Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1708-1713
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136174

复形的 $ex(\mathcal{DI})$ -包络

史朝阳*，**杨晓燕**†

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年5月20日；录用日期：2023年6月21日；发布日期：2023年6月28日

摘 要

对任意环R，我们证明了正合的Ding内射复形的左正交类是复形范畴中的覆盖类，正合的Ding内射复形的类是复形范畴中的包络类。

关键词

Ding内射模，Ding内射复形，覆盖，包络

The $ex(\mathcal{DI})$-Envelope of Complexes

Zhaoyang Shi*, **Xiaoyan Yang**†

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 20^{th}, 2023; accepted: Jun. 21^{st}, 2023; published: Jun. 28^{th}, 2023

Abstract

For any ring R, we prove that the left orthogonal class of exact Ding injective complexes is covering and the class of exact Ding injective complexes is enveloping in the complex category.

* 第一作者。
† 通讯作者。

文章引用: 史朝阳, 杨晓燕. 复形的 $ex(\mathcal{DI})$ -包络[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1708-1713.
DOI: 10.12677/pm.2023.136174

Keywords

Ding Injective Module, Ding Injective Complex, Cover, Envelope

1. 引言

毛立新教授和丁南庆教授于 2008 年在 [1]中引入了 Gorenstein FP-内射模, 给出了这类模的许多类似于 Gorenstein-内射模的性质, 证明了如果环 R 是 n-FC 环且是完全环, 那么每个 R-模都有一个 Gorenstein FP-内射包络. 刘静等人于 2011 年在 [2]中把 Gorenstein FP-内射模推广到复形范畴, 引入了 Gorenstein FP-内射复形. 因为 Ding 在 Gorenstein FP-内射模上做出的杰出贡献, Gillespie 于 2017 年在 [3]中将 Gorenstein FP-内射模重新命名为 Ding 内射模, 将 Gorenstein FP-内射复形重新命名为 Ding 内射复形, 并且探索和研究了 Ding 内射模与 Ding 内射复形的刻画和它们的性质. Gillespie 证明了在 Ding-Chen 环上, X 是 Ding 内射复形当且仅当 X 的每一项都是 Ding 内射模; 杨刚等人于 2020 年在 [4]把这一结果推广到了凝聚环上; Gillespie 和 Iacob 于 2021 年在 [5]中证明了这一结果对任意环 R 成立, 除此之外, 他们还证明了对任意环 R, Ding 内射复形的类是复形范畴中的包络类.

受到以上结果的启发, 本文考虑了正合的 Ding 内射复形的类似问题. 我们给出了正合的 Ding 内射复形的等价刻画, 证明了正合的 Ding 内射复形的左正交类是关于正向极限封闭的预覆盖类. 因此, 正合的 Ding 内射复形的左正交类是复形范畴中的覆盖类. 进而证明了每个复形都有一个正合的 Ding 内射包络.

2. 预备知识

在本文中, R 表示有单位元的结合环, R-Mod 表示左 R-模范畴, Ch(R) 表示由左 R-模的复形构成的阿贝尔范畴. 复形

$$\cdots \longrightarrow X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

被简记为 X, X 的第 n-次循环 $Z_n(X)$=Kerd_n, X 的第 n-次边缘 $B_n(X)$=Imd_{n+1}, X 的第 n-次同调群 $H_n(X)$=Kerd_n/Imd_{n+1}. X 是正合复形当且仅当对任意整数 n, $H_n(X) = 0$.

对 Ch(R) 中的两个复形 X, Y, 我们用 Hom(X, Y) 表示 Ch(R) 中从 X 到 Y 的链映射构成的阿

贝尔群, 用 $\mathrm{Ext}^{i\geq 1}(X,Y)$ 表示由 Hom 的右导出函子产生的同调群.

定义 2.1 [6] 设 A 是一个复形. 若对任意有限表示复形 F, 都有 $\mathrm{Ext}^1(F,A)=0$, 则称复形 A 为 FP-内射复形. 我们用 $\mathcal{FI}$ 表示 FP-内射复形的类.

定义 2.2 [3] 设 M 是一个复形. 若存在一个由内射复形构成的正合序列

$$\cdots \to I_1 \to I_0 \to I^0 \to I^1 \to \cdots$$

满足下列条件:

(1) $M \cong \mathrm{Ker}(I^0 \to I^1)$;

(2) 对任意 FP-内射复形 A, $\mathrm{Hom}(A,-)$ 保持上述序列的正合性.

