Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1660-1667
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136169

Hans汉斯

一类具有变号势的Schrödinger-Maxwell方程无穷多高能解的存在性

汪敏庆，陆晓娟

桂林信息科技学院数学教研部，广西 桂林

收稿日期：2023年5月11日；录用日期：2023年6月13日；发布日期：2023年6月21日

摘 要

本文研究了一类具有变号势的Schrödinger-Maxwell方程无穷多能高能解的存在性问题 $\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in\mathbf{R}^3, \\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathbf{R}^3. \end{cases}$ 其中 $\alpha>0$，$V(x)\in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$，$\inf\limits_{x\in\mathbf{R}^3}V(x)>-\infty$。在 f,g 满足一定的假设条件下，且 $p\in(2,6)$ 时，运用变分法和临界点理论，得到了无穷多高能解的存在性。

关键词

Schrödinger-Maxwell方程，高能解，临界点理论，变分法，变号势

The Existence of Infinitely Many High Energy Solutions for a Kind of Schrödinger-Maxwell Equation with Sign Changing Potentials

Minqing Wang, Xiaojuan Lu

Mathematics Teaching and Research Department, Guilin Institute of Information Technology, Guilin Guangxi

Received: May 11th, 2023; accepted: Jun. 13th, 2023; published: Jun. 21st, 2023

Abstract

In this paper, we consider the existence of infinitely many high energy solutions for a kind of Schrödinger-Maxwell equation with sign changing potentials

文章引用: 汪敏庆, 陆晓娟. 一类具有变号势的 Schrödinger-Maxwell 方程无穷多高能解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1660-1667. DOI: 10.12677/pm.2023.136169

$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in\mathbf{R}^3, \\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathbf{R}^3. \end{cases}$ **where $\alpha>0$, $V(x)\in C(\mathbf{R}^3,\mathbf{R})$, $\inf_{x\in\mathbf{R}^3}V(x)>-\infty$. Under certain assumptions on f,g and $p\in(2,6)$, we obtain the existence of infinitely many high energy solutions by using variational methods and critical point theory.**

Keywords

Schrödinger-Maxwell Equations, High Energy Solution, Critical Point Theory, Variational Methods, Sign Changing Potential

1. 引言

研究以下具有变号势的 Schrödinger-Maxwell 方程无穷多高能解的存在性。

$$\begin{cases} -\Delta u+V(x)u+\alpha\phi f(u)=g(x,u), & x\in\mathrm{R}^3, \\ -\Delta\phi=2\alpha F(u), & x\in\mathrm{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

这样的方程又被称为 Schrödinger-Maxwell 方程。对于系统(1)，国内外的许多学者已经进行了广泛的研究并且得到了许多很好的结果。比如文献[1]讨论了 $f(x,u)=u^p, p\in(1,5)$ 的情形，利用 Pohozaev 和 Lagrange 数乘法得到解的存在性、不存在性和多重。

文献[2]讨论了 $f(x,u)=\lambda b(x)|u|^{p-1}t+\mu|u|^{p-1}u, p\in(0,1), q\in(3,5)$ 的情形运用了喷泉定理和对偶的喷泉定理得到了类似于系统(1)的正解和负解的存在性。在文献[3]的工作中，运用对称的山路定理证明了当 $f(x,u)$ 满足某些增长条件时，系统(1)的径向对称解的存在性。文献[4]中作者运用喷泉定理和 Pohozaev 恒等式证明了当 $f(x,u)$ 是次线性增长和超线性增长时解的多重性的存在性。文献[5]考虑了当 $V(x)$ 为一个正常数时，系统(1)的多个正解的存在性问题。受文献[2]和[5]的启发，本文通过弱化了位势函数 $V(x)$ 的条件，不再要求 $V(x)$ 满足取值恒为正的情况，考虑系统(1)，利用变分法和喷泉定理，得到了系统(1)无穷多高能解得存在性。

G(1) $V(x)\in C(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$，$\inf_{x\in\mathrm{R}^3}V(x)>-\infty$，对 $\forall M>0$，$\operatorname{meas}\{x\in\mathrm{R}^3, V(x)\le M\}<\infty$，其中这里的测度空间 R^3 空间里的 Lebesgue 测度。

G(2) $f\in C^1(\mathrm{R},\mathrm{R}^+)$，存在常数 $c>0$，$u\in\mathrm{R}$，使得 $f(u)\le c(1+|u|)$。

G(3)对任意的 $u\in\mathrm{R}$，有 $F(u)-\frac{1}{2}f(u)u\ge0$。

G(4) $g\in C(\mathrm{R}^3\times\mathrm{R},\mathrm{R})$，$p\in(2,6)$，存在 $c_1,c_2>0$，使得：

$$|g(x,u)|\le c_1|u|+c_2|u|^{p-1}$$

对 $(x,u)\in(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$ 几乎处处成立。

G(5) 存在常数 $\mu>4$ 和 $r_0>0$，当 $|u|\ge r_0$ 时，有：

$$F(x,u):=\frac{1}{\mu}g(x,u)u-G(x,u)\geq 0, x\in \mathrm{R}^3.$$

且当 $u\geq 0$ 时，有 $g(x,u)u\geq 0$。

G(6) 对 $(x,u)\in(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$，有 $g(x,-u)=-g(x,u)$。

对于系统(1)，主要的结果如下：

定理 1.1 若 G(1)~G(6)条件成立，则系统(1)存在无穷多个高能解。

2. 预备工作及相关引理

记 $H^1(\mathrm{R}^3)=u\in L^2(\mathrm{R}^3):\nabla u\in L^2(\mathrm{R}^3)$，其相应的内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle_1=\int_{\mathrm{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+uv)\mathrm{d}x.$$

