Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(5), 1440-1446
Published Online May 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.135148

拟-Gorenstein 平坦模与维数

辛红娟

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月22日；录用日期：2023年5月24日；发布日期：2023年5月31日

摘 要

本文主要研究了拟-Gorenstein平坦模及其基本性质，并探讨了其相对于短正合列的有关结论。同时，描述了有限拟-Gorenstein平坦同调维数。

关键词

拟-Gorenstein平坦模，拟-Gorenstein平坦维数，拟-内射模

Quasi-Gorenstein Flat Modules and Dimensions

Hongjuan Xin

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 22nd, 2023; accepted: May 24th, 2023; published: May 31st, 2023

Abstract

In this paper, we investigate quasi-Gorenstein flat modules and their basic properties, and study the relative conclusions of this module class respect to short exact sequence. Simultaneously, we describe finite quasi-Gorenstein flat homological dimensions.

文章引用: 辛红娟. 拟-Gorenstein 平坦模与维数[J]. 理论数学, 2023, 13(5): 1440-1446.
DOI: 10.12677/pm.2023.135148

Keywords

Quasi-Gorenstein Flat Modules, Quasi-Gorenstein Flat Dimensions, Quasi-Injective Modules

1. 引言

20 世纪 60 年代, Auslander 等 [1]研究了双边 Noether 环上 G-维数为 0 的有限生成模. 20 世纪 90 年代, Enochs 等在任意结合环上引入 Gorenstein 投射模, Gorenstein 内射模和 Gorenstein 平坦模 [2,3], 这三类模分别是经典同调代数中投射模, 内射模和平坦模在相对同调代数中的一种推广, 也是 Gorenstein 同调代数的重要研究对象. 2022 年, 文献 [4]进一步介绍了拟-Gorenstein 投射模, 拟-Gorenstein 内射模的概念, 并给出了其同调性质和相应的有限拟-Gorenstein 同调维数的描述.

受以上文献的启发, 本文通过拟-内射模和张量积函子将 Gorenstein 平坦模推广至拟-Gorenstein 平坦模, 并对拟-Gorenstein 平坦模的同调性质和拟-Gorenstein 平坦维数进行了研究.

2. 预备知识

文中提到的环均指有单位元的结合环, 模均指酉模, 其中 $M^+ = \mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)$ 表示 M 的特征模. 利用 $\mathcal{I}(R)$, $Q\mathcal{I}(R)$, $QG\mathcal{I}(R)$ 分别表示内射, 拟-内射, 以及拟-Gorenstein 内射 R-模的类, 用 $\mathcal{F}(R)$, $QG\mathcal{F}(R)$, $G\mathcal{F}(R)$ 分别表示平坦, 拟-Gorenstein 平坦, 以及 Gorenstein 平坦 R-模的类, $QGfd_R(M)$ 表示左 R-模 M 的拟-Gorenstein 平坦维数.

称模 X 是 Gorenstein 平坦模, 如果存在平坦 R-模的正合序列 $\mathbf{F} = \cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots$, 使得 $X \cong \mathrm{Im}(F_0 \to F^0)$, 并且对任意 $B \in \mathcal{I}(R)$, $B \otimes_R \mathbf{F}$ 是正合序列. 称模 Y 是拟-Gorenstein 内射模 [4], 如果存在内射 R-模的正合复形 $\mathbf{I} = \cdots \to I_2 \to I_1 \to I_0 \to I_{-1} \to I_{-2} \to \cdots$, 使得 $Y \cong \mathrm{Im}(I_1 \to I_0)$, 并且对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $\mathrm{Hom}_R(E, \mathbf{I})$ 是正合序列. 称 R-模 M 是拟-内射模 [5] , 当且仅当对任意 R-模 A, R-满同态 $g : M \to A$, 以及 R-同态 $f : M \to A$, 存在 $f' \in End(M)$, 使得 $f = gf'$.

设 $\mathcal{F}$ 是个模类. 称 $\mathcal{F}$ 是投射可解类, 如果 $\mathcal{F}$ 包含投射模类, 对任意正合序列 $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$, 若 $M_2 \in \mathcal{F}$, 则 $M \in \mathcal{F}$ 当且仅当 $M_1 \in \mathcal{F}$.

