Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1876-1882
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136191

二阶Yang-Baxter型矩阵方程的解

林　麟

江西理工大学理学院，江西　赣州

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘　要

研究了Yang-Baxter型矩阵方程 $AXA = XAX$ 的解。当A是二阶矩阵时，通过考虑A可对角化和不可对角化两种情形得到了该矩阵方程有解的充分必要条件，并详细给出了解的具体表示。此外，当A是正定矩阵时，说明了A是矩阵方程 $AXA = XAX$ 的唯一正定解。

关键词

Yang-Baxter型矩阵方程，解，正定矩阵

Solutions to the Yang-Baxter-Like Matrix Equation of Order Two

Lin Lin

Institute of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou Jiangxi

Received: May 22nd, 2023; accepted: Jun. 23rd, 2023; published: Jun. 30th, 2023

Abstract

Solutions to the Yang-Baxter matrix equation $AXA = XAX$ are studied. When A is of order 2, by considering whether A is diagonalizable or not, sufficient and necessary conditions for the matrix equation having a solution are given, and explicit solutions are also presented. In addition, if A is positive definite, then it is shown that A is the unique positive definite solution to the matrix equation $AXA = XAX$.

Keywords

Yang-Baxter-Like Matrix Equation, Solution, Positive Definite Matrix

文章引用: 林麟. 二阶 Yang-Baxter 型矩阵方程的解[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1876-1882.
DOI: 10.12677/pm.2023.136191

1. 引言

经典的 Yang-Baxter 方程分别由 Yang [1]在 1967 年和 Baxter [2]在 1972 年提出，他们在各自研究问题中均说明了一些有理矩阵函数满足某个非线性矩阵方程。自此以后，越来越多的物理学家构造了各种形式的 Yang-Baxter 方程的解[3]。在过去几十年里，该矩阵方程不仅在统计物理领域得到广泛研究，同时因为 Yang-Baxter 方程与辫群和纽结理论等数学领域密切相关，该矩阵方程也得到许多数学研究者的关注。

令 U 是一个带有单位 e 的结合代数，经典的无参数 Yang-Baxter 是一个关于张量积 $U\otimes V$ 的可逆元 R 的方程，它具有形式

$$R_{12}R_{13}R_{23}=R_{23}R_{13}R_{12},$$

其中 $R_{12}=\phi_{12}(R)$，$R_{13}=\phi_{13}(R)$，$R_{23}=\phi_{23}(R)$，这里 ϕ_{12}，ϕ_{13}，ϕ_{23} 是从 $U\otimes U$ 到 $U\otimes U\otimes U$ 的代数同构，定义为

$$\phi_{12}(u,v)=u\otimes v\otimes e,\quad \phi_{13}(u,v)=u\otimes e\otimes v,\quad \phi_{13}(u,v)=e\otimes u\otimes v。$$

令 A 是一个 n 阶方阵，则二次矩阵方程

$$AXA=XAX \tag{1.1}$$

称为 Yang-Baxter 型矩阵方程。相比于经典的 Yang-Baxter 方程，方程(1.1)中出现的是更加详细的矩阵 A 和未知矩阵 X。显然，Yang-Baxter-like 矩阵方程(1.1)有两个平凡的解 $X=0$ 和 $X=A$，但要求出方程(1.1)的非平凡解是不容易的，因为这等价于求解一个一般的二次方程多项式系统。近年来，矩阵方程(1.1)得到大量研究，主要集中于一些特殊解或 A 具有某种特殊性质或结构时的解，如文[4]得到了当 A 是可对角化矩阵时的全部交换解；文[5]得到了当 A 是秩 1 矩阵时矩阵方程(1.1)的全部解；文[6]给出了当 A 满足 $A^{-1}=A$ 时矩阵方程(1.1)的全部交换解和部分非交换解；文[7]给出了当 A 满足 $A^3=A$ 时矩阵方程(1.1)的全部解；文[8]利用谱分解得到了矩阵方程(1.1)的一些解。文[9]给出了当 A 是秩 3 矩阵时矩阵方程(1.1)的全部交换解。文[10]给出了当与 A 可交换的无穷多解。文[11]得到了当 A 是秩 2 矩阵时矩阵方程(1.1)的全部解。

