Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(4), 846-853
Published Online April 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.134089

Hans汉斯

上临界Markov分支过程的调和矩

肖宁洁*，**王　娟**

上海理工大学理学院，上海

收稿日期：2023年3月17日；录用日期：2023年4月18日；发布日期：2023年4月26日

摘　要

设$\{Z(t);t\ge 0\}$是一个上临界马尔可夫分支过程。本文研究了带移民上临界分支过程在连续时间情况下调和矩$E[Z(t)]^{-r}$的收敛速度，它在大偏差及中心极限定理的研究中具有重要作用。推广了已有文献中无移民情况的相应结果，经研究发现该收敛存在相变，这一相变由b_1+a_0+mr与0的大小关系所决定。这里使用的方法与离散的情况有所不同，我们提出了一种新的区间划分的方法来得出结论。同时作为副产品我们得到了连续时间下带移民分支过程的一个泛函方程。

关键词

Markov分支过程，上临界，调和矩，移民

Harmonic Moment of the Supercritical Markov Branching Process

Ningjie Xiao*, Juan Wang

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 17th, 2023; accepted: Apr. 18th, 2023; published: Apr. 26th, 2023

Abstract

Support $\{Z(t);t\ge 0\}$ be a supercritical Markov branching processes. In this paper, we study the convergence rate of harmonic moments $E[Z(t)]^{-r}$ of the Supercritical Markov branching process with immigration in continuous time, it plays an important role in the study of the large deviation and the central limit theorem. The corresponding results in the existing literature are generalized. It is found that there is a variant of the convergence, and the variant b_1+a_0+mr is related to the

*通讯作者。

文章引用: 肖宁洁, 王娟. 上临界 Markov 分支过程的调和矩[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 846-853.
DOI: 10.12677/pm.2023.134089

size of 0. Different from the discrete case, we propose a new interval division method to reach the conclusion. As a by-product we obtain a functional equation with migration branching process in continuous time.

Keywords

Markov Branching Process, Supercritical, Harmonic Moment, Immigration

1. 引言

设$\{Z(t);t\ge 0\}$是非负整数的随机变量，表示一个连续时间带移民的 Galton-Watson 分支过程。它由现有的个体和外部移民两部分组成且两部分是相互独立的。其分支速率为$\{b_k;k\ge 0,k\ne 1\}$，移民速率为$\{a_k;k\ge 1\}$，即系统中的每个粒子以均值$\sum_{k\ne 1}b_k$的指数分布，同时以$-b_k/b_1(k\ne 1)$的速率产生后代粒子。与此同时，移民以$\{a_k;k\ge 1\}$的速率产生后代，且分支与移民两部分相互独立，定义该过程的应 Q-矩阵，$Q=(q_{ij};i,j\in\mathbb{Z}_+)$

$$q_{ij}=\begin{cases} ib_0, & i\ge 0, j=i-1 \\ ib_{j-i+1}+a_{j-i}, & i\ge 0, j\ge i \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中$a_j\ge 0(j\ge 1)$，$0<-a_0=\sum_{j=1}^{\infty}a_j<\infty$，$b_j\ge 0(j\ne 1)$，$0<-b_0=\sum_{j\ne 1}^{\infty}b_j<\infty$。

设$P(t)=(p_{ij};i,j\in\mathbb{Z}_+)$为$\{Z(t);t\ge 0\}$的转移函数，如果$a_0=0$，即没有移民加入的情形，此时$\{Z(t);t\ge 0\}$退化为上临界分支过程，记为$\{Z^0(t);t\ge 0\}$，其是独立同分布的随机变量，并且有相同的母函数$F(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_js^j$，此时$\{Z(t);t\ge 0\}$退化为$\{Z^0(t);t\ge 0\}$上临界分支过程，存在非负的规范化序列$\{C(t);t\ge 0\}$使得

$$W(t):=\frac{Z^0(t)}{C(t)}\xrightarrow{a.s.}W,\quad t\to\infty.$$

当$a_0\ne 0$时，且满足条件$E(\log Y)<\infty$，移民$\{Y(t);t\ge 0\}$也是独立同分布的且遵循母函数$H(s)=\sum_{j=0}^{\infty}h_js^j$，存在相同的规范化序列$C(t)$，这样