3. 拟-Gorenstein 平坦模

定义 3.1 称 R-模 M 是拟-Gorenstein 平坦模, 如果存在平坦 R-模的正合复形

$$\mathbb{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(F_1 \to F_0)$, 并且对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{F}$ 是正合序列.

注 因为 $\mathcal{I}(R) \subseteq Q\mathcal{I}(R)$, 则由定义可得 $QG\mathcal{F}(R) \subseteq G\mathcal{F}(R)$.

引理 3.2 设 N 是左 R-模, 如果 N 是拟-Gorenstein 平坦模当且仅当对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $i \geq 1$ 时, $\mathrm{T}or_i^R(E, N) = 0$, 并且存在 R-模的正合列

$$\mathbb{X} = 0 \to N \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots,$$

其中 $F_i \in \mathcal{F}(R)$, $i \leq 0$, 使得 $E \otimes_R \mathbb{X}$ 是正合序列.

证明 由定义 3.1 显然可得.

引理 3.3 设 M 是左 R-模, 如果 M 是拟-Gorenstein 平坦模当且仅当存在 R-模的短正合序列 $0 \to M \to F \to N \to 0$, 使得 F 是平坦模, N 是拟-Gorenstein 平坦模.

证明 $\Rightarrow$) 由引理 3.2 知存在 R-模的正合列

$$\mathbb{X} = 0 \to M \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots,$$

使得 $F_i \in \mathcal{F}(R)$, $i \leq 0$, 并且对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{X}$ 正合. 因此可得正合列

$$0 \to M \to F_0 \to \mathrm{I}m(F_0 \to F_{-1}) \to 0.$$

记 $N := \mathrm{I}m(F_0 \to F_{-1})$, 下证 N 是拟-Gorenstein 平坦模.

设 $\mathbb{Z} = \cdots \to F_2' \to F_1' \to F_0' \to M \to 0$ 是 M 的平坦分解, 由引理 3.2 知对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{Z}$ 正合. 结合复形 $\mathbb{X}$ 和 $\mathbb{Z}$, 则由定义 3.1 可知 N 是拟-Gorenstein 平坦模.

$\Leftarrow$) 设 $E \in Q\mathcal{I}(R)$，由引理 3.2 可得 $\mathrm{T}or_i^R(E, N) = 0$, 用函子 $E \otimes_R -$ 作用短正合列 $0 \to M \to F \to N \to 0$, 则可得如下正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to \mathrm{T}or_{i+1}^R(E, N) \to \mathrm{T}or_i^R(E, M) \to \mathrm{T}or_i^R(E, F) \to \mathrm{T}or_i^R(E, N) \to \cdots \\ \to \mathrm{T}or_1^R(E, N) \to E \otimes_R M \to E \otimes_R F \to E \otimes_R N \to 0, \end{aligned}$$

因此对任意 $i > 0$, $\mathrm{T}or_i^R(E, M) = 0$, 所以 $0 \to E \otimes_R M \to E \otimes_R F \to E \otimes_R N \to 0$ 是正合序列. 又因为 N 是拟-Gorenstein 平坦模, 由引理 3.2 知存在 R-模的正合列 $\mathbb{X} = 0 \to N \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots$, 其中 $F_i \in \mathcal{F}(R)$, $i \leq 0$, 并且对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{X}$ 正合. 结合短正合列和 $\mathbb{X}$, 则有

$$\mathbb{Y} = 0 \to M \to F \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots,$$

使得对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{Y}$ 正合, 故由引理 3.2 知 M 是拟-Gorenstein 平坦模.

命题 3.4 设 R 是右凝聚环, 则以下结论成立.

(i) 设 M 是拟-Gorenstein 平坦左 R-模, 则 $\mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)$ 是拟-Gorenstein 内射右 R-模.

(ii) 拟-Gorenstein 平坦模的类是投射可解的.

