(T)$, 由插值不等式, (3.3) 可得

$$\|\mathbf{v}\|_{L^p} \leq \|\mathbf{v}\|_{L^{p(p_0-2)}}^{\frac{2(p_0-p)}{p(p_0-2)}} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_0}}^{\frac{p_0(p-2)}{p(p_0-2)}} \leq C \theta_0^{\frac{p_0-p}{p(p_0-2)}} M^{\frac{p_0(p-2)}{p(p_0-2)}}$$

则

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4} \leq C \theta_0^{\frac{p_0-4}{4(p_0-2)}} M^{\frac{p_0(p-2)}{4(p_0-2)}} \leq C(M) \theta_0^{\eta_0}, \quad (48)$$

因此

$$\sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \leq 2 \sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx \leq C(M) \theta_0^{4\eta_0}. \quad (49)$$

由(47), (48), (49)取 $C(M) \theta_0^{3\eta_0} \leq \frac{1}{2}$, $C \theta_0^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}$, 则

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 dx dt \leq C(M) \theta_0^{4\eta_0} + \frac{1}{2} \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} \leq \theta_0^{\eta_0}.$$

引理 3.5 如果定理 1.2 中的条件满足, (\tilde{u}, \mathbf{v}) 是满足初值条件并且满足(16)的光滑解, 那么

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_0}} \leq 3M. \quad (50)$$

证明: 用 $\sigma^\sigma |\mathbf{v}|^{p_0-2} |\mathbf{v}|$ 乘以(3.27), 然后在 \mathbb{R}^2 上作积分, 则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p_0} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{v}|^{p_0} dx \right)_t + \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{u}+1) (\sigma |\mathbf{v}|)^{p_0} dx \\ &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{v}|^{p_0-2} \mathbf{v} \nabla |\mathbf{v}|^2 dx + \epsilon \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{v}|^{p_0-2} \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{F}| |\mathbf{v}|^{p_0-2} dx + \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0-1} |\mathbf{v}|^{p_0} dx. \end{aligned} \quad (51)$$

将上式在 $[0, T]$ 上积分有

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{v}|^{p_0} dx &\leq C \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{v}|^{p_0} |\nabla \mathbf{v}| dx dt + C \epsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\nabla \mathbf{v}|^2 |\mathbf{v}|^{p_0-2} dx dt \\ & \quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0} |\mathbf{F}| |\mathbf{v}|^{p_0-1} dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \sigma^{p_0-1} |\mathbf{v}|^{p_0} dx dt \\ &\leq \epsilon \int_0^T \sigma^{\frac{p_0-2}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^{p_0-2} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{v}| dx dt + C \epsilon \int_0^T \left(\sigma^{\frac{p_0-2}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^{p_0-2} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt \\ & \quad + \int_0^T \left(\|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^{p_0-4} \right) \sigma^{\frac{p_0-4}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}| dx dt + \int_0^T |\sigma \mathbf{F}| |\mathbf{v}|^{p_0-1} dx dt \\ &\leq \epsilon \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{v}^4 + |\nabla \mathbf{v}|^2 dx dt \right) + C \theta_0^{\frac{1}{2} + \eta_0} + C \theta_0^{\eta_0} + \int_0^T |\sigma \mathbf{F}| |\mathbf{v}|^{p_0-1} dx dt. \end{aligned} \quad (52)$$

由不等式

$$ab \leq \epsilon a^q + (\epsilon q)^{-\frac{r}{q}} r^{-1} b^r, a, b \geq 0, \epsilon > 0, q, r > 0, \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1,$$

有

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{F}| |\sigma \mathbf{v}_0|^{p_0-1} dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{v}|^{p_0} dx dt + \frac{1}{p_0} \left(\frac{2p_0-2}{p_0} \right)^{p_0-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{F}|^{p_0} dx dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^{\frac{p_0-4}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty}^{p_0-4} \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^4 dx dt + \frac{1}{p_0} \left(\frac{2p_0-2}{p_0} \right)^{p_0-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{F}|^{p_0} dx dt, \end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v}|^{p_0} dx \leq C \theta_0^{p_0} + \left(\frac{2p_0-2}{p_0} \right)^{p_0-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{F}|^{p_0} dx dt.$$