和

$$\|u\|_1=\langle u,v\rangle_1^{\frac{1}{2}}.$$

定义 $D^{1,2}(\mathrm{R}^3)=\left\{u\in L^{2^*}(\mathrm{R}^3):|\nabla u|\in L^2(\mathrm{R}^3)\right\}$ 相应的范数为

$$\|u\|_{D^{1,2}}=\left(\int_{\mathrm{R}^3}|\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

定义

$$E=\left\{u\in H^1(\mathrm{R}^3):\int_{\mathrm{R}^3}\left(|\nabla u|+V(x)|u|^2\right)\mathrm{d}x<\infty\right\},$$

则 E 是一个 Hilbert 空间，定义相应的内积和范数分别为

$$\langle u,v\rangle=\int_{\mathrm{R}^3}(\nabla u\cdot\nabla v+V(x)uv)\mathrm{d}x,$$

和

$$\|u\|=\langle u,v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

记 $|\cdot|$ 为 $L^s(\mathrm{R}^3)$ 的范数，$s\in(2,6)$，再记

$$S=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathrm{R}^3),|u|_6=1}|\nabla u|_2, \gamma_s=\sup_{u\in H^1(\mathrm{R}^3),\|u\|=1}|u|_s.$$

显然地，嵌入 $E\to L^p(\mathrm{R}^3)(\forall p\in[2,2^*])$ 是连续的。

在定理 1.1 的假设条件下，我们有 $G(x,u)\geq 0,(x,u)\in(\mathrm{R}^3,\mathrm{R})$。由 G(4)可得：

$$G(x,u)\leq\frac{c_1}{2}|u|^2+\frac{c_2}{p}|u|^p,(x,u)\in(\mathrm{R}^3,\mathrm{R}), \tag{2}$$

故存在常数 $a_0=a(r_0)>0$，使得：

$$|F(x,u)|\leq a_0|u|^2, \tag{3}$$

其中$(x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，$|u|\le r_0$。更准确地说，对所有的$(x,u)\in(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$当$|u|\le r_0$时，由式(2)，G(5)可得：

$$\begin{aligned}|F(x,u)|&\le\left|\frac{1}{\mu}g(x,u)u\right|+|G(x,u)|\\&\le\frac{1}{\mu}\left(u^2+|u|^p\right)+\frac{c_1}{2}|u|^2+\frac{c_2}{p}|u|^p\\&\le\frac{2+\mu c_1}{2\mu}u^2+\frac{p+\mu c_2}{p\mu}u^p\\&\le\left(\frac{2+\mu c_1}{2\mu}+\frac{p+\mu c_2}{p\mu}r_0^{p-2}\right)u^2.\end{aligned}$$

令$a_0=\frac{2+\mu c_1}{2\mu}+\frac{p+\mu c_2}{p\mu}r_0^{p-2}$，则式(3)式成立。

在本文中，我们将用下列假设条件代替 G(1)：

G(1') $V(x)\in C(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$，$\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^3}V(x)\ge a_0+1$，这里的常数$a_0$与式(3)中的$a_0$相同，且对每一个$M>0$，$\operatorname{meas}\{x\in\mathbb{R}^3,V(x)\le M\}<\infty$。

由文献[6]知，当 G(1')条件满足时，嵌入$E\to L^p(\mathbb{R}^3)(\forall p\in[2,2^*))$是紧的。

根据 Euler-Lagrange 方程，系统(1)对应的泛函$I:E\times D^{1,2}(\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$定义如下：

$$I(u,\phi)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}\left(|\nabla u|^2+V(x)u^2\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x+\alpha\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\phi\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)\mathrm{d}x.$$

其中$F(u)=\int_0^u f(x)\mathrm{d}x$，$G(x,u)=\int_0^u g(x,s)\mathrm{d}s$。

根据 Lax-Milgram 定理(详见文献[7])，$\forall u\in E$，存在唯一的$\phi_u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^3)$，使得

$$-\Delta\phi_u=2\alpha F(u).$$

易知，ϕ_u是$-\Delta\phi_u=2\alpha F(u)$的一个弱解。特别地，$\phi_u$的积分形式如下

$$\phi_u=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(u(x))}{|x-y|}\mathrm{d}y.$$

易知，$\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla\phi_u|^2\,\mathrm{d}x=2\alpha\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\phi_u\mathrm{d}x$，故泛函$\Phi_u:E\to\mathbb{R}$

$$\Phi(u)=I(u,\phi)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3}F(u)\phi_u\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}G(x,u)\mathrm{d}x$$

是定义良好的，且$\Phi_u\in(E,\mathbb{R})$，其导数如下：

$$\langle\Phi(u),v\rangle=\langle u,v\rangle+\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^3}f(u)\phi_u v\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}g(x,u)v\mathrm{d}x.$$

引理 2.1 [8]由条件 G(2)，对任给的$u\in H^1(\mathbb{R}^3)$，存在唯一的$\phi_u\in D^{1,2}$，使得

$$-\Delta\phi_u=2\alpha F(u),$$

并且有：

(i) $\|\phi_u\|_{D^{1,21}}^2 = 2\alpha\int_{\mathrm{R}^3} F(u)\phi_u \mathrm{d}x$。

(ii) $\phi_u \ge 0$。

(iii) $\|\phi_u\|_{D^{1,21}} \le \alpha c\left(\|u\| + \|u\|^2\right)$。

(iv) $\int_{\mathrm{R}^3} F(u)\phi_u \mathrm{d}x \le