Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1381-1388
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135141

mC_7的点被多重色集合可区别的I-全染色和VI-全染色

王娜娜

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月21日；录用日期：2023年5月23日；发布日期：2023年5月30日

摘 要

通过构造以多重色集合和空集为元素的矩阵，应用组合分析法及构造具体染色的方法，得到了mC_7的点被多重色集合可区别的I-全染色和VI-全染色的全色数及最优染色方案。

关键词

mC_7，I-全染色，VI-全染色，多重集，色集合，点可区别

I-Total Coloring and VI-Total Coloring of mC_7 Which Are Vertex-Distinguishing by Multiple Sets

Nana Wang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 21st, 2023; accepted: May 23rd, 2023; published: May 30th, 2023

Abstract

By use of the method of constructing a matrix whose entries are the suitable multiple sets or empty sets and the method of distributing color set in advance, we will give the optimal I-(VI-) total colorings of mC_7 which are vertex-distinguished by multiple sets in this paper. Thereby, we obtain I-(VI-) total chromatic numbers of mC_7 which are vertex-distinguished by multiple sets.

Keywords

mC7, I-Total Coloring, VI-Total Coloring, Multiset, Color Set, Vertex-Distinguishing

文章引用: 王娜娜. mC_7的点被多重色集合可区别的 I-全染色和 VI-全染色[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1381-1388.
DOI: 10.12677/pm.2023.135141

1. 引言及准备工作

本文所探讨的图均为有限简单无向图。关于图的点可区别正常边染色与图的点可区别一般边染色目前已有较多结论[1]-[7]。2008 年，Zhang 等[8]提出了点可区别的全染色及相关猜想，图的点可区别 I-全染色及相关猜想由 Chen 等[9]在 2014 年给出。对于图在非多重集上的点可区别的未必正常的全染色已有许多研究成果[10] [11] [12]。本文考虑图在多重集上的点可区别的一类未必正常全染色。

设 $f:V\cup E\to\{1,2,\cdots,l\}$ 为图 G 的一个一般全染色(未必正常)。若对 $\forall u,v\in V$，u,v 相邻，有 $f(u)\neq f(v)$，且对 $uv,vw\in E$，$uv\neq vw$，有 $f(uv)\neq f(vw)$，则称该染色 f 为图 G 的 I-全染色。若在 f 下图 G 的任意两条相邻边染以不同颜色，则称 f 为 VI-全染色。显然 I-全染色是 VI-全染色。图 G 使用了 l 种颜色的 I-全染色(VI-全染色)，称为图 G 的 l-I-全染色(l-VI-全染色)。这里需要注意是，在本文中这样表述时总认为所使用的颜色是 $\{1,2,\cdots,l\}$。

设 f 为图 G 的一般全染色。对 $\forall x\in V(G)$，将 $\tilde{C}_f(x)$ 或 $\tilde{C}(x)$ (不引起混淆时)称为点 x 的多重色集合，是由点 x 的颜色和点 x 关联的边的颜色构成。显然有 $\left|\tilde{C}_f(x)\right|=d_G(x)+1$，若称 f 是点被多重色集合可区别的，则是指 $\forall u,v\in G$，总有 $\tilde{C}(u)\neq\tilde{C}(v)$。令

$$\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)=\min\{l\,|\,G\text{存在点被多重色集合可区别的}l\text{-I-全染色}\},$$

$$\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)=\min\{l\,|\,G\text{存在点被多重色集合可区别的}l\text{-VI-全染色}\}。$$

将 $\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)$ 称为点被多重色集合可区别的 l-I-全色数，将 $\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)$ 称为点被多重色集合可区别的 l-VI-全色数。用 $n_i(G)$ 表示图 G 的度为 i 的顶点的个数，$\delta\le i\le\Delta$，这里 δ 和 Δ 分别表示图 G 的最小度和最大度。规定

$$\tilde{\zeta}(G)=\min\left\{l\,|\,i\binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}\ge n_i,\delta\le i\le\Delta\right\}。$$