$$I(t):=\frac{Y(t)}{C(t)}\xrightarrow{a.s.}I,\quad t\to\infty.$$

此时，$\{Z(t);t\ge 0\}$过程可以有下面关系式决定：

$$Z(t)=Z^0(t)+Y(t),$$

其中$Z^0(t)$表示分支部分，$Y(t)$表示移民部分。

通过 Li [1]有：

$$G_i(s,t)=H(s,t)\cdot\left[F(s,t)\right]^i, i\in\mathbb{Z}_+, \tag{1.2}$$

其中 $G_i(s,t)=\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(t)s^j$ 。

我们在本文中都假设 $b_0=0, m=\sum_{j=1}^{\infty}jb_j<\infty$ 和 $a=\sum_{j=1}^{\infty}ja_j<\infty$ 。即 $\{Z(t);t\ge0\}$ 过程是上临界的，对于这样的过程，仍存在规范化序列 $\{C(t);t\ge0\}$ 使得下式成立

$$V(t):=\frac{Z(t)}{C(t)}\xrightarrow{a.s.}V=W+I.$$

非退化的随机序列 $C(t)$ 满足 $\lim_{t\to\infty}C(t+\tau)/C(\tau)=\mathrm{e}^{m\tau}$ 。根据 Athreya 和 Ney [2]，当且仅当 $L\log L$-矩条件成立时，$E[W]=1$。同时，当满足条件 $E\left[Z^0\log Z^0\right]<\infty$，$E[\log Y]<\infty$ 时，$C(t):=E\left[Z(t)\right]=\mathrm{e}^{mt}$，它描述了该过程的平均增长速率，对于超临界过程，当 $t\to\infty$ 时，粒子数在趋于无穷，本文利用归一化序列 $C(t)$ 研究了调和矩 $E\left[Z(t)\right]^{-r}$ 的收敛速度。

在分支过程中的研究中，调和矩扮演者重要的角色，此前对于调和矩的研究主要集中在离散时间及经典分支过程的情况。Nagaev [3]证明了 $\tau_n(1)=O\left(q^n\right)$，其中 $\max\left(0,m^{-1}\right)<q^2<1$。Heyde 和 Brown [4]在研究中心极限定理收敛速率时得到了 $\tau_n(1/2)\sim m^{-n}$，另外在某些条件下 $\tau_n(1/2)\sim nm^{-n}$，这与 Ney 和 Vidyashkar [5]的一般性结果相吻合，其研究了离散时间下 $p_1m^r>1$，$p_1m^r<1$，$p_1m^r=1$ 三种情形下的 $E\left[Z(t)\right]^{-r}$ 收敛情况，且指出收敛速率取决于形。Pakes [6]研究了 $\tau_n(1)$ 在 $p_1m\ne1$ 的特定渐近行为。此外，他还推测当 $n\to\infty$，$\gamma m=1$ 时，$\tau_n(1)\sim nm^{-n}$ 。在 Ney 和 Vidyashkar [5]的基础上 Sun [7]将结论推广到带移民分支过程，此时变相由 $p_1h_0m^r$ 与 1 的大小关系所决定。Li 和 Zhang [8]研究了带移民的临界分支过程的调和矩收敛速度，并将这一结果应用到大偏差里。

文献[5]中马尔可夫分支过程的调和矩根据相变的不同有不同的收敛结果，具体见定理 2.1，现将已有结果推广到带移民的连续时间分支过程，主要研究了 $E\left[Z(t)\right]^{-r}$ 的渐进行为，得出了该收敛速率存在相变，且相变由 $b_1+a_0+mr>0$，$b_1+a_0+mr<0$ 决定，为研究方便采用离散格子的形式将区间划分为 n 个长度为 h 的区间，具体过程见引理 3.3。

文章的其余部分结构如下，在第 2 节中，我们介绍了一些预备知识和引理；第 3 节阐述主要定理及其定理的详细证明过程。最后对本文进行了总结。

2. 预备知识

为了便与讨论，我们引入了已知序列 $\{b_k;k\ge0,\}$，$\{a_k;k\ge1\}$ 的母函数 $B(s)$，$A(s)$，

$$B(s)=\sum_{k=0}^{\infty}b_ks^k\ ,\quad A(s)=\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k\ .$$

显然，$B(s)$ 和 $A(s)$ 在 $[-1,1]$ 是有限的，$B(1)=A(1)=0$，且 $B(1),A(1)$ 分别为该系统的平均出生率和平均移民率。