本文研究当 A 是二阶矩阵时矩阵方程(1.1)的解，分多钟情况讨论了一个二阶矩阵是矩阵方程(1.1)的解得充分必要条件，并具体给出了解得形式。同时，当 A 是正定矩阵时，说明了 A 是矩阵方程 $AXA=XAX$ 的唯一正定解。

在本文中，用 $\mathbb{C}$ 表示复数集，对角矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 简记为 $\mathrm{diag}\{a_1,\cdots,a_n\}$。$A^*$ 表示 A 的共轭转置，I_n 表示 n 阶单位矩阵，在不引起歧义的情况下简记为 I。

2. 二阶 Yang-Baxter 型方程的解

本节给出当 A 是二阶矩阵时 Yang-Baxter-like 矩阵方程的解。首先考虑两种情形，即 A 可对角化和 A 不可对角化的情形。当 A 可对角化时，不失一般性，可将 A 写为

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

其中 $a, d \in \mathbb{C}$。令

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

则通过比较方程 $AXA = XAX$ 各位置对应的元素有 $f_i = 0$，$1 \le i \le 4$，其中

$$f_1 = ax_1^2 + dx_2x_3 - a^2x_1, \quad f_2 = ax_1x_2 + dx_2x_4 - adx_2,$$

$$f_3 = ax_1x_3 + dx_3x_4 - adx_3, \quad f_4 = ax_2x_3 + dx_4^2 - d^2x_4。$$

定理 2.1 假设 $A = \mathrm{diag}\{a, d\}$，其中 a 和 d 是两个不相等的非零数。则 X 是(1.1)的一个解当且仅当下面两个条件之一成立：

i) X 具有形式

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

其中 $x_1 \in \{0, a\}$，$x_4 \in \{0, d\}$，且 $ax_1 + dx_4 \ne ad$。

ii) X 具有形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^2}{d-a} & x_2 \\ x_3 & \dfrac{a^2}{a-d} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

其中 $x_2x_3 = \dfrac{ad\left(ad - a^2 - d^2\right)}{(a-d)^2}$。

证明：若 A 具有形式(1.1)，X 具有形式(2.1)或(2.2)，则不难得到 $AXA = XAX$。

反之，如果 A 具有形式(1.1)且 $AXA = XAX$，则 $f_i = 0$，$1 \le i \le 4$。从 $f_2 = 0$ 可以看出 $x_2(ax_1 + dx_4 - ad) = 0$，即 $x_2 = 0$ 或 $ax_1 + dx_4 = ad$。同理，由 $f_3 = 0$ 可以得到 $x_3(ax_1 + dx_4 - ad) = 0$，即 $x_3 = 0$ 或 $ax_1 + dx_4 = ad$。

若 $ax_1 + dx_4 \ne ad$，则 $x_2 = x_3 = 0$，因此 $f_1 = 0$ 可推出 $ax_1^2 - a^2x_1 = 0$，$f_4 = 0$ 可推出 $dx_4^2 - d^2x_4 = 0$。所以 $x_1 \in \{0, a\}$，$x_4 \in \{0, d\}$，于是 X 具有形式(2.1)。

若 $ax_1 + dx_4 = ad$，则 $x_4 = \dfrac{ad - ax_1}{d}$。于是

$$\begin{aligned} af_1 - df_4 &= a^2x_1^2 - d^2x_4^2 + d^3x_4 - a^3x_1 \\ &= (ax_1 + dx_4)(ax_1 - dx_4) + d^3x_4 - a^3x_1 \\ &= ad(ax_1 - dx_4) + d^3x_4 - a^3x_1 \\ &= \left(a^2d - a^3\right)x_1 + \left(d^3 - ad^2\right)x_4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

将 $x_4 = \dfrac{ad - ax_1}{d}$ 代入 $\left(a^2d - a^3\right)x_1 + \left(d^3 - ad^2\right)x_4 = 0$ 便可得到 $x_1 = \dfrac{d^2}{d-a}$。于是，$x_4 = \dfrac{ad - ax_1}{d} = \dfrac{a^2}{a-d}$。