由 G-N 不等式(13)可得

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\sigma \mathbf{F}\|_{L^{p_0}}^{p_0} dt & \leq C \int_0^T \|\sigma \mathbf{F}\|^2 \|\sigma \nabla \mathbf{F}\|^{p_0-2} dt \\ & \leq C \sup_{t \in [0, T]} \|\sigma \mathbf{F}\|^2 \|\sigma \nabla \mathbf{F}\|^{p_0-4} \int_0^T \|\sigma \nabla \mathbf{F}\|^2 dt. \end{aligned} \tag{53}$$

由

$$\sup_{t \in [0, \sigma(T)]} \sigma^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{F}\| \leq C \sigma^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{u}\| + C \sigma^{\frac{1}{2}} \theta_0^{\frac{1}{4}} \leq C \theta_0^{\frac{1}{4}}$$

和

$$\int_0^T \sigma \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt \leq C \theta_0^{p_0},$$

可得

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma \mathbf{F}\|^2 \leq \sup_{t \in [0, T]} \sigma \|\mathbf{F}\|^2 \leq C \theta_0^{\frac{1}{2}}.$$

由(10), (13)可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4} & \leq \|\mathbf{F} - \tilde{u} \mathbf{v} - \mathbf{v}\|_{L^4} \\ & \leq \|\mathbf{F}\|_{L^4} + \|\tilde{u} \mathbf{v}\|_{L^4} + \|\mathbf{v}\|_{L^4} \\ & \leq C \left(\|\mathbf{F}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{F}\|^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{u}\|_{L^\infty} \|\mathbf{v}\|_{L^4} + \|\mathbf{v}\|_{L^4} \right) \\ & \leq \left(\|\mathbf{F}\|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{F}\|^{\frac{1}{2}} + \|\tilde{u}\|_{L^4}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}\|_{L^4} + \|\mathbf{v}\|_{L^4} \right). \end{aligned}$$

利用上式和(13)可得

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt & \leq C \int_0^T \sigma^2 \|\mathbf{F}\|^2 \|\nabla \mathbf{F}\|^2 + \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 + \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt \\ & \leq CA_3(T) + C \int_0^T \sigma^2 \|\mathbf{F}\|^2 \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt + C \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 dt \\ & = C \theta_0^{p_0} + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

下面对 I_4 做估计, 由(13)和 Hölder 不等式可得

$$\|\nabla \mathbf{F}\| \leq C \|\tilde{u}_t\| + C \|\nabla^\perp \tilde{u} \cdot \mathbf{v}\| \leq C \|\tilde{u}_t\| + C \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4} \|\mathbf{v}\|_{L^4}.$$

由(15), (16), (43)及以上不等式, 可得

$$\begin{aligned}
 I_4 &\leq C \int_0^T \sigma \left(\|\nabla \tilde{u}\|^2 + \theta_0^{2+\eta_0} \right) \sigma \left(\|\tilde{u}_t\|^2 + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4} \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 \right) dt \\
 &\leq \sigma \left(A_2(T) + \theta_0^{2+\eta_0} \right) \int_0^T \sigma \left(\|\tilde{u}_t\|^2 + \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 \right) dt \\
 &\leq C \theta_0^{\frac{1}{2}} \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}} A_3(T) \\
 &\leq C \theta_0^{\frac{1}{2}} A_2(T) + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}} A_3(T) \\
 &\leq C \theta_0 + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \theta_0^{2+\eta_0} \\
 &\leq C \theta_0^{\frac{1}{2}} + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt.
 \end{aligned}$$

以下估计 I_5 , 由(13), (16), (17)可得

$$\begin{aligned}
 I_5 &= C \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + CA_3^2(T) \int_0^T \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}\|_{L^4}^4 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + CA_3(T)^2 \int_0^T \sigma^2 \|\tilde{u}\|^2 \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \theta_0^{\frac{1}{2}+3\eta_0} \\
 &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt + C \theta_0^{\eta_0}.
 \end{aligned}$$

取 θ_0 使得 $C\theta_0^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}$, 那么

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 dt &\leq C \theta_0^{\eta_0} + C \theta_0^{\frac{1}{2}} \leq C \theta_0^{\eta_0}. \\
 \int_0^T \sigma \|\nabla \mathbf{F}\|^2 dt &\leq C \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + C \int_0^T \sigma \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4}^2 dt \\
 &\leq \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t\|^2 dt + C \int_0^T \left(\sigma^2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^4}^4 + \|\mathbf{v}\|_{L^4}^4 \right) dt \\
 &\leq C \theta_0^{\frac{1}{2}} + C \theta_0^{\eta_0} \leq C \theta_0^{\eta_0}.
 \end{aligned}$$