上式中加号前面的项表示点的色是其关联边的颜色之一，$\binom{l}{i}$ 表示从 l 种互异的颜色中取出 i 种互不相同的颜色的取法数，对每种这样的取法，点的色的取法共有 i 种，因此共有 $i\binom{l}{i}$ 种；加号后面的项表示点的色不是其关联边的颜色，此时点的多重色集合里的 $i+1$ 种颜色互不相同，具有这种特点的 $i+1$-子集，共有 $\binom{l}{i+1}$ 个。

引理 1 $\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)\ge\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)\ge\tilde{\zeta}(G)$

证明令 $s=\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)$。图 G 中存在使用了 s 种色的点被多重色集合可区别的 I-全染色，而它也是图 G 的使用了 s 种色的点被多重色集合可区别的 VI-全染色。故 $s\in\{k\,|\,G$ 存在点被多重色集合可区别的 k-VI-全染色$\}$。而

$$\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)=\min\{k\,|\,G\text{存在点被多重色集合可区别的}k\text{-VI-全染色}\},$$

因此 $\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)\le s$。即 $\tilde{\chi}_{vt}^{vi}(G)\le\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)$。

再令 $t=\tilde{\chi}_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{vi}}(G)$。则图 G 存在使用了 t 种色的点被多重色集合可区别的 VI-全染色。从而对 $\delta\le i\le\Delta$，考虑度为 i 的顶点，我们有

$$i\binom{t}{i}+\binom{t}{i+1}\ge n_i .$$

所以 $t\in\left\{l\,|\,i\binom{l}{i}+\binom{l}{i+1}\ge n_i,\delta\le i\le\Delta\right\}$。故 $t\ge\tilde{\zeta}(G)$，即 $\tilde{\chi}_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{vi}}(G)\ge\tilde{\zeta}(G)$，得证。

为了在定理证明过程中构造最优的点被多重色集合可区别的 I-全染色和 VI-全染色的方便，我们先定义一类矩阵。对任意的 $l\ge4$，构造 $l\times(l-1)$ 矩阵 $A_{l\times(l-1)}$，使矩阵 $A_{l\times(l-1)}$ 的元素是集合 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的含 l 的多重 3-子集或空集，其中第 i 列含有 $i-1$ 个 $\varnothing$：

$$A_{l\times(l-1)}=\begin{pmatrix}\{1,1,l\} & \{2,2,l\} & \{3,3,l\} & \cdots & \{l-2,l-2,l\} & \{l-1,l-1,l\}\\ \{1,2,l\} & \{2,3,l\} & \{3,4,l\} & \cdots & \{l-2,l-1,l\} & \{l-1,l,l\}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \{1,l-1,l\} & \{2,l,l\} & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing\\ \{1,l,l\} & \varnothing & \varnothing & \cdots & \varnothing & \varnothing\end{pmatrix}$$

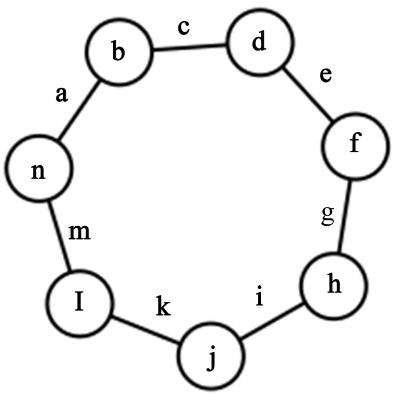

Figure 1. Total coloring of C_7
图 1. 一个 C_7 的全染色

将如图 1 所示的 C_7 的全染色记为：$a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n$。

对于 C_7 的点被多重色集合可区别的 I-全染色，据 $A_{l\times(l-1)}$ 定义为如下四种分类：

类型 I 当 $j\equiv1(\mathrm{mod}\,2)$ 时，若 $A_{l\times(l-1)}$ 中存在 $\{j,j,l\},\{j,l-2,l\},\{j,l-1,l\},\{j,l,l\},\{j+1,j+1,l\},\{j+1,l-1,l\},\{j+1,l,l\}$，这 7 个 3-子集是某个 C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色下的各顶点的色集合，其染色方案为 $l,j,j,l,l,j+1,j+1,l,l,j+1,l-1,l,j,l-2$。