DOI: 10.12677/pm.2023.136191

所以从 $f_1=0$ 或 $f_4=0$ 可推出 $x_2x_3=\dfrac{ad\left(ad-a^2-d^2\right)}{(a-d)^2}$。即 X 具有形式(2.2)。

定理 2.2 假设 $A=\mathrm{diag}\{a,a\}$，其中 a 是非零数。

i) 如果 X 是非奇异的，则它是(1.1)的解当且仅当 $X=aI$。

ii) 如果 X 是奇异的，它是(1.1)的解当且仅当 $X=O$ 或 X 具有形式

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

其中 $x_1+x_4=a$。

证明：不难看出，如果 X 具有以上任意一种形式，则它必然满足方程 $AXA=XAX$。所以只需要证明反过来的情况。

如果 $A=\mathrm{diag}\{a,a\}$，即 $A=aI$，由于 a 是非零数，所以 $AXA=XAX$ 可转化为 $X^2=aX$。如果 X 是非奇异的，那么显然 X 是数量矩阵 aI。

如果 X 是奇异的，则可以考虑方程 $f_i=0$，$1\le i\le 4$。因为 $A=aI$，所以 $f_i=0$，$1\le i\le 4$ 可转化为 $g_i=0$，$1\le i\le 4$，其中

$$g_1=x_1^2+x_2x_3-ax_1,$$

$$g_2=x_2\left(x_1+x_4-a\right),$$

$$g_3=x_3\left(x_1+x_4-a\right),$$

$$g_4=x_4^2+x_2x_3-ax_4。$$

如果 $x_1+x_4=a$，则 X 具有形式(2.3)。如果 $x_1+x_4\ne a$，则 $x_2=x_3=0$ 且 $x_1^2-ax_1=0$，$x_4^2-ax_4=0$，因此，x_1 和 x_4 也等于 0，即 $X=O$。

定理 2.3 假设 $A=\mathrm{diag}\{a,0\}$，其中 a 是非零数，则 X 是(1.1)的解当且仅当 X 具有以下形式之一：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

证明：如果 X 具有(2.4)中的任何形式，则显然有 $AXA=XAX$。

反过来，如果 $A=\mathrm{diag}\{a,0\}$，则 $f_i=0$，$1\le i\le 4$ 可转化为 $h_i=0$，$1\le i\le 4$，其中

$$h_1=ax_1^2-a^2x_1,\quad h_2=ax_1x_2,\quad h_3=ax_1x_3,\quad h_4=ax_2x_3。$$

从 $h_1=0$ 可推出 $x_1=0$ 或 $x_1=a$。若 $x_1=0$，则可以从 $h_4=0$ 中得出 $x_2=0$ 或 $x_3=0$。因此，在这种情况下，X 具有形式

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}。$$

另一方面，若 $x_1=a$，则可以从 $h_2=0$ 和 $h_3=0$ 中得出 $x_2=0$ 和 $x_3=0$。因此，在这种情况下，X 具有形式

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}。$$

类似地，可以得到以下结果。

定理 2.4 假设 $A=\mathrm{diag}\{0,d\}$，其中 d 是非零数，则 X 是(1.1)的解当且仅当 X 具有以下形式之一：

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}。$$

以上得到了 A 可对角化时矩阵方程(1.1)的全部解，下面考虑 A 不可对角化时矩阵方程(1.1)的解。

定理 2.5 假设 A 不可对角化，则由 A 的 Jordan 标准形可不妨假设 A 具有形式

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}。$$

i) 如果 X 是奇异的，则它是(1.1)的解当且仅当它具有以下形式之一：

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}。 \tag{2.5}$$

ii) 如果 X 是非奇异的，则它是(1.1)的解当且仅当 $X = A$ 或 X 具有形式

$$\begin{bmatrix} x_1 & \left(\frac{x_1 - a}{a}\right)^2 \\ -a^2 & 2a - x_1 \end{bmatrix}。 \tag{2.6}$$

证明：i) 如果 A 是奇异的，则 $a = 0$，于是由 $AXA = XAX$ 可得到

$$\begin{bmatrix} 0 & x_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_3^2 & x_3x_4 \end{bmatrix}。$$