证明 (i) 设 $M \in QG\mathcal{F}(R)$, 则存在平坦 R-模的正合复形

$$\mathbb{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F_{-1} \to F_{-2} \to \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}(F_1 \to F_0)$, 并且对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $E \otimes_R \mathbb{F}$ 是正合序列. 又因为 $\mathrm{H}om_Z(E \otimes_R \mathbb{F}, Q/Z) \cong \mathrm{H}om_R(E, \mathrm{H}om_Z(\mathbb{F}, Q/Z))$, 所以 $\mathrm{H}om_Z(\mathbb{F}, Q/Z)$ 正合, 故存在正合列

$$\mathrm{H}om_Z(\mathbb{F}, Q/Z) = \cdots \to \mathrm{H}om_Z(F_{-1}, Q/Z) \to \mathrm{H}om_Z(F_0, Q/Z) \to \mathrm{H}om_Z(F_1, Q/Z) \to \cdots,$$

由于对任意整数 i, $F_i \in \mathcal{F}(R)$, 则 $\mathrm{H}om_Z(F_i, Q/Z)) \in \mathcal{I}(R)$, 并且使得

$$\mathrm{H}om_Z(M, Q/Z) \cong \mathrm{Im}(\mathrm{H}om_Z(F_0, Q/Z) \to \mathrm{H}om_Z(F_1, Q/Z)),$$

因此 $\mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)$ 是拟-Gorenstein 内射右 R-模.

(ii) 由定义 3.1, 平坦模显然是拟-Gorenstein 平坦模, 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是 R-模的短正合列, 且 $M'' \in QG\mathcal{F}(R)$, 则只需证 $M' \in QG\mathcal{F}(R) \Leftrightarrow M \in QG\mathcal{F}(R)$.

$\Rightarrow$) 设 $M' \in QG\mathcal{F}(R)$, $E \in Q\mathcal{I}(R)$, 由上述短正合列可得 $0 \to M''^+ \to M^+ \to M'^+ \to 0$ 是正合的, 其中 $M''^+ \in QG\mathcal{I}(R)$, 由假设 $M'^+ \in QG\mathcal{I}(R)$, 用函子 $\mathrm{H}om_R(E, -)$ 作用此短正合列, 由文献 [4, 引理 2.3 (ii)] 可推出 $\mathrm{E}xt^i_R(E, M^+) = 0$, 并且有如下正合序列

$$\mathbb{F}'^+ = \cdots \to F'^+_{-2} \to F'^+_{-1} \to F'^+_0 \to M'^+ \to 0,$$

$$\mathbb{F}''^+ = \cdots \to F''^+_{-2} \to F''^+_{-1} \to F''^+_0 \to M''^+ \to 0,$$

其中对任意整数 $i \leq 0$, F'^+_i, F''^+_i 都是内射的, 并且 $\mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}'^+)$ 和 $\mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}''^+)$ 均是正合的. 根据文献 [6, 引理 8.2.1] 的证明过程, 可构造如下行列正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F''^+_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & F''^+_{-1} \oplus F'^+_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & F'^+_{-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & F''^+_0 \arrow[r] \arrow[d] & F''^+_0 \oplus F'^+_0 \arrow[r] \arrow[d] & F'^+_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M''^+ \arrow[r] \arrow[d] & M^+ \arrow[r] \arrow[d] & M'^+ \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

为方便起见, 中间列记为 $\mathbb{F}^+$, 因为 $\mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}'^+)$ 和 $\mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}''^+)$ 均是正合复形, 则由正合列 $0 \to \mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}''^+) \to \mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}^+) \to \mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}'^+) \to 0$ 可推出 $\mathrm{H}om_R(E, \mathbb{F}^+)$ 也是正合复形, 所以 $M^+ \in QG\mathcal{I}(R)$, 又因为 R 是右凝聚环, 从而 $M \in QG\mathcal{F}(R)$.

$\Leftarrow$) 设 $M \in QG\mathcal{F}(R)$, 由引理 3.3 知存在正合列 $0 \to M \to F \to N \to 0$, 使得 $F \in \mathcal{F}(R)$, $N \in QG\mathcal{F}(R)$, 考虑如下推出图

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

在正合列 $0 \to M'' \to L \to N \to 0$ 上应用 $\Rightarrow$) 的证明结论可得 L 是拟-Gorenstein 平坦模, 再根据引理 3.3 和正合列 $0 \to M' \to F \to L \to 0$, 因此可知 $M' \in QG\mathcal{F}(R)$.