类型 II 当 l 为奇数时，$A_{l\times(l-1)}$ 的第 $l-1,\ l-2,\ l-3,\ l-4$ 列的 7 个 3-子集 $\{l-1,l-1,l\},\{l-1,l,l\},\{l-2,l-2,l\},\{l-2,l-1,l\},\{l-2,l,l\},\{l-3,l-2,l\},\{l-4,l-3,l\}$，恰是一个 C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色下的各顶点的色集合，其染色方案为 $l,l-2,l-2,l,l,l-1,l-1,l,l,l-1,l-2,l,l-3,l-4$；当 l 为偶数时，$A_{l\times(l-1)}$ 的第 $l-1,l-4,l-5,l-6,l-7$ 列的 14 个 3-子集可对 2 个 C_7 进行点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，其分别为 $\{\{l-1,l-1,l\},\{l-1,l,l\},\{l-4,l-3,l\},\{l-4,l-2,l\},\{l-5,l-4,l\},\{l-5,l-3,l\},\{l-6,l-2,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,\ l-1,\ l-1,\ l,\ l,\ l-6,\ l-2,\ l-4,\ l,\ l-3,\ l-4,\ l,\ l-5,\ l-3$；$\{\{l-7,l-6,l\},\{l-7,l-5,l\},\{l-7,l-4,l\},\{l-7,l-3,l\},\{l-6,l-5,l\},\{l-6,l-4,l\},\{l-6,l-3,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-6,l-7,l-5,l,l-4,$

$l-6,l-5,l,l-6,l-3,l,l-7,l-4$。

类型 III 当 $i\equiv 2(\bmod 7), j\equiv 1(\bmod 2)$ 时，若 $A_{l\times(l-1)}(i,i+1,i+2,i+3,i+4,i+5,i+6\mid j,j+1)$ 中的 14 个 3-子集都非空，则可对 2 个 C_7 进行点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，其分别为 $\{\{j,j+i-1,l\},\{j,j+i,l\},\{j,j+i+1,l\},\{j,j+i+2,l\},\{j+1,j+i,l\},\{j+1,j+i+1,l\},\{j+1,j+i+2,l\}\}$，所对应的染色方案为 $l,j+i-1,j,j+i,l,j+i+1,j+1,j+i,l,j+1,j+i+2,l,j,j+i+1$；$\{\{j,j+i+3,l\},\{j,j+i+4,l\},\{j,j+i+5,l\},\{j+1,j+i+3,l\},\{j+1,j+i+4,l\},\{j+1,j+i+5,l\},\{j+1,j+i+6,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,j+i+4,j,j+i+5,l,j+i+6,j+1,j+i+5,l,j+i+4,j+1,l,j+i+3,j$。

类型 IV $A_{l\times(l-1)}$ 经类型 I，类型 II，类型 III 的染色划分后，当 $i-1\equiv 1(\bmod 7), j\equiv 1(\bmod 2)$，则有如下 3 种类似类型 III 的分类。下述 3 种情形中两个子矩阵中的 i,j 均不同，为表区分我们把第二个子矩阵中的 i,j 记为 i_d,j_d。

情形Ⓐ，若 $A_{l\times(l-1)}$ 中同时存在 $A_{l\times(l-1)}(i,i+1,i+2,i+3,i+4,i+6\mid j,j+1)$，$A_{l\times(l-1)}(i_d\mid j_d,j_d+1)$，这两个子矩阵中的14个3-子集恰是2个 C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，其分别为 $\{\{j,l-8,l\},\{j,l-7,l\},\{j,l-6,l\},\{j,l-5,l\},\{j+1,l-7,l\},\{j+1,l-6,l\},\{j+1,l-5,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-8,j,l-7,l,l-6,j+1,l-7,l,j+1,l-5,l,j,l-6$；$\{\{j,l-4,l\},\{j,l-3,l\},\{j+1,l-4,l\},\{j+1,l-3,l\},\{j+1,l-2,l\},\{j_d,l-3,l\},\{j_d+1,l-2,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-4,j,l-3,l,j_d+1,l-2,j+1,l,l-4,j+1,l,l-3,j_d$。