因此，

$$x_1x_3 = 0，\quad x_1x_4 = 0，\quad x_3^2 = 0，\quad x_3x_4 = 0。$$

从而有 $x_3 = 0$，且 $x_1 = 0$ 或 $x_4 = 0$。即 X 具有形式(2.5)。

ii) 如果 X 是非奇异的，则 $a \neq 0$。此时，通过比较 AXA 与 XAX 对应的元素，我们可以得到 $p_i = 0$，$1 \le i \le 4$，其中

$$p_1 = a^2x_1 + ax_3 - ax_1^2 - x_1x_3 - ax_2x_3，$$

$$p_2 = ax_1 + x_3 + a^2x_2 + ax_4 - ax_1x_2 - x_1x_4 - ax_2x_4，$$

$$p_3 = a^2x_3 - ax_1x_3 - x_3^2 - ax_3x_4，$$

$$p_4 = ax_3 + a^2x_4 - ax_2x_3 - x_3x_4 - ax_4^2。$$

从 $p_3 = x_3\left(a^2 - ax_1 - ax_4 - x_3\right) = 0$ 可以看出 $x_3 = 0$ 或 $x_3 = a^2 - ax_1 - ax_4$。如果 $x_3 \neq 0$，则 $x_3 = a^2 - ax_1 - ax_4$。将 $x_3 = a^2 - ax_1 - ax_4$ 代入 $p_1 = 0$ 和 $p_2 = 0$ 分别可得

$$q_1 = a^2 - ax_1 - ax_4 + x_1x_4 - a^2x_2 + ax_1x_2 + ax_2x_4 = 0$$

和

$$q_2 = a^2x_2 - ax_1x_2 - ax_2x_4 - x_1x_4 + a^2 = 0。$$

所以，$q_1 + q_2 = 0$ 可推出 $2a^2 - ax_1 - ax_4 = a^2 + x_3 = 0$，于是 $x_3 = -a^2$，$x_4 = 2a - x_1$。

接下来，将 $x_3 = -a^2$ 和 $x_4 = 2a - x_1$ 代入 $p_2 = 0$ 可得

$$x_1^2 - a^2x_2 - 2ax_1 + a^2 = 0，$$

即 $x_2 = \left(\frac{x_1 - a}{a}\right)^2$。因此 X 具有形式(2.6)。

如果 $x_3=0$，则 $p_1=0$ 和 $p_4=0$ 分别变为 $a^2x_1-ax_1^2=0$ 和 $a^2x_4-ax_4^2=0$。因此，$x_1,x_4\in\{0,a\}$。由于 X 是非奇异的且 $x_3=0$，所以 $x_1=x_4=a$。于是可以从 $p_2=0$，$x_3=0$ 和 $x_1=x_4=a$ 得出 $x_2=1$，即

$$X=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}=A。$$

3. 方程 $AXA=XAX$ 的正定解

本节考虑当 A 是正定矩阵时矩阵方程 $AXA=XAX$ 的正定解。

引理 3.1 对任意整数 $|k|>1$ 和 $M\in GL(n,\mathbb{C})$，非线性方程 $X^k=M^*XM$ 具有唯一的正定解。

定理 3.1 假设 A 是 $n\times n$ 正定矩阵，则 A 是矩阵方程 $AXA=XAX$ 的唯一正定解。

证明：如果 A 是正定的，则由正定矩阵的 Cholesky 分解，存在唯一的一个对角线元素都为正的下三角矩阵 L，使得 $A=LL^*$。因此，$AXA=XAX$ 可写成 $LL^*XLL^*=XLL^*X$，等这价于

$$L^*LL^*XLL^*L=L^*XLL^*XL。\tag{3.1}$$

分别用 B 和 Y 表示 L^*L 以及 L^*XL，则式(3.1)可写为 $BYB=Y^2$，其中 B 是正定矩阵。则由引理 3.1 可知方程 $BYB=Y^2$ 有唯一正定解，于是方程 $AXA=XAX$ 也有唯一正定解。不难看出 $Y=B^2$ 是方程 $BYB=Y^2$ 的唯一正定解，于是 $X=A$ 是方程 $AXA=XAX$ 的唯一正定解。