则称复形 M 是 Ding 内射复形. 由([5]定理 2) 可知, Ding 内射复形的类就是每个层次为 Ding 内射模的复形的类. 因此, $dw(\mathcal{DI})$ 就是 Ding 内射复形的类, 其中 $\mathcal{DI}$ 表示 Ding 内射模的类.

定义 2.3 [7] 设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个对象类. 若存在态射 $f:\ M \to C$, 其中 $C \in \mathcal{C}$, 使得对任意的 $C' \in \mathcal{C}$ 以及任意的态射 $h \in \mathrm{Hom}(M,C')$, 都存在态射 $g \in \mathrm{Hom}(C,C')$ 使得 $h=gf$, 则称态射 f 为 M 的 $\mathcal{C}$ -预包络. 进一步, 若使得 $f=gf$ 的态射 $g \in \mathrm{Hom}(C,C)$ 只能是 C 的一个自同构, 则称 M 的 $\mathcal{C}$ -预包络 f 为 M 的 $\mathcal{C}$ -包络. 对偶的有 $\mathcal{C}$ -预覆盖和 $\mathcal{C}$ -覆盖的定义.

定义 2.4 [7] 设态射 $f:\ M \to C$ 为 M 的 $\mathcal{C}$ -预包络. 若对任意的 $X \in \mathcal{C}$, 都有 $\mathrm{Ext}^1(coker(f),X)=0$, 则称 f 为 M 的特殊的 $\mathcal{C}$ -预包络. 对偶的有特殊的 $\mathcal{C}$ -预覆盖的定义.

定义 2.5 [8] 设 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个余挠对. 若对 $\mathcal{A}$ 中的任意对象 M, 都存在如下两个短正合列 $0 \to M \to C \to F \to 0,\ 0 \to C' \to F' \to M \to 0$, 其中 $C,\ C' \in \mathcal{C}$, $F,\ F' \in \mathcal{F}$, 则称 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 为完备余挠对.

定义 2.6 [8] 设 $\mathcal{F}$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个对象类. 若 $\mathcal{F}$ 关于直和项封闭且 $\mathcal{F}$ 关于满同态的核, 单同态的余核和扩张均封闭, 则称 $\mathcal{F}$ 是一个 thick 类.

定义 2.7 [8] 设 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 是有足够内射对象的阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个完备余挠对. 若 $\mathcal{F}$ 是 thick 类且 $\mathcal{F}\cap\mathcal{C}=\mathrm{Inj}$, 其中 Inj 表示所有内射对象的类, 则称 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 为内射余挠对.

定义 2.8 [9] 设 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个余挠对. 若对任意 $F \in \mathcal{F}, C \in \mathcal{C}$, 都有 $\mathrm{Ext}^{i\geq 1}(F,\ C)=0$, 则称 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 为遗传余挠对. 这也等同于 $\mathcal{F}$ 关于满同态的核封闭, 或者 $\mathcal{C}$ 关于单同态的余核封闭.

定义 2.9 [9] 设 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 是阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个余挠对. 若 $\mathcal{F}$ 是覆盖类且 $\mathcal{C}$ 是包络类, 则称 $(\mathcal{F},\mathcal{C})$ 为完全余挠对.

3. 主要结果

下面的引理 3.1 与引理 3.2 给出了正合的 Ding 内射复形的等价刻画.

引理 3.1 X 是正合的 Ding 内射复形当且仅当存在复形短正合列 $0 \to K \to I \to X \to 0$, 其中

I 为内射复形, K 为正合的 Ding 内射复形.

证明: 由 ([10], 命题 2.1) 可知, X 是 Ding 内射复形当且仅当存在复形短正合列 $0 \to K \to I \to X \to 0$, 其中 I 为内射复形, K 为 Ding 内射复形. 因为 I 是正合的, 所以由 ([11], 推论 3 (I) (i)) 可知, X 是正合的当且仅当 K 是正合的. 从而 X 是正合的 Ding 内射复形当且仅当存在复形短正合列 $0 \to K \to I \to X \to 0$, 其中 I 为内射复形, K 为正合的 Ding 内射复形.

引理 3.2 X 是正合的 Ding 内射复形当且仅当 X 是由 Ding 内射模构成的正合复形.

证明: (必要性) 因为 $X \in ex(\mathcal{DI}) \subset dw(\mathcal{DI})$ 和 ([5], 定理 2), 所以 X 是 Ding 内射复形. 又因 X 是正合的, 所以 X 是正合的 Ding 内射复形.