由于

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma \nabla \mathbf{F}\| \leq C \theta_0^{\frac{\eta_0}{2}} + C \sigma \|\tilde{u}_t\| + C \sigma^{\frac{1}{2}} \|\nabla \tilde{u}\| \leq C \sigma \left(\theta_0^{\frac{\eta_0}{2}} + \theta_0^{\frac{1}{2}} \right) \leq C \theta_0^{\frac{\eta_0}{2}},$$

那么

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\sigma \nabla \mathbf{F}\|^{p_0-4} \leq C \theta_0^{\frac{\eta_0(p_0-4)}{2}}.$$

把以上三个不等式代入(53)可得

$$\int_0^T \|\sigma \mathbf{F}\|_{L^{p_0}}^{p_0} dt \leq C \theta_0^{\frac{\eta_0(p_0-2)+1}{2}} = C \theta_0^{\frac{p_0-2}{4}}, \quad (54)$$

因此取 θ_0 足够下, 当 $C\theta_0^{n_0} + C\theta_0^{\frac{p_0-2}{4}} \leq (3M)^{p_0}$ 时,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{\mathbb{R}^2} |\sigma \mathbf{v}|^{p_0} dx \leq C\theta_0^{n_0} + C\theta_0^{\frac{p_0-2}{4}} \leq (3M)^{p_0},$$

即

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_0}} \leq 3M.$$

因此完成了引理 3.5 的证明。

根据引理 3.1~3.5, 可得

$$A_1(T) \leq \frac{3}{2}\theta_0, A_2(T) \leq \theta_0^{\frac{1}{2}}, A_3(T) \leq \theta_0^{n_0}, \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_0}} \leq 3M. \tag{55}$$

4. 主定理证明

下面利用爆破准则得到全局解

命题 4.1 假设 $(\tilde{u}_0^\delta, \mathbf{v}_0^\delta) \in H^3(\mathbb{R}^2)$, 那么系统(16)有一个唯一解, 使得 $(\tilde{u}^\delta, \mathbf{v}^\delta) \in L^\infty([0, \infty), H^3)$ 。

证明: 通过引理 2.1, 则存在 $T_* > 0$, 使得满足初始条件的系统(3.1)在 $\mathbb{R}^2 \times [0, T^*]$ 上的 Cauchy 问题有唯一解。首先, 从(3.3)可知

$$A_1(0) \leq \theta_0, A_2(0) < 2\theta_0^{\frac{1}{2}}, \|\mathbf{v}_0^\delta\|_{L^{p_0}} \leq M.$$

令 $C(M)\theta_0^{3n_0} \leq 1$,

$$A_3(0) = \|\mathbf{v}_0^\delta\|_{L^4}^4 \leq C(M)\theta_0^{4n_0} \leq \theta_0^{n_0}. \tag{56}$$

因此, 存在一个 $T_1 > 0$, 使得 $T_1 \leq T_*$, (3.3)成立。

反证, 如果 $T^* < \infty$, 由爆破准则, 则

$$\int_0^{T^*} \|\mathbf{v}^\delta\|_{L^4}^4 dt < \infty.$$

根据引理 3.1-3.5, 当 $T = T^*$ 时, 上式成立, 所以存在 $T^{**} > T^*$, 使得

$$(u^\delta - 1, \mathbf{v}^\delta) \in L^\infty([0, T^{**}], H^3),$$

和当 $T = T^{**}$ 时(16)成立, 与最大存在时刻矛盾。所以根据连续性技巧, 可证命题 4.1。

从(55)得到下面关于 δ 的一致估计

$$\left\{ \begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \left(\|\tilde{u}^\delta\|^2 + \|\mathbf{v}^\delta\|^2 \right) + \epsilon \|\nabla \mathbf{v}^\delta\|^2 + \int_0^T \|\nabla \tilde{u}^\delta\|^2 dt + \epsilon \int_0^T \|\nabla \mathbf{v}^\delta\|^2 dt \leq \frac{3\theta_0}{2}, \\ & \sup_{t \in [0, T]} \left(\sigma \|\nabla \tilde{u}^\delta\|^2 + \sigma^2 \|\tilde{u}_t^\delta\|^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_t^\delta\|^2 + \sigma \epsilon \|\nabla \mathbf{v}^\delta\|^2 \right) + \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t^\delta\|^2 dt \\ & \quad + \epsilon \int_0^T \sigma^2 \|\nabla \mathbf{v}^\delta\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\mathbf{v}_t^\delta\|^2 dt + \int_0^T \sigma \|\tilde{u}_t^\delta\|^2 dt \leq \theta_0^{\frac{1}{2}}, \\ & \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{u}^\delta\|_{L^4}^4 + \int_0^T \|\mathbf{v}^\delta\|_{L^4}^4 dt \leq \theta_0^{n_0}, \\ & \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}^\delta\|_{L^{p_0}} \leq 3M. \end{aligned} \right. \tag{57}$$