情形Ⓑ，若 $A_{l\times(l-1)}$ 中同时存在 $A_{l\times(l-1)}(i,i+1,i+2,i+3,i+4\mid j,j+1)$，$A_{l\times(l-1)}(i_d,i_d+1\mid j_d,j_d+1)$，这两个子矩阵中的14个3-子集恰是2个 C_7 的点被多重色集合可区别 l-I-全染色，其分别为 $\{\{j,l-7,l\},\{j,l-6,l\},\{j,l-5,l\},\{j,l-4,l\},\{j+1,l-6,l\},\{j+1,l-5,l\},\{j+1,l-4,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-7,j,l-6,l-5,j+1,l-6,l,j+1,l-4,l,j,l-5$；

$\{\{j,l-3,l\},\{j+1,l-3,l\},\{j+1,l-2,l\},\{j_d,l-5,l\},\{j_d,l-4,l\},\{j_d+1,l-4,l\},\{j_d+1,l-3,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-2,j+1,l,l-3,j,l,l-5,j_d,l-4,l,l-3,j_d+1,l-4$。

情形Ⓒ，若 $A_{l\times(l-1)}$ 中同时存在 $A_{l\times(l-1)}(i,i+1,i+2,i+3\mid j,j+1)$，$A_{l\times(l-1)}(i_d,i_d+1,i_d+1\mid j_d,j_d+1)$，这两个子矩阵中的 14 个 3-子集恰是 2 个 C_7 的点被多重色集合可区别 l-I-全染色，其分别为 $\{\{j,l-6,l\},\{j,l-5,l\},\{j,l-4,l\},\{j,l-3,l\},\{j+1,l-5,l\},\{j+1,l-4,l\},\{j+1,l-3,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,l-6,j,l-5,l,l-4,j+1,l-5,l,j+1,l-3,l,j,l-4$；

$\{\{j+1,l-2,l\},\{j_d,l-5,l\},\{j_d,l-4,l\},\{j_d,l-3,l\},\{j_d+1,l-4,l\},\{j_d+1,l-3,l\},\{j_d+1,l-2,l\}\}$ 所对应的染色方案为 $l,j+1,l-2,j_d+1,l,l-4,j_d,l-5,l,j_d,l-3,l,j_d+1,l-4$。

2. 主要结果及其证明

定理 1 若 $2\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}<7m\le 2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}, m\ge 1, l\ge 4$，则 $\tilde{\chi}_{vt}^{i}(mC_7)=l$。

证明显然有 $l=\tilde{\zeta}(mC_7)\le\tilde{\chi}_{vt}^{i}(G)$，因此我们可直接对 mC_7 进行点被多重色集合可区别的 l-I-全染色。

① $l=3$ 的 3-子集有 $\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{1,1,3\},\{1,3,3\},\{2,2,3\},\{2,3,3\},\{1,2,3\}$，这 7 个 3-子集不能对一个 C_7 进行点被多重色集合可区别的 3-I-全染色。

证明反证法。假设 C_7 存在点被多重色集合可区别的 3-I-全染色 f。

1) f 存在一种颜色只染一条边，另两种颜色都各染 3 条边，不妨设 3 只染了一条边，而 1，2 都各染 3 条边。如图 2 所示，$\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3,\upsilon_4,\upsilon_5$ 在 f 下的色集合只可能是 3 种：$\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{1,2,3\}$。矛盾。

2) f 中每种颜色都至少染 2 条边，不妨设 1，3 都染两条边，而 2 染了 3 条边。有如下两种情形：

a) 如图 3 所示，$\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_7$ 的色集合只能是 $\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{1,2,3\}$（不计顺序），$\{1,2,3\}$ 必是 $\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_7$ 其中之一的色集合，$\{1,2,3\}$ 必不是 $\upsilon_3,\upsilon_4,\upsilon_5$ 的色集合。那么 $\upsilon_3,\upsilon_4,\upsilon_5$ 中必有 2 个点的色集合相同。矛盾。

b) 如图 4 所示，$\upsilon_3,\upsilon_4,\upsilon_7$ 其中之一的色集合为 $\{1,2,3\}$，$\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_5$ 其中之一的色集合为 $\{1,2,3\}$。矛盾。综上，C_7 不存在点被多重色集合可区别的 3-I-全染色。