(充分性) 因为 X 是 Ding 内射复形, 所以 X 是由 Ding 内射模构成的复形. 又因 X 是正合的, 所以 X 是 Ding 内射模构成的正合复形.

下面的命题 3.3 说明了正合的 Ding 内射复形的左正交类是预覆盖类.

命题 3.3 正合的 Ding 内射复形的左正交类是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的预覆盖类.

证明: 由 ([12], 定理 3.11) 可知, $({}^{\perp}\mathcal{DI}, \mathcal{DI})$ 是 R-Mod 中由一个集合余生成的内射余挠对. 进而由 ([8], 命题 7.2 (2)) 可知, $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}), ex(\mathcal{DI}))$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中由一个集合余生成的内射余挠对, 于是由内射余挠对的定义可知 $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}), ex(\mathcal{DI}))$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的完备余挠对. 从而 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中 (特殊的) 预覆盖类. 再由引理 3.2 可知, Ding 内射模构成的正合复形的类就是正合的 Ding 内射复形的类. 从而正合的 Ding 内射复形的左正交类是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的预覆盖类.

下面的引理 3.4 说明了余挠对 $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}), ex(\mathcal{DI}))$ 的遗传性.

引理 3.4 $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}), ex(\mathcal{DI}))$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的遗传余挠对.

证明: 考虑短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 其中 $A \in ex(\mathcal{DI})$, $B \in ex(\mathcal{DI})$, 下证 $C \in ex(\mathcal{DI})$. 因为 $ex(\mathcal{DI}) \subset dw(\mathcal{DI})$ 和 ([5], 引理 3), 所以 $C \in dw(\mathcal{DI})$. 又因 $A \in ex(\mathcal{DI})$, $B \in ex(\mathcal{DI})$, 所以 A, B 是正合的复形. 于是, 由 ([11],推论 3 (I) (i)) 可知, C 也是正合的复形. 从而 $C \in ex(\mathcal{DI})$.

引理 3.5 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的 thick 类.

证明: 对任意的 $\bigoplus_{i\in I} X_i \in {}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, 任意 $M \in ex(\mathcal{DI})$, 有如下的同构式:

$$0 = \mathrm{Ext}^1(\textstyle\bigoplus_{i\in I} X_i, M) \cong \textstyle\prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^1(X_i, M).$$

于是, 对任意 $i \in I$, 都有 $\mathrm{Ext}^1(X_i, M) = 0$. 因此, 由 M 的任意性可知, $X_i \in {}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$. 从而 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于直和项封闭. 由引理 3.4 可知, ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于满同态的核封闭. 显然 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于扩张封闭. 下面只需证明 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于单同态的余核封闭.

考虑正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 其中 $A \in {}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, $B \in {}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$. 对任意 $M \in ex(\mathcal{DI})$, 有正合列:

$$0 = \mathrm{Ext}^1(A, M) \to \mathrm{Ext}^2(C, M) \to \mathrm{Ext}^2(B, M).$$

由引理 3.4 可知, $\mathrm{Ext}^2(B,M)=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^2(C,M)=0$. 另一方面, 由引理 3.1 可知, 对 M 有短正合列 $0\to K\to I\to M\to 0$, 其中 I 为内射复形, K 为正合的 Ding 内射复形. 从而有正合列:

$$0=\mathrm{Ext}^1(C,I)\to\mathrm{Ext}^1(C,M)\to\mathrm{Ext}^2(C,K).$$

因为 $K\in ex(\mathcal{DI})$, 所以 $\mathrm{Ext}^2(C,K)=0$. 从而 $\mathrm{Ext}^1(C,M)=0$. 因此, 由 M 的任意性可知, $C\in {}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, 即 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于单同态的余核封闭.

下面的命题 3.6 说明了 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于正向极限的封闭性.

命题 3.6 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于正向极限封闭.

证明: 因为 $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}),ex(\mathcal{DI}))$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的余挠对, 所以由引理 3.5 和 ([3], 命题 3.2) 可知, ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 关于正向极封闭.

推论 3.7 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类.

证明: 由命题 3.2 和命题 3.6 可知, ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是关于正向极限封闭的预覆盖类. 因此, ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类.

下面的定理 3.8 给出了 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类的等价刻画.

定理 3.8 下列各条等价:

(1) $ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的包络类;

(2) $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}),ex(\mathcal{DI}))$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的完全余挠对;

(3) ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类.