由(13), (57), 可得

$$\sigma \|u^\delta - 1\|_{L^4}^2 \leq C \|u^\delta - 1\| \sigma \|\nabla u^\delta\| \leq C, \sigma^2 \|\nabla u^\delta\|_{L^4}^2 \leq C. \quad (58)$$

所以由(4.2), (4.3), 则有

$$\begin{cases} u^\sigma - 1 \in L^\infty([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^2)), (\nabla \mathbf{v}^\delta, \nabla u^\delta) \in L^2([0, \infty), L^2(\mathbb{R}^2)), \\ u^\delta - 1 \in L^\infty((0, \infty), W^{1,4}(\mathbb{R}^2)), u_i^\delta, \mathbf{v}_i^\delta \in L^2((0, \infty), H^1(\mathbb{R}^2)), \\ \mathbf{v} \in L^\infty([0, \infty); L(\mathbb{R}^2) \cap L^{p_0}(\mathbb{R}^2)) \cap L^4([0, \infty); L^4(\mathbb{R}^2)). \end{cases} \quad (59)$$

由 $W^{1,4}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C(\mathbb{R}^2)$, $L^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^2)$, 因此 Aubin-Lions-Simon 引理, 可以抽取一个子列 $(u^\delta, \mathbf{v}^\delta)$, 当 $\delta \rightarrow 0$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{v}^\delta(\cdot, t) \rightarrow \mathbf{v} \text{ strongly in } C([0, \infty), H^{-1}(\mathbb{R}^2)), \\ u^\delta(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t) \text{ Strongly in } C([0, \infty), C(\mathbb{R}^2)), \\ \nabla u^\delta(\cdot, t) \rightarrow \nabla u(\cdot, t) \text{ weakly in } L^2([0, \infty), L(\mathbb{R}^2)), \\ \nabla \mathbf{v}^\delta(\cdot, t) \rightarrow \nabla \mathbf{v}(\cdot, t) \text{ weakly in } L^2([0, \infty), L(\mathbb{R}^2)). \end{cases} \quad (60)$$

那么

$$\int_1^\infty \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt \leq C,$$

且

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \left(\|\nabla \tilde{u}\|^2 \right)_t dt &\leq 2 \int_1^\infty \|\nabla \tilde{u}\| \|\nabla \tilde{u}_t\| dt \\ &\leq \left(\int_1^\infty \|\nabla \tilde{u}\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^\infty \sigma^2 \|\nabla \tilde{u}_t\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C, \end{aligned}$$

那么

$$\|\nabla \tilde{u}\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, \quad (61)$$

据此可得

$$\|u - 1\|_{L^\infty} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty. \quad (62)$$