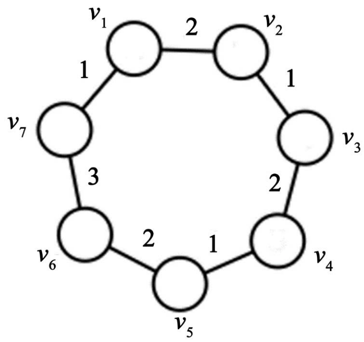

Figure 2. Coloring of C_7
图 2. 一个 C_7 的染色

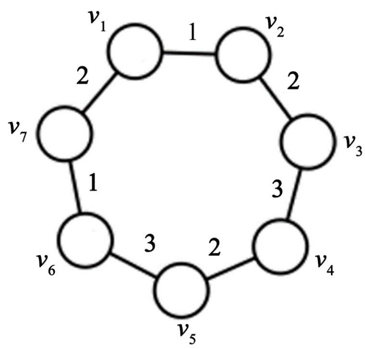

Figure 3. Coloring of C_7
图 3. 一个 C_7 的染色

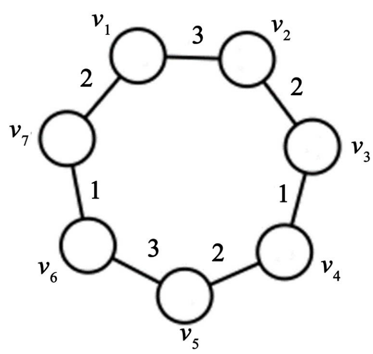

Figure 4. Coloring of C_7
图 4. 一个 C_7 的染色

② 当 $m=2$ 时，$l=4$。用 $\{1,1,2\},\{1,2,2\},\{1,1,3\},\{2,2,3\},\{2,3,3\},\{1,2,3\},\{2,3,4\}$ 给第一个 C_7 进行染色即染色为 $2,4,3,2,2,1,1,2,2,3,3,1,1,3$。用 $\{1,3,3\},\{1,1,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,2,4\},\{2,4,4\},\{3,4.4\}$ 给第二个 C_7 即染色为 $1,3,3,4,4,2,2,4,4,3,1,1,4,2$。于是将多重 3-子集 $\{1,4,4\},\{3,3,4\}$ 剩余。

③ 当$3\le m\le 4$时，$l=5$。在 $2C_7$ 的基础上，下面我们从第 3 个 C_7 开始进行染色。由类型 I 知 A_5 可对 1 个 C_7 用染色方案$5,1,1,5,5,2,2,5,5,2,4,5,1,3$进行染色，由类型 II 知 A_5 可对 1 个 C_7 用染色方案$5,3,3,5,5,4,4,5,5,4,3,5,2,1$进行染色。上述染色中用完了$\{1,2,3,4,5\}$中含 5 的多重 3-子集，此时仍有多重 3-子集$\{1,4,4\},\{3,3,4\}$剩余。

④ 当$5\le m\le 7$时，$l=6$。在上一步染色基础上我们从第 5 个 C_7 开始进行染色。由类型 I 知 A_6 可对 2 个 C_7 分别用染色方案$6,1,1,6,6,2,2,6,6,2,5,6,1,4$和$6,3,3,6,6,4,4,6,6,4,5,6,3,4$去染。此时 A_6 的剩余元素有$\{1,2,6\},\{1,3,6\},\{2,3,6\},\{2,4,6\},\{5,5,6\},\{5,6,6\}$。将其与②遗留的$\{3,3,4\}$组合用染色方案$6,5,5,6,6,1,2,3,6,2,4,3,3,1$对第 7 个 C_7 进行染色。上述染色中用完了$\{1,2,3,4,5,6\}$中含 6 的多重 3-子集，此时仍有多重 3-子集$\{1,4,4\}$剩余。