定义拉普拉斯变换：

$$\phi_W(u,t)=E\left[\mathrm{e}^{-uW(t)}\right],\quad \phi_W(u)=E\left[\mathrm{e}^{-uW}\right]=\lim_{t\to\infty}E\left[\mathrm{e}^{-uW(t)}\right] \tag{2.1}$$

$$\phi_V(u,t)=E\left[\mathrm{e}^{-uV(t)}\right],\quad \phi_V(u)=E\left[\mathrm{e}^{-uV}\right]=\lim_{t\to\infty}E\left[\mathrm{e}^{-uV(t)}\right] \tag{2.2}$$

$\phi_W(u,t)$满足泛函方程：

$$\phi_W\left(\mathrm{e}^{mt}u\right)=F\left(\phi_W(u),t\right). \tag{2.3}$$

引理 2.1. 假设$b_0=0$，则下列方程成立

$$\phi_V\left(\mathrm{e}^{mt}u\right)=\phi_I\left(\mathrm{e}^{mt}u\right)G\left(\phi_W(u)\right). \tag{2.4}$$

证明：

$$\begin{aligned}\phi_V\left(\mathrm{e}^{mt}u\right)&=E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-mt}uZ(t)/C(t)}\right]\\&=\sum_{l=1}^{\infty}E\left[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-mt}u\frac{Z(t)}{C(t)}}\middle|Z(0)=l\right]P\left(Z(0)=l\right)\\&=\sum_{l=1}^{\infty}H\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-mt}u/C(t)},t\right)F^l\left(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-mt}u/C(t)},t\right)P\left(Z(0)=l\right)\\&=\phi_I(u)G\left(\phi_W(u)\right).\end{aligned}$$

引理 2.2. ([3]，引理 4) 对于$\phi_W(u,t)=E\left[\mathrm{e}^{-uW(t)}\right]$，下面的估计成立

$$\sup_{k\to\infty}\sup_{x\to\infty}\phi_k(u)=c<1.$$

命题 2.1. 对于任意$j\ge1$，

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}\cdot p_{1j}(t)=q_j,$$

$q_1=1$，$q_1\le\prod_{k=1}^{j-1}\left(1+\frac{a_0}{kb_1}\right)(j\ge2)$。同时$Q(s)=\sum_{j=0}^{\infty}q_js^j$是以下方程的唯一解

$$B(s)Q'(s)+\left(A(s)-a_0-b_1\right)Q(s)=0,\ 0\le s\le1. \tag{2.5}$$

当$0\le s\le1$，$Q(0)=0$，$Q'(0)=1$，$Q(1)=\infty$，$Q(s)<\infty$。

为方便参考，我们将 Sun [5]已有结果列出如下：

定理 2.1. [5] Z_n表示第n代的种群数量，假设$p_0=0$，$m>1$并且移民满足$E[\log Y]<\infty$，令

$$a_n(r)=\begin{cases}\left(p_1h_0\right)^{-n}, & p_1h_0m^r>1\\ \left(p_1h_0\right)^{-n}\sum_0^{n-1}\left(\left(p_1h_0\right)^{-k}C_k^{-r}\right)^{-1}, & p_1h_0m^r=1\\ C_n^r, & p_1h_0m^r<1.\end{cases}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}a_n(r)E\left[Z_n^{-r}\right]=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}\int_0^{\infty}\psi\left(\mathrm{e}^{-u}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u, & p_1h_0m^r>1\\ \int_0^{\infty}\psi\left(\varphi_w(u)\right)\frac{\varphi_v(u)}{\varphi_w(u)}u^{r-1}\mathrm{d}u, & p_1h_0m^r=1\\ \int_0^{\infty}\varphi_v(u)u^{r-1}\mathrm{d}u, & p_1h_0m^r<1.\end{cases}$$

其中$g_n(s)=\prod_{i=0}^{n-1}h\left(f_i(s)\right)f_n(s)$是离散带移民分支过程的母函数。$h(s)=\sum_{i=0}^{\infty}h_is^i$，$f(s)=\sum_{i=0}^{\infty}p_is^i$分别表

示移民部分和分支部分的母函数。$\psi_n(s):=\frac{g_n(s)}{(p_1h_0)^n}\to\psi(s)$，$n\to\infty$。$\varphi_W(u)=E\left[e^{-uW}\right]=\lim_{n\to\infty}E\left[e^{-uW_n}\right]$，$\varphi_V(u)=E\left[e^{-uV}\right]=\lim_{n\to\infty}E\left[e^{-uV_n}\right]$。

