Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1355-1362
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135138

极大余挠模

杨娟妮*，杨晓燕

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月21日；录用日期：2023年5月22日；发布日期：2023年5月29日

摘 要

本文研究了极大余挠模的一些判定和同调性质，证明了极大平坦模类与极大余挠模类构成了完全且遗传的余挠对。

关键词

极大余挠模，极大平坦模，余挠对

Max-Cotorsion Modules

Juanni Yang*, Xiaoyan Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 21st, 2023; accepted: May 22nd, 2023; published: May 29th, 2023

Abstract

In this paper, we study some criterions and homological properties of max-cotorsion modules. It is proved that the class of max-flat modules and the class of max-cotorsion modules is a perfect and hereditary cotorsion pair.

*第一作者。

文章引用: 杨娟妮, 杨晓燕. 极大余挠模[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1355-1362.
DOI: 10.12677/pm.2023.135138

Keywords

Max-Cotorsion Module, Max-Flat Module, Cotorsion Pair

1. 引言

在本文中, 如果没有特别指出, 考虑的所有环是结合环, 所有模是酉模. 余挠模是同调代数与模论中的重要研究对象之一, 在代数几何和代数表示理论中有重要应用, 而且余挠模在对各种环的刻画中也起着很大的作用.

1959年, Harrison 在 [1] 中为了刻画非有限的 Abelian 群的结构和性质, 引入了余挠模的概念. 1996年, Xu 在 [2] 中系统的讨论了余挠模的相关性质, 证明了平坦模类与余挠模类构成了余挠对, 此外 Xu 还证明了每个 R 模是余挠模当且仅当环 R 是左完全环. 2000年, Trlifaj 在 [3] 中证明了平坦覆盖和余挠包络的存在性. 2005年, Mao 和 Ding 在 [4] 中进一步研究了余挠模的性质. 2010 年, Xiang 在 [5] 中利用平坦模的相关性质给出了极大平坦模的定义, 研究了极大平坦模的性质, 并利用模的极大平坦维数刻画了极大凝聚环. 2021年, Alagoz 在 [6] 中利用极大平坦模引入了极大余挠模, 利用极大平坦模和极大余挠模刻画了完全环, 极大遗传环, 并证明了每个模有一个极大平坦覆盖和一个极大余挠包络.

受此启发, 本文进一步研究了极大余挠模, 并类比余挠模对其相关性质做了讨论. 最后证明了极大平坦模类与极大余挠模类构成了完全且遗传的余挠对.

2. 预备知识

定义 2.1 ([7]) 设 $\mathcal{C}$ 是任意模类, M 是 R-模.

(1) 称态射 $\theta\colon C\to M$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-预覆盖, 如果 $C\in\mathcal{C}$ 并且对任意的态射 $f\colon C'\to M$, 其中 $C'\in\mathcal{C}$, 存在态射 $h\colon C'\to C$ 使得 $\theta h=f$. 称 $\mathcal{C}$-预覆盖 $\theta\colon C\to M$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-覆盖, 如果满足 $\theta\beta=\theta$ 的自同态 β 是自同构.

(2) 称态射 $\varphi\colon M\to C$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-预包络, 如果 $C\in\mathcal{C}$ 并且对任意的态射 $f\colon M\to C'$, 其中 $C'\in\mathcal{C}$, 存在态射 $g\colon C\to C'$ 使得 $g\varphi=f$. 称 $\mathcal{C}$-预包络 $\varphi\colon M\to C$ 是 M 的 $\mathcal{C}$-包络, 如果满足 $\eta\varphi=\varphi$ 的自同态 η 是自同构.

定义 2.2 ([8]) 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是两个模类.

(1) 称 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 为余挠对, 如果 $\mathcal{C}^{\perp}=\mathcal{D}, \mathcal{C}={}^{\perp}\mathcal{D}$, 其中

$$\mathcal{C}^{\perp}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(C,M)=0, \forall C\in\mathcal{C}\},$$

$$^{\perp}\mathcal{C}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(M,C)=0, \forall C\in\mathcal{C}\}.$$

(2) 称余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是完备的, 如果对任意 R-模 M, 有正合列 $0\to D\to C\to M\to 0$ 和 $0\to M\to D'\to C'\to 0$, 其中 $C,\ C'\in\mathcal{C},\ D,\ D'\in\mathcal{D}$.

(3) 称余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是完全的, 如果每个 R-模有一个 $\mathcal{C}$-覆盖和一个 $\mathcal{D}$-包络.