证明: (1) $\Rightarrow$ (2) 由推论 3.7 以及条件 (1) 可得到 (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) 和 (2) $\Rightarrow$ (3) 均由完全余挠对的定义可得.

(3) $\Rightarrow$ (2) 由引理 3.4 可知, $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}),ex(\mathcal{DI}))$ 是遗传余挠对. 进一步, 由 ([9], 定理 1.4) 可知, 余挠对 $({}^{\perp}ex(\mathcal{DI}),ex(\mathcal{DI}))$ 是完全余挠对当且仅当 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是覆盖类且对任意 $X\in{}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, X 都有 $ex(\mathcal{DI})$ -包络. 下面我们证明对任意 $X\in{}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, X 都有 $ex(\mathcal{DI})$ -包络.

对任意 $X\in{}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$, 考虑短正合列 $0\to X\xrightarrow{f}I\to I/X\to 0$, 其中 f 为 X 的内射包络. 我们证明 f 恰好为 X 的 $ex(\mathcal{DI})$-包络. 对任意的 $M\in ex(\mathcal{DI})$, 因为 $ex(\mathcal{DI})\subset dw(\mathcal{DI})$ 和 $I\in\mathcal{FI}\subset{}^{\perp}dw(\mathcal{DI})$, 所以 $\mathrm{Ext}^1(I,M)=0$. 从而由 M 的任意性可知, $I\in{}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$. 进而由引理 3.5 可知, $I/X\in{}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$. 于是, 对任意 $Y\in ex(\mathcal{DI})$, 都有 $\mathrm{Ext}^1(I/X,Y)=0$. 从而 f 为 X 的特殊的 $ex(\mathcal{DI})$ -预包络. 又因 f 为 X 的内射包络, 所以使得 $f=gf$ 的 $g\in\mathrm{Hom}(I,I)$ 只能为 I 的一个自同构. 从而 f 为 X 的 $ex(\mathcal{DI})$ -包络.

推论 3.9 $ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的包络类.

证明: 由定理 3.8 可知, $ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的包络类当且仅当 ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类. 而由推论 3.7 可知, ${}^{\perp}ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的覆盖类. 从而 $ex(\mathcal{DI})$ 是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的包络类. 因此, 由引理 3.2 可知, 正合的 Ding 内射复形的类是 $\mathrm{Ch}(R)$ 中的包络类.

参考文献

[1] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2008) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Modules. *Journal of Algebra and Its Applications*, **7**, 491-506. https://doi.org/10.1142/S0219498808002953

[2] 刘静, 鲍炎红, 邓小虎. Gorenstein FP-内射复形[J]. 数学研究, 2011, 44(2): 176-182.

[3] Gillespie, J. (2017) On Ding Injective, Ding Projective and Ding Flat Modules and Complexes. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **47**, 2641-2673. https://doi.org/10.1216/RMJ-2017-47-8-2641

[4] Yang, G. and Estrada, S. (2020) Characterizations of Ding Injective Complexes. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **43**, 2385-2398. https://doi.org/10.1007/s40840-019-00807-8

[5] Gillespie, J. and Iacob, A. (2023) Ding Injective Envelopes in the Category of Complexes. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, **72**, 997-1004. https://doi.org/10.1007/s12215-021-00706-7

[6] Yang, X.Y. and Liu, Z.K. (2010) FP-Injective Complexes. *Communications in Algebra*, **38**, 131-142. https://doi.org/10.1080/00927870902861356

[7] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (2000) Relative Homological Algebra. Walter De Gruyter, New York, 129. https://doi.org/10.1515/9783110803662

[8] Gillespie, J. (2016) Gorenstein Complexes and Recollements from Cotorsion Pairs. *Advances in Mathematics*, **291**, 859-911. https://doi.org/10.1016/j.aim.2016.01.004

[9] Enochs, E.E., Jenda, O.M.G. and Lopez-Ramos, J.A. (2004) The Existence of Gorenstein Flat Covers. *Mathematica Scandinavica*, **94**, 46-62. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-14429

[10] 陈文静. 关于Gorenstein FP-内射复形[J]. 山东大学学报(理学版), 2014, 49(5): 81-85.

[11] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998: 177.

[12] Gillespie, J. and Iacob, A. (2021) Duality Pairs, Generalized Gorenstein Modules, and Ding Injective Envelopes. arXiv: 2105.01770