3. 主要定理及其证明

本节我们研究上临界 GWI 过程，其中移民不恒为零，我们探究总粒子数 $Z(t)$ 的调和矩，即

$$\tau(t,r)=E\left[Z(t)^{-r}\right],r>0.$$

的收敛速率和收敛极限。

定理 3.1. 假设移民部分满足 $E[\log Y]<\infty$，定义 $q=b_1+a_0+mr$，

令

$$I(t,r)=\begin{cases}e^{-(b_1+a_0)t}, & q>0.\\ C_t^r, & q<0.\end{cases}$$

则

$$\lim_{t\to\infty}I(t,r)E(Z(t))^{-r}=\frac{1}{\Gamma(r)}\begin{cases}\int_0^\infty Q\left(e^{-u}\right)u^{r-1}du, & q>0,\\ \int_0^\infty \phi_V(u)u^{r-1}du, & q<0.\end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $\phi(\cdot)$，$Q(\cdot)$ 分别由(2.3)，(2.4)，命题 2.1 定义。

对于任意随机变量 X，有

$$X^{-r}=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty e^{-\xi X}\xi^{r-1}d\xi,$$

其中 $\Gamma(r)=\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{r-1}d\xi$ 为伽玛函数。

令 $X=Z(t)$ 并在等式两端同时取期望可得

$$\begin{aligned}\tau(t,r)&=E\left[Z(t)\right]^{-r}\\&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty E\left[e^{-\xi Z(t)}\right]\xi^{r-1}d\xi\\&=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty G\left(t,e^{-\xi}\right)\xi^{r-1}d\xi\end{aligned}$$

记 $\tau(t,r):=\frac{1}{\Gamma(r)}T(t,r)$，现将 $T(t,r)$ 分为三部分之和：

$$\begin{aligned}T(t,r)&=\left(\int_0^{C_t^{-1}}+\int_{C_t^{-1}}^1+\int_1^\infty\right)G\left(e^{-\xi},t\right)\xi^{r-1}d\xi\\&:=M_1(t)+M_2(t)+M_3(t).\end{aligned}$$

其中 $C_t=e^{mt}$，对于足够大的整数 m。

引理 3.1. 对于任意的 $x>0$，有

$$\int_x^\infty Q\left(e^{-\xi}\right)\xi^{r-1}d\xi<\infty.$$

证明：令 $u=e^{-\xi}$，上式等价于

$$\int_x^{\infty}\frac{Q(u)}{u}(-\log u)^{r-1}\mathrm{d}u,$$

由 $Q(u)$ 的定义我们知 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{Q(u)}{u}=Q'(u)=1$，即对于任意的 $0<u<1$，都存在常数使得 $\frac{Q(u)}{u}\le C<\infty$ 成立。再令 $v=-\log u$， 于是得到

$$\int_0^{e^x}\frac{Q(u)}{u}(-\log u)^{r-1}\mathrm{d}u\le C\int_0^{e^x}(-\log u)^{r-1}\mathrm{d}u\le C\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-v}v^{r-1}\mathrm{d}v<\infty.$$

引理 3.2. ($M_1(t)$ 的渐近行为)

如果 $q>0$， 那么

$$\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_1(t)=0,$$

如果 $q<0$， 那么

$$\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_1(t)=\int_0^1\phi_v(u)u^{r-1}\mathrm{d}u.$$

证明： $M_1(t)=\int_0^{C_t^{-1}}G\left(\mathrm{e}^{-\xi},t\right)\xi^{r-1}\mathrm{d}\xi$，

令 $u=C_t\xi$， 当 $t\to\infty$ 时，

$$C_t^rM_1(t)=\int_0^1G\left(\mathrm{e}^{-u/C_t},t\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\to\int_0^1E\left(\mathrm{e}^{-uZ(t)/C_t}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u.$$

如果 $q>0$， 则有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_1(t)&=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t}C_t^{-r}\int_0^1G\left(\mathrm{e}^{-u/C_t},t\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=\mathrm{e}^{-(b_1+a_0+mr)t}\int_0^1E\left(\mathrm{e}^{-uZ(t)/C_t},t\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=0.\end{aligned}$$