(4) 称余挠对 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 是遗传的, 如果对任意的短正合列

$$0\to A\to B\to C\to 0.$$

若 $B,\ C\in\mathcal{C}$, 则 $A\in\mathcal{C}$.

定义 2.3 ([5]) 称 R-模 A 是极大平坦模, 如果对 R 的任意极大理想 I, 有 $\mathrm{Tor}_1^R(A,R/I)=0$.

定义 2.4 ([4]) 称 R-模 A 是余挠模, 如果对任意平坦模 F, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(F,A)=0$.

3. 主要结果

我们首先给出 Alagoz 在 [6] 中引入的极大余挠模的定义.

定义 3.1 ([6]) 称 R-模 B 是极大余挠模, 如果对任意的极大平坦模 A, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0.$$

注记 3.2 由定义知, {内射模}⊆{极大余挠模}⊆{余挠模}.

引理 3.3 ([9], 定理 3) M 是极大平坦模当且仅当对任意单 R-模 $B, n\geq 1$, 有

$$\mathrm{Tor}_n^R(M,B)=0.$$

命题 3.4 对于 R-模 B, 以下几条是等价的：

(1) B 是极大余挠模.

(2) 对于每个极大平坦 R-模 $A, n \geq 1$, 有 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)=0$.

(3) 对于 R-模的每个正合列 $0\to F\to C\to A\to 0$, 其中 A 是极大平坦模, 函子 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 保持序列的正合性.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2) 对 n 用归纳法. 若 $n=1$, 则由定义可知成立. 假设结论对 $n-1$ 成立. 设 A 是极大平坦模. 考虑 R-模的正合列

$$0\to K\to A_0\to A\to 0,$$

其中 A_0 是自由的. 用 $-\otimes_R R/I$ 作用上述正合列得,

$$\mathrm{Tor}_2^R(A_0,R/I)\to \mathrm{Tor}_2^R(A,R/I)\to \mathrm{Tor}_1^R(K,R/I)\to \mathrm{Tor}_1^R(A_0,R/I).$$

因为 A_0 是自由的, 所以有 $\mathrm{Tor}_2^R(A_0,R/I)=\mathrm{Tor}_1^R(A_0,R/I)=0$. 于是

$$\mathrm{Tor}_2^R(A,R/I)\cong \mathrm{Tor}_1^R(K,R/I).$$

因为 I 是 R 的任意极大理想, 所以 R/I 是单模. 又因为 A 是极大平坦的, 所以由引理 3.3 可知

$$\mathrm{Tor}_2^R(A,R/I)=0.$$

于是 $\mathrm{Tor}_1^R(K,R/I)=0$. 则 K 是极大平坦模. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 作用上述短正合列后, 得

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(A_0,B)\to \mathrm{Ext}_R^{n-1}(K,B)\to \mathrm{Ext}_R^{n}(A,B)\to \mathrm{Ext}_R^{n}(A_0,B).$$

因为 A_0 是自由的, 所以 A_0 是投射的. 于是

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(A_0,B)=\ \mathrm{Ext}_R^{n}(A_0,B)=0.$$

所以 $\mathrm{Ext}_R^{n-1}(K,B)\cong\ \mathrm{Ext}_R^{n}(A,B)$. 又因为 K 是极大平坦的, 所以由归纳假设可知,

$$\mathrm{Ext}_R^{n-1}(K,B)=0.$$

所以 $\mathrm{Ext}_R^{n}(A,B)=0$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 考虑 R-模的正合列 $0\to F\to C\to A\to 0$, 其中 A 是极大平坦的. 用 $\mathrm{Hom}_R(-,B)$ 作用上述正合列后, 得到

$$0\to \mathrm{Hom}_R(A,B)\to \mathrm{Hom}_R(C,B)\to \mathrm{Hom}_R(F,B)\to \mathrm{Ext}_R^1(A,B).$$

因为 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0$, 所以

$$0\to \mathrm{Hom}_R(A,B)\to \mathrm{Hom}_R(C,B)\to \mathrm{Hom}_R(F,B)\to 0$$

正合.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 设 A 是极大平坦的. 考虑 R-模的正合列 $0 \to F \to C \to A \to 0$, 其中 C 是投射的. 我们有如下正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_R(C,B) \to \mathrm{Hom}_R(F,B) \to \mathrm{Ext}_R^1(A,B) \to \mathrm{Ext}_R^1(C,B) = 0.$$

由假设 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B) = 0$. 因此 B 是极大余挠模.