⑤ 当$8\le m\le 11$时，$l=7$。在前 $7C_7$ 的点被多重色集合可区别 I-全染色的基础上，下面对第 8 个 C_7 到第 11 个 C_7 进行染色。由类型 I 和类型 II 知 A_7 可对 3 个 C_7 分别用染色方案$7,1,1,7,7,2,2,7,7,2,6,7,1,5$；$7,3,3,7,7,4,4,7,7,4,6,7,3,5$和$7,5,5,7,7,6,6,7,7,6,5,7,4,3$去染。此时有 3-子集$\{1,2,7\},\{1,3,7\},\{1,4,7\},\{2,3,7\},\{2,4,7\},\{2,5,7\}$剩余，将其与②遗留的$\{1,4,4\}$组合用染色方案$7,2,1,4,7,3,2,5,7,2,4,1,1,3$对第 11 个 C_7 进行染色。至此，用完了$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的所有多重 3-子集。

⑥ 当$12\le m\le 16$时，$l=8$。在前 $11C_7$ 的点被多重色集合可去别 I-全染色的基础上从第 12 个 C_7 开始进行染色。由类型 I 和类型 II 知 A_8 可对 5 个 C_7 分别用染色方案$8,1,1,8,8,2,2,8,8,2,7,8,1,6$；$8,3,3,8,8,4,4,8,8,4,7,8,3,6$；$8,5,5,8,8,6,6,8,8,5,7,8,6,5$；$8,2,1,3,8,4,2,3,8,2,5,8,1,4$和$8,7,7,8,8,2,6,4,8,5,4,8,3,5$去染。此时用完了$\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$的所有多重 3-子集。

⑦ l 是从 1 到它的整数(全文亦然)，让 l 从 9 开始递增，并且递归地进行如下过程。在已构造好的$\left\lfloor\frac{1}{7}\left[2\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}\right]\right\rfloor C_7$ 的点被多重色集合可区别$l-1$-I-全染色的基础上，对第$\left\lfloor\frac{1}{7}\left[2\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}\right]\right\rfloor+1$个 C_7 到第$\left\lfloor\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]\right\rfloor$个 C_7 的染色方案叙述如下。

当$l\equiv 2(\mathrm{mod}\,7),l\ge 9$时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-16\right]C_7$ 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，并且除$\{3,l-3,l\},\{4,l-2,l\}$之外用完了$\{1,2,\cdots,l\}$的其余所有多重 3-子集。

当$l\equiv 3(\mathrm{mod}\,7),l\ge 10$时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-14\right]C_7$ 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，除第 1，2 列的剩余元素及前述$\{3,l-4,l-1\},\{4,l-3,l-1\}$之外，用完了$\{1,2,\cdots,l\}$的其余所有多重 3-子集。用$\{1,l-8,l\},\{1,l-7,l\},\{1,l-6,l\},\{1,l-5,l\},\{2,l-7,l\},\{2,l-6,l\},\{2,l-5,l\}$对第$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-7\right]$个 C_7 进行 I-全染色，染色方案为$1,l-8,l,2,l-7,1,l,2,l-6,1,l,2,l-5,l$。用$\{1,l-4,l\},\{1,l-3,l\},\{2,l-4,l\},\{2,l-3,l\},\{2,l-2,l\}$与$\{3,l-4,l-1\},\{4,l-3,l-1\}$对第$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]$个 C_7 进行 I-全染色，染色方案为$l-4,3,l-1,4,l-3,2,l,l-4,1,l-3,l,l-2,2,l$。此时得到了$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]C_7$ 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色。

当$l\equiv 4(\mathrm{mod}\,7),l\ge 11$时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到$\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-2\right]C_7$ 的点被

多重色集合可区别的 l-I-全染色，除 $\{5,l-3,l\},\{6,l-2,l\}$ 之外用完了 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的其余所有多重 3-子集。

当 $l\equiv 5(\mathrm{mod}\,7), l\ge 12$ 时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-2\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，除上述剩余的 $\{5,l-4,l-1\},\{6,l-3,l-1\}$ 之外用完了 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的其余所有多重 3-子集。