引理 3.5　设 R 是右凝聚环, 拟-Gorenstein 平坦模的类关于直和与直和项封闭.

证明　因为张量积函子 $- \otimes_R -$ 与直和可交换, 则拟-Gorenstein 平坦模的直和也是拟-Gorenstein 平坦的, 并且根据命题 3.4 (ii) 知拟-Gorenstein 平坦模的类是投射可解的, 所以由文献 [7, 命题 1.4] 可得拟-Gorenstein 平坦模的类关于直和项封闭.

命题 3.6　设 R 是右凝聚环, $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是短正合列, 如果 M' 和 M 是拟-Gorenstein 平坦的, 则 M'' 是拟-Gorenstein 平坦模当且仅当对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $\mathrm{T}or_1^R(E, M'') = 0$.

证明 $\Rightarrow$) 由引理 3.2 显然可证.

$\Leftarrow$) 设 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 是短正合列, 其中 $M' \in QG\mathcal{F}(R)$, $M \in QG\mathcal{F}(R)$, 则 $0 \to M''^{+} \to M^{+} \to M'^{+} \to 0$ 正合, 并且由命题 3.4 (i) 可知 $M^{+} \in QG\mathcal{I}(R)$, $M'^{+} \in QG\mathcal{I}(R)$. 由假设条件知对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $\mathrm{E}xt_R^1(E, \mathrm{H}om_Z(M'', Q/Z)) \cong \mathrm{H}om_Z(\mathrm{T}or_i^R(E, M''), Q/Z)) = 0$, 又根据文献 [4, 命题 2.7 (ii)] 可得 $M''^{+} \in QG\mathcal{I}(R)$, 且因为 R 是右凝聚环, 所以 $M'' \in QG\mathcal{F}(R)$.

4. 拟-Gorenstein 平坦模维数

设 M 是非零 R-模, n 是非负整数, M 的拟-Gorenstein 平坦维数定义如下.

$QGfd_R(M)$= inf$\{n \mid\ 0 \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$ 正合, 对任意$0 \le i \le n$, $Q_i \in QG\mathcal{F}(R)\}$, 当上述 n 不存在时, 规定 $QGfd_R(M) = \infty$, $QGfd_R(0) = -\infty$.

定理 4.1　设 R 是右凝聚环, M 是拟-Gorenstein 平坦维数有限的 R-模, n 是非负整数, 则以下条件等价.

(i) $QGfd_R(M) \le n$.

(ii) 当 $i > n$ 时, 对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, $\mathrm{T}or_i^R(E, M) = 0$.

(iii) 任意正合列

$$\cdots \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

其中 $i \geq 0$ 时, Q_i 是拟-Gorenstein 平坦模, 则 $kernel\ K_n := ker(Q_{n-1} \to Q_{n-2})$ 是拟-Gorenstein 平坦模.

因此, $QGfd_R(M)= sup\{m \in \mathbb{N}_0 |\ \forall E \in Q\mathcal{I}(R), \mathrm{Tor}_m^R(E, M) \neq 0\}$.

证明 (i)⇒(ii) 因为 $QGfd_R(M) \leq n$, 则存在模的正合列

$$0 \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

其中对任意 $0 \leq i \leq n$, $Q_i \in QG\mathcal{F}(R)$. 通过分解得到下面短正合列

$$0 \to K_1 \to Q_0 \to M \to 0$$

和

$$0 \to K_{i+1} \to Q_i \to K_i \to 0.$$

其中 $K_0 := M$, $K_1 := ker(Q_0 \to M)$, 并且对任意 $2 \leq i \leq n$, $K_i := ker(Q_{i-1} \to Q_{i-2})$. 设 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, 当 $i > n$ 时, 用函子 $E \otimes_R -$ 作用于短正合列, 由引理 3.2 可得 $\mathrm{Tor}_i^R(E, M) \cong \mathrm{Tor}_{i-n}^R(E, Q_n) = 0$.