命题 3.5 若极大余挠模类关于直和封闭, 则以下等价:

(1) B 是极大余挠模.

(2) 对每个投射模 P, $P \otimes_R B$ 是极大余挠的.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 A 是极大平坦的, P 是一个投射 R-模. 则存在一个投射模 P' 使得对于某些指标集 I, 有 $R^{(I)} \cong P \oplus P'$. 因为 $R \otimes_R B \cong B$, 所以

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}_R^1(A, B^{(I)}) &\cong \mathrm{Ext}_R^1(A, R^{(I)} \otimes_R B) \\
&\cong \mathrm{Ext}_R^1(A, (P \oplus P') \otimes_R B) \\
&\cong \mathrm{Ext}_R^1(A, (P \otimes_R B) \oplus (P' \otimes_R B)) \\
&\cong \mathrm{Ext}_R^1(A, P \otimes_R B) \oplus \mathrm{Ext}_R^1(A, P' \otimes_R B)
\end{aligned}$$

因为极大余挠模类关于直和封闭, 所以 $B^{(I)}$ 是极大余挠模. 又因为 A 是极大平坦模, 所以 $\mathrm{Ext}_R^1(A, B^{(I)}) = 0$. 因此 $\mathrm{Ext}_R^1(A, P \otimes B) = 0$. 故 $P \otimes_R B$ 是极大余挠的.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 令$P = R$. 因为 $R \otimes_R B \cong B$, 所以 B 是一个极大余挠模.

命题 3.6 对任意的一簇模 $\{B_i\}_{i \in I}$ 其中 I 是一个指标集, $\prod_{i \in I} B_i$ 是极大余挠的当且仅当每个 B_i 是极大余挠的.

证明: $\Longrightarrow$) 设 A 是极大平坦 R-模, 且 $\prod_{i \in I} B_i$ 是极大余挠模. 则

$$\mathrm{Ext}_R^1(A, \prod_{i \in I} B_i) = 0.$$

由 ([10], 定理 2) 可知, 有自然同构关系, $\mathrm{Ext}_R^1(A, \prod_{i \in I} B_i) \cong \prod \mathrm{Ext}_R^1(A, B_i)$. 于是

$$\mathrm{Ext}_R^1(A, B_i) = 0.$$

故每个 B_i 是极大余挠的.

$\Longleftarrow$) 设 A 是极大平坦 R-模, 且每个 B_i 是极大余挠模, 有 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B_i)=0$. 再由自然同构关系

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,\prod_{i\in I}B_i)\cong\prod\mathrm{Ext}_R^1(A,B_i)$$

可得 $\mathrm{Ext}_R^1(A,\prod_{i\in I}B_i)=0$. 故 $\prod_{i\in I}B_i$ 是极大余挠模.

命题 3.7 设 R 是一个环. 则以下条件是等价的:

(1) 每个 R-模是极大余挠的.

(2) 每个极大平坦 R-模是投射的.
此外, 若 R 满足上述条件之一, 则 R 是一个完全环.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2) 设 A 是极大平坦 R-模. 由 (1) 可知, 任意 R-模 B 是极大余挠的. 于是 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0$. 故 A 是投射的.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 设 A 是极大平坦 R-模. 则 A 是投射的. 于是对任意 R-模 B, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(A,B)=0.$$

则 B 是一个极大余挠 R-模.
由注记 3.2 可知, B 是余挠的, 由 ([2], 命题 3.3.1) 可知, 每个 R-模是余挠的当且仅当 R 是完全环. 故当 R 满足上述条件 (1) 时, 则 R 是一个完全环.

引理 3.8 单模的示性模是极大余挠模.

证明: 设 M 是极大平坦 R-模, D 是单模. 由同构式

$$\mathrm{Ext}_R^n(M,D^+)\cong\mathrm{Tor}_n^R(M,D)^+$$

知 $\mathrm{Tor}_n^R(M,D)=0$, 从而 $\mathrm{Ext}_R^n(M,D^+)=0$. 故 D^+ 是极大余挠模.

定理 3.9 设 $\mathcal{FG}$ 表示极大余挠模类, $\mathcal{FH}$ 表示极大平坦模类. 则 $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个余挠对.