如果 $q<0$， 根据定义 $I(t,r)=C_t^r$， 则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_1(t)&=\lim_{t\to\infty}\int_0^1G\left(\mathrm{e}^{-u/C_t},t\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\\&=\int_0^1\phi_v(u)u^{r-1}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

即得证。

引理 3.3. ($M_2(t)$ 的渐近行为)

如果 $q>0$， 那么

$$\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_2(t)=\int_1^{\infty}Q\left(\mathrm{e}^{-u}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u,$$

如果 $q<0$， 那么

$$\lim_{t\to\infty}I(t,r)M_2(t)=\int_1^{\infty}\phi_v(u)u^{r-1}\mathrm{d}u.$$

证明： $M_2(t)=\int_{C_t^{-1}}^1G\left(\mathrm{e}^{-\xi},t\right)\xi^{r-1}\mathrm{d}\xi$

我们把时间 t 分成离散格子的形式，即 n 个长度为 h 的格子，则

$$\begin{aligned}M_2(t)&=\int_{C_{nh}^{-1}}^1G\left(\mathrm{e}^{-\xi},nh\right)\xi^{r-1}\mathrm{d}\xi\\&=\sum_{k=1}^n\int_{C_{kh}^{-1}}^{C_{(k-1)h}^{-1}}G\left(\mathrm{e}^{-\xi},nh\right)\xi^{r-1}\mathrm{d}\xi\end{aligned},\tag{3.2}$$

取等量代换 $v = C_t \xi$，(3.2)式转化为：

$$\begin{aligned} M_2(t) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{C_{kh}^{-1}}^{C_{(k-1)h}^{-1}} G\left(\mathrm{e}^{-\xi}, nh\right) \xi^{r-1} \mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{1}^{C_h} G\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}}, nh\right) v^{r-1} \mathrm{e}^{-mkhr} \mathrm{d}v \end{aligned}, \tag{3.3}$$

由 Li [9]知，(3.3)式右端等于上式右端

$$\sum_{k=1}^{n} H\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}^{-1}}, kh\right) \int_{1}^{C_h} G\left(F\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}^{-1}}, kh\right), (n-k)h\right) u^{r-1} \mathrm{e}^{-mkhr} \mathrm{d}v,$$

根据引理 2.2 我们有以下不等式

$$\begin{aligned} I(t,r) M_2(t) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} H\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}^{-1}}, kh\right) \frac{G\left(F\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}^{-1}}, kh\right), (n-k)h\right)}{\mathrm{e}^{-(b_1+a_0)(n-k)h}} u^{r-1} \mathrm{e}^{-(b_1+a_0+mr)kh} \mathrm{d}v \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} Q\left(\phi_w(u)\right) u^{r-1} \mathrm{e}^{-(b_1+a_0+mr)kh} \mathrm{d}v \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} Q(c) u^{r-1} \mathrm{e}^{-(b_1+a_0+mr)kh} \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

因为 $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-(b_1+a_0+mr)kh}$ 对于固定的 h 收敛，我们有 $I(t,r) M_2(t)$ 有界。

当 $q > 0$ 时，

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r) M_2(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-(b_1+a_0)t} \int_{C^{-t}}^{1} G\left(\mathrm{e}^{-u}, t\right) u^{r-1} \mathrm{d}u = \int_{0}^{1} Q\left(\mathrm{e}^{-u}\right) u^{r-1} \mathrm{d}u \text{。}$$

当 $q < 0$ 时，

$$\begin{aligned} I(t,r) M_2(t) &= C_t^r \int_{C_t^{-1}}^{1} G\left(\mathrm{e}^{-\xi}, t\right) \xi^{r-1} \mathrm{d}\xi \\ &= C_{nh}^r \sum_{k=1}^{n} \int_{C_{kh}^{-1}}^{C_{(k-1)h}^{-1}} G\left(\mathrm{e}^{-\xi}, nh\right) \xi^{r-1} \mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

取 $v = C_{kh} \xi$，则

$$\begin{aligned} I(t,r) M_2(t) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{C_{nh}^r}{C_{kh}^r} \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} G\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}}, nh\right) v^{r-1} \mathrm{d}v \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_{jh}^r \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} H\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}}, jh\right) \cdot G\left(F\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}}, jh\right), kh\right) v^{r-1} \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