当 $l\equiv 6(\mathrm{mod}\,7), l\ge 13$ 时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-8\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，除第 7，8 列的剩余元素及前述 $\{5,l-5,l-2\},\{6,l-4,l-2\}$ 之外，用完了 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的其余所有多重 3-子集。对第 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-1\right]$ 个 C_7 用 $\{7,l-5,l\},\{7,l-4,l\},\{7,l-3,l\},\{8,l-4,l\},\{8,l-3,l\},\{8,l-2,l\}$ 与 $\{5,l-5,l-2\}$ 进行 I-全染色，染色方案为 $l-2,5,l-5,7,l,l-4,7,l-3,l,l-4,8,l-3,l,8$。此时得到了 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-1\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色。

当 $l\equiv 0(\mathrm{mod}\,7), l\ge 14$ 时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}-7\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，除第 1，2 列的剩余元素及前述剩下的 $\{6,l-5,l-3\}$ 外用完了 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的其余所有多重 3-子集。对第 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]$ 个 C_7 用 $\{6,l-5,l-3\}$ 与 $\{1,l-5,l\},\{1,l-4,l\},\{1,l-3,l\},\{2,l-4,l\},\{2,l-3,l\},\{2,l-2,l\}$ 进行 I-全染色，染色方案为 $l-5,6,l-3,1,l,l-3,2,l-2,l,1,l-4,2,l,1$。至此，得到了 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色。

当 $l\equiv 1(\mathrm{mod}\,7), l\ge 15$ 时。由类型 I，类型 II，类型 III，类型 IV 可以得到 $\frac{1}{7}\left[2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}\right]$ C_7 的点被多重色集合可区别的 l-I-全染色，并且用完了 $\{1,2,\cdots,l\}$ 的所有多重 3-子集。

定理证毕。

定理 2 若 $2\binom{l-1}{2}+\binom{l-1}{3}<7m\le 2\binom{l}{2}+\binom{l}{3}, m\ge 1, l\ge 4$，则 $\tilde{\chi}_{\mathrm{vt}}^{\mathrm{vi}}(mC_7)=l$。

证明由引理 1 及定理 1 立得此结论。

参考文献

[1] Zhang, Z.F., Qiu, P.X., Xu, B.G., *et al.* (2008) Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs. *Ars Combinatoria*, **87**, 33-45.

[2] Chen, X.E. and Li, Z.P. (2014) Vertex-Distinguishing I-Total Colorings of Graphs. *Utilitas Mathematica*, **95**, 319-327.

[3] Liu, C.J. and Zhu, E.Q. (2014) General Vertex-Distinguishing Total Coloring of Graphs. *Journal of Applied Mathematics*, **2014**, Article ID: 849748. https://doi.org/10.1155/2014/849748

[4] Horňák, M. and Soták, R. (1996) The Fifth Jump of the Point-Distinguishing Chromatic Index of $k_{n,n}$. *Ars Combinatoria*, **42**, 233-242.

[5] Horňák, M. and Soták, R. (1997) Localization of Jumps of the Point-Distinguishing Chromatic Index of $k_{n,n}$. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **17**, 243-251. https://doi.org/10.7151/dmgt.1051

[6] Horňák, M. and Salvi, N.Z. (2006) On the Point-Distinguishing Chromatic Index of Complete Bipartite Graphs. *Ars Combinatoria*, **80**, 75-85.

[7] Salvi, N.Z. (1990) On the Value of the Point-Distinguishing Chromatic Index of $k_{n,n}$. *Ars Combinatoria*, **29B**, 235-244.

[8] 陈祥恩, 苗婷婷, 王治文. 两条路的联图的点可区别 I-全染色[J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(4): 30-33.

[9] 苗婷婷, 王治文, 陈祥恩. 圈与路联图点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色[J]. 大连理工大学学报, 2017, 57(4): 430-435.

[10] 苗婷婷, 王治文, 陈祥恩. $C_m \vee C_n, C_m \vee W_n, C_m \vee F_n$ 的点可区别 I-全染色和点可区别 VI-全染色[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2017, 56(6): 870-875.

[11] 杨晗, 陈祥恩. m 个阶为 4 的圈的不交并的点可区别 I-全染色和 VI-全染色[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2020, 59(1): 85-89.

[12] 赵亚迪, 陈祥恩. 图 mC_{15} 的点可区别 I-全染色和 VI-全染色[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(3): 497-512.