证明: 首先证 ${}^{\perp}\mathcal{FG}=\mathcal{FH}$. 设 $M\in{}^{\perp}\mathcal{FG}$. 则对任意的极大余挠模 N, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0.$$

设 I 是 R 的任意极大理想. 则 R/I 是单模. 由引理 3.8 可知, 单模的示性模是极大余挠模. 故 $(R/I)^+$ 是极大余挠模. 从而 $\mathrm{Ext}_R^1(M,(R/I)^+)=0$. 由同构式

$$0=\mathrm{Ext}_R^1(M,(R/I)^+)\cong(\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I))^+$$

知 $\mathrm{Tor}_1^R(M,R/I)=0$, 因此 M 是极大平坦的, 从而 $M\in\mathcal{FH}$. 故 ${}^{\perp}\mathcal{FG}\subseteq\mathcal{FH}$. 设 M 是极大平坦的.

则对任意极大余挠模 N, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(M,N)=0.$$

从而 $M\in{}^\perp\mathcal{FG}$. 故 $\mathcal{FH}\subseteq{}^\perp\mathcal{FG}$. 综上, ${}^\perp\mathcal{FG}=\mathcal{FH}$. 下证 $\mathcal{FH}^\perp=\mathcal{FG}$. 设 $M\in\mathcal{FH}^\perp$. 则对任意的极大平坦模 N, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0.$$

从而 $M\in\mathcal{FG}$. 故 $\mathcal{FH}^\perp\subseteq\mathcal{FG}$. 设 $M\in\mathcal{FG}$. 则对任意的极大平坦模 N, 有

$$\mathrm{Ext}_R^1(N,M)=0.$$

从而 $M\in\mathcal{FH}^\perp$. 故 $\mathcal{FG}\subseteq\mathcal{FH}^\perp$. 综上所述, $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个余挠对.

推论 3.10 $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个完全余挠对.

证明: 由定理 3.9 可知, $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个余挠对. 由 ([6], 引理 2) 和 ([11], 定理 3.4) 得每个 R-模有一个$\mathcal{FH}$-覆盖和一个$\mathcal{FG}$-包络. 故 $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个完全余挠对.

推论 3.11 $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个遗传余挠对.

证明: 考虑 R-模的正合列 $0\to A\to A'\to A''\to 0$, 其中 $A',A''\in\mathcal{FH}$. 对 R 的任意极大理想 I, 用 $-\otimes_R R/I$ 作用上述正合列后,

$$\mathrm{Tor}_2^R(A'',R/I)\to\mathrm{Tor}_1^R(A,R/I)\to\mathrm{Tor}_1^R(A',R/I).$$

因为 A' 是极大平坦的, 所以 $\mathrm{Tor}_1^R(A',R/I)=0$. 因为 I 是 R 的任意极大理想, 所以 R/I 是单模. 又因为 A'' 是极大平坦的, 由引理 3.3 可知

$$\mathrm{Tor}_2^R(A'',R/I)=0.$$

故 $\mathrm{Tor}_1^R(A,R/I)=0$. 因此 A 是极大平坦的. 故 $(\mathcal{FH},\mathcal{FG})$ 是一个遗传余挠对.

参考文献

[1] Harrison, D.K. (1959) Infinite Abelian Groups and Homological Methods. *Annals of Mathematics*, **69**, 336-391. https://doi.org/10.2307/1970188

[2] Xu J. (1996) Flat Covers of Modules. In: *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 1634, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Trlifaj, J. (2000) Covers, Envelopes and Cotorsion Theories. *Lecture Notes for the Workshop "Homological Methods in Module Theory"*, Cortona, 10-16 September 2000.

[4] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2005) Notes on Cotorsion Modules. *Communications in Algebra*, **33**, 349-360. https://doi.org/10.1081/AGB-200041029

[5] Xiang, Y. (2010) Max-Injective, Max-Flat Modules and Max-Coherent Ring. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **47**, 611-622. https://doi.org/10.4134/BKMS.2010.47.3.611

[6] Alagoz, Y. and Buyukasik, E. (2021) On Max-Fat Modules and Max-Cotorsion Modules. *Applicable Algebra in Engineering*, **32**, 195-215. https://doi.org/10.1007/s00200-020-00482-4

[7] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter, New York. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[8] Enochs, E.E. (2002) Covers, Envelopes and Cotorsion Theories. Nova Biomedical, New York.

[9] 于梅菊, 方咏梅. 探研极大平坦维数[J]. 通化师范学院学报, 2010, 31(12): 11-13.

[10] Rotman, J.J. (2009) An Introduction to Homological Algebra. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/b98977

[11] Holm, H. and Jorgensen, P. (2008) Covers, Precovers, and Purity. *Illinois Journal of Mathematics*, **52**, 691-703. https://doi.org/10.1215/ijm/1248355359