根据(2.3)和(2.4)上式右边

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} C_{jh}^r \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} H\left(\mathrm{e}^{-v/C_{kh}}, jh\right) \cdot G\left(\phi_w(v, jh), kh\right) v^{r-1} \mathrm{d}v \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_{jh}^r \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} \phi_I(v) \cdot G\left(\phi_w(v, jh), kh\right) v^{r-1} \mathrm{d}v \\ &= \sum_{k=1}^{n} C_{jh}^r \int_{1}^{\mathrm{e}^{mh}} \phi_V\left(\mathrm{e}^{mjh} v\right) v^{r-1} \mathrm{d}v, \end{aligned}$$

令 $u = C_{jh} v$，则

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r) M_2(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{C_{kh}^{-1}}^{C_{(k-1)h}^{-1}} \phi_V(u) u^{r-1} \mathrm{d}u = \int_{1}^{\infty} \phi_V(u) u^{r-1} \mathrm{d}u.$$

即得证。

引理 3.4. ($M_3(t)$ 的渐近行为)

如果 $q>0$，那么

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r)M_3(t)=\int_1^{\infty} Q\left(\mathrm{e}^{-u}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\text{，}$$

如果 $q<0$，那么

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r)M_3(t)=0\text{.}$$

证明：$M_3(t)=\int_1^{\infty} G\left(\mathrm{e}^{-\xi},t\right)\xi^{r-1}\mathrm{d}\xi$

当 $q>0$ 时，由 Q 性质及引理 3.3 的证明，可知：

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r)M_3(t)=\int_1^{\infty} Q\left(\mathrm{e}^{-u}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u\text{.}$$

当 $q<0$ 时，取等量代换 $u=C_t\xi$，

$$M_3(t)=\int_{C_t}^{\infty} G\left(\mathrm{e}^{-u/C_t},t\right)u^{r-1}C_t^{-r}\mathrm{d}u\text{，}$$

$$\lim_{t\to\infty} I(t,r)M_3(t)=\lim_{t\to\infty}\int_{C_t}^{\infty} G\left(\mathrm{e}^{-u/C_t}\right)u^{r-1}\mathrm{d}u=0\text{.}$$

结合引理 3.2，引理 3.3，引理 3.4，定理 3.1 即得证。

4. 结论

这篇文章主要介绍带移民分支过程矩的渐进性质，在证明过程中我们将时间 t 分成 n 等分，在此基础上进行分析研究，所得结果包括的调和矩，如定理 3.1 所示。作为副产品我们也得到了带移民分支过程的一个泛函方程，如引理 2.1 所示。

参考文献

[1] Li, J., Chen, A. and Pakes, A.G. (2012) Asymptotic Properties of the Markov Branching Process with Immigration. *Journal of Theoretical Probability*, **25**, 122-143. https://doi.org/10.1007/s10959-010-0301-z

[2] Athreya, K.B. and Ney, P.E. (1972) Branching Processes. https://doi.org/10.1007/978-3-642-65371-1

[3] Nagaev, A.V. (1967) On Estimating the Expected Number of Direct Descendants of a Particle in a Branching Process. *Theory of Probability and Its Applications*, **12**, 314-320. https://doi.org/10.1137/1112037

[4] Heyde, C.C. and Brown, B.M. (1971) An Invariance Principle and Some Convergence Rate Results for Branching Processes. *Probablility Theory and Related Fields*, **20**, 271-278. https://doi.org/10.1007/BF00538373

[5] Ney. P.E. and Vidyashankar, A.N. (2003) Harmonic Moments and Large Deviation Rates for Supercritical Branching Processes. *The Annals of Applied Probability*, **13**, 475-489. https://doi.org/10.1214/aoap/1050689589

[6] Pakes, A.G. (1975) Non-Parametric Estimation in the Galton-Watson Process. *Mathematical Biosciences*, **26**, 1-18. https://doi.org/10.1016/0025-5564(75)90091-7

[7] Sun, Q. and Zhang, M. (2017) Harmonic Moments and Large Deviations for Supercritical Branching Processes with Immigration. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 1201-1220. https://doi.org/10.1007/s11464-017-0642-3

[8] Li, D.D. and Zhang, M. (2021) Harmonic Moments and Large Deviations for a Critical Galton-Watson Process with Immigration. *Science China* (*Mathematics*), **64**, 1885-1904. https://doi.org/10.1007/s11425-019-1676-x

[9] Li, J., Cheng, L. and Li, L. (2021) Long Time Behaviour for Markovian Branching-Immigration Systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, **31**, 37-57. https://doi.org/10.1007/s10626-020-00323-z