(ii)⇒(i) 假设 $QGfd_R(M) = m < \infty$, 则存在模的正合列

$$0 \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

使得对任意 $0 \leq i \leq m$, $Q_i \in QG\mathcal{F}(R)$. 若 $m \leq n$, 结果显然成立. 若假设 $m > n$, 考虑以下正合列

$$0 \to K_j \to Q_{j-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0$$

和

$$0 \to Q_m \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_{j+1} \to Q_j \to K_j \to 0,$$

其中 $K_0 := M$, $K_1 := ker(Q_0 \to M)$, 并且对任意 $2 \leq j \leq m$, $K_j := ker(Q_{j-1} \to Q_{j-2})$. 类似 (i)⇒(ii) 的证明可得 $\mathrm{Tor}_i^R(E, K_n) \cong \mathrm{Tor}_{i+n}^R(E, M) = 0$, 并且对任意 $i > 0$ 和 $n < j \leq m$, $\mathrm{Tor}_i^R(E, K_j) = 0$. 由命题 3.6 可知短正合列

$$0 \to Q_m \to Q_{m-1} \to K_{m-1} \to 0$$

中, K_{m-1} 拟-Gorenstein 平坦模, 在其他短正合列上重复此步骤

$$0 \to K_{m-1} \to Q_{m-2} \to K_{m-2} \to 0,$$

$$\vdots$$

$$0 \to K_{n+1} \to Q_n \to K_n \to 0,$$

因此可推出 K_n 是拟-Gorenstein 平坦模, 从而 $QGfd_R(M) \leq n$.

(ii)⇒(iii) 考虑下面正合列

$$\cdots \to Q_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

其中对任意 $i \geq 0$, $Q_i \in QG\mathcal{F}(R)$. 定义 $K_n := ker(Q_{n-1} \to Q_{n-2})$, 则有正合列

$$0 \to K_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

因此序列 $0 \to M^+ \to Q_0^+ \to Q_1^+ \cdots \to Q_{n-1}^+ \to K_n^+ \to 0$ 是正合的, 其中对任意 $i \geq 0$, $Q_i^+ \in QG\mathcal{I}(R)$. 由条件 (ii) 可知, 对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$,

$$\mathrm{Ext}_R^i(E, \mathrm{Hom}_Z(M, Q/Z)) \cong \mathrm{Hom}_Z(\mathrm{Tor}_i^R(E, M), Q/Z)) = 0.$$

因此根据文献 [4, 命题 2.10] 得 $K_n^+ \in QG\mathcal{I}(R)$, 又因为 R 是右凝聚环, 则 K_n 是拟-Gorenstein 平坦模.

(iii)⇒(ii) 设存在正合列

$$0 \to K_n \to Q_{n-1} \to \cdots \to Q_1 \to Q_0 \to M \to 0,$$

其中 $i \geq 0$, $Q_i \in QG\mathcal{F}(R)$, 假设 $K_n \in QG\mathcal{F}(R)$, 将上述正合列分解为短正合列, 当 $E \in Q\mathcal{I}(R)$ 时,用函子 $E \otimes_R -$ 依次作用短正合列, 从而运用维数转移法可得同构式 $\mathrm{Tor}_i^R(E, M) \cong \mathrm{Tor}_{i-n}^R(E, K_n) = 0$, 所以对任意 $E \in Q\mathcal{I}(R)$, 当 $i > n$ 时, $\mathrm{Tor}_i^R(E, M) = 0$.

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. *Memoirs of the American Mathematical Society*, **94**. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeitschrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Enochs, E.E., Jenda, O. and Torrecillas, B. (1993) Gorenstein Flat Modules. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, **10**, 1-9.

[4] Mashhad, F.M.A. (2022) Quasi-Gorenstein Projective and Quasi-Gorenstein Injective Modules. *International Journal of Mathematics*, **33**, Article 2250086. https://doi.org/10.1142/S0129167X22500860

[5] Fuchs, L. (1969) On Quasi-Injective Modules. *The Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, **23**, 541-546.

[6] Enochs, E.E. and Jenda, O. (2000) Relative Homological Algebra. In: *De Gruyter Expositions in Mathematics*, Vol. 30, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[7] Henrik, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007