根据插值不等式, 当 $2 < p_1 \leq \infty$ 时, 可得

$$\|u - 1\|_{L^{p_1}} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

类似地

$$\int_1^\infty \left(\|\nabla \mathbf{v}\|^2 \right)_t dt \leq C,$$

那么

$$\|\mathbf{v}\|_{L^{p_1}} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

至此完成定理 1.2 的证明。

参考文献

- [1] Corrias, L., Perthame, B. and Zaag, H. (2003) A Chemotaxis Model Motivated by Angiogenesis. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, **336**, 141-146. [https://doi.org/10.1016/S1631-073X\(02\)00008-0](https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)00008-0)
- [2] Corrias, L., Perthame, B. and Zaag, H. (2004) Global Solutions of Some Chemotaxis and Angiogenesis Systems in High Space Dimensions. *Milan Journal of Mathematics*, **72**, 1-28. <https://doi.org/10.1007/s00032-003-0026-x>
- [3] Levine, H.A., Sleeman, B.D. and Nilsen-Hamilton, M. (1997) A System of Reaction Diffusion Equations Arising the Theory of Reinforced Random Walks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **47**, 683-730. <https://doi.org/10.1137/S0036139995291106>
- [4] Othmer, H.G. and Stevens, A. (1997) Aggregation, Blowup, and Collapse: The ABCs of Taxis in Reinforced Random Walks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 1044-1081. <https://doi.org/10.1137/S0036139995288976>
- [5] Jin, H.Y., Li, J.Y. and Wang, Z.A. (2013) Asymptotic Stability of Traveling Waves of a Chemotaxis Model with Singular Sensitivity. *Journal of Differential Equations*, **255**, 193-219. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.002>
- [6] Mei, M., Peng, H.Y. and Wang, Z.A. (2015) Asymptotic Profile of a Parabolic-Hyperbolic System with Boundary Effect Arising from Tumor Angiogenesis. *Journal of Differential Equations*, **259**, 5168-5191. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.06.022>
- [7] Li, T. and Wang, Z.A. (2009) Nonlinear Stability of Traveling Waves to a Hyperbolic-Parabolic System Modeling Chemotaxis. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **70**, 1522-1541. <https://doi.org/10.1137/09075161X>
- [8] Peng, H.Y. and Wang, Z.A. (2020) On a Parabolic-Hyperbolic Chemotaxis System with Discontinuous Data: Well-Posedness, Stability and Regularity. *Journal of Differential Equations*, **268**, 4374-4415. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.10.025>
- [9] Guo, J., Xiao, J.X., Zhao, H.J. and Zhu, C.J. (2009) Global Solutions to Hyperbolic-Parabolic Coupled System with Large Initial Data. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, **29**, 629-641. [https://doi.org/10.1016/S0252-9602\(09\)60059-X](https://doi.org/10.1016/S0252-9602(09)60059-X)
- [10] Li, D., Pan, R.H. and Zhao, K. (2015) Quantitative Decay of a One-Dimensional Hybrid Chemotaxis Model with Large Data. *Nonlinearity*, **28**, 2181-2210. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/7/2181>
- [11] Li, T., Li, T. and Zhao, K. (2011) On a Hyperbolic-Parabolic System Modeling Chemotaxis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **21**, 1631-1650. <https://doi.org/10.1142/S0218202511005519>
- [12] Li, D., Pan, R.H. and Zhao, K. (2012) Global Dynamics of a Hyperbolic-Parabolic Model Arising from Chemotaxis. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **72**, 417-443. <https://doi.org/10.1137/110829453>
- [13] Li, T. and Wang, Z.A. (2010) Nonlinear Stability of Large Amplitude Viscous Shock Waves of a Generalized Hyperbolic-Parabolic System Arising in Chemotaxis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**, 1967-1998. <https://doi.org/10.1142/S0218202510004830>
- [14] Martinez, V., Wang, Z.A. and Zhao, K. (2018) Asymptotic and Viscous Stability of Large Amplitude Solutions of a Hyperbolic System Arising from Biology. *Indiana University Mathematics Journal*, **67**, 1383-1424. <https://doi.org/10.1512/iumj.2018.67.7394>
- [15] Fan, J. and Zhao, K. (2012) Blow up Criterion for a Hyperbolic-Parabolic System Arising from Chemotaxis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **394**, 687-695. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.05.036>
- [16] Wang, Z.A. and Hou, Q.Q. (2019) Convergence of Boundary Layers for the Keller-Segel System with Singular Sensitivity in the Half-Plane. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **130**, 251-287. <https://doi.org/10.1016/j.matpur.2019.01.008>
- [17] Jin, H. and Zou, F. (2023) Nonlinear Stability of Traveling Waves to a Parabolic-Hyperbolic System Modeling Chemotaxis with Periodic Perturbations. *Journal of Differential Equations*, **352**, 23-66. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.12.033>
- [18] Jin, H. and Xu, K. (2023) Boundedness of a Chemotaxis-Convection Model Describing Tumor-Induced Angiogenesis. *Acta Mathematica Scientia. Series B. English Edition*, **43**, 156-168. <https://doi.org/10.1007/s10473-023-0110-y>
- [19] Peng, H.Y., Wang, Z.A. and Zhu, C.J. (2022) Global Weak Solutions and Asymptotics of a Singular PDE-ODE Chemotaxis System with Discontinuous Data. *Science China Mathematics*, **65**, 269-290. <https://doi.org/10.1007/s11425-019-1754-0>
- [20] Friedman, A. (1969) Partial Differential Equation. Academic Press, New York.