4. 数值例子

本节给出一些求解二阶 Yang-Baxter 型矩阵方程的例子。

例 4.1 令

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}。$$

由定理 2.1，矩阵方程 $AXA=XAX$ 的全部解为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 4 & x_2 \\ x_3 & -1 \end{bmatrix},$$

其中 $x_2x_3=-6$。

例 4.2 令

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}。$$

则由定理 2.5，矩阵方程 $AXA=XAX$ 的全部奇异解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix},$$

其中 x_1,x_2,x_4 是任意常数。

矩阵方程 $AXA=XAX$ 的全部非奇异解为 $X=A$ 和

$$\begin{bmatrix} x_1 & \left(\dfrac{x_1-2}{2}\right)^2 \\ -4 & 4-x_1 \end{bmatrix},$$

其中 x_1 是任意常数。

5. 结束语

本文主要给出了当 A 是二阶矩阵时，Yang-Baxter 型矩阵方程 $AXA = XAX$ 的全部解。需要指出的是，要给出当 A 是一般的 n 阶矩阵时 Yang-Baxter 型矩阵方程 $AXA = XAX$ 的全部解几乎是不现实的，因为这等价于要求解含 n^2 个未知数的方程组。目前一些可行的方法主要包括研究当 A 是某种特殊矩阵时 Yang-Baxter 型矩阵方程的解，以及该矩阵的一些特殊解，如交换解等。若要考虑关于更高阶矩阵 A 的 Yang-Baxter 型矩阵方程的解，则需要发展一些新的技术方法，这也是本文今后进一步的研究工作。

基金项目

江西省教育厅科技项目(GJJ210884, GJJ2200841)。

参考文献

[1] Yang, C.N. (1967) Some Exact Results for the Many-Body Problem in One Dimension with Repulsive Delta-Function Interaction. *Physical Review Letters*, **19**, 1312-1315. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.1312

[2] Baxter, R.J. (1972) Partition Function of the Eight-Vertex Lattice Model. *Annals of Physics*, **70**, 193-228. https://doi.org/10.1016/0003-4916(72)90335-1

[3] Hietarinta, J. (1993) Solving the Two-Dimensional Constant Quantum Yang-Baxter Equation. *Journal of Mathematical Physics*, **34**, 1725-1756. https://doi.org/10.1063/1.530185

[4] Dong, Q.X. and Ding. J. (2016) Complete Commuting Solutions of the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for Diagonalizable Matrices. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 194-201. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.047

[5] Tian, H.Y. (2016) All Solutions of the Yang-Baxter-Like Equation for Rank-One Matrices. *Applied Mathematics Letters*, **51**, 55-59. https://doi.org/10.1016/j.aml.2015.07.009

[6] Adam, M.S.I., Ding, J., Huang, Q.L. and Zhu, L. (2018) Solving a Class of Quadratic Matrix Equations. *Applied Mathematics Letters*, **82**, 58-63. https://doi.org/10.1016/j.aml.2018.02.017

[7] Adam, M.S.I., Ding, J., Huang, Q.L. and Zhu, L. (2019) All Solutions of the Yang-Baxter-Like Equation When $A^3 = A$. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **9**, 1022-1031. https://doi.org/10.11948/2156-907X.20180244

[8] Ding, J. and Rhee, N.H. (2013) Spectral solutions of the Yang-Baxter Matrix Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **402**, 567-573. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2013.01.054

[9] 周端美, 丁佳文. 关于秩-3 矩阵的 Yang-Baxter 型矩阵方程的交换解[J]. 赣南师范大学学报, 2016, 37(6): 1-7.

[10] Ding, J., Zhang, C.H. and Rhee, N.H. (2013) Further Solutions of a Yang-Baxter-Like Matrix Equation. *East Asian Journal of Applied Mathematics*, **3**, 352-362. https://doi.org/10.4208/eajam.130713.221113a

[11] Zhou, D.M., Chen, G.L. and Ding, J. (2017) Solving the Yang-Baxter-Like Matrix Equation for Rank-Two Matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **313**, 142-151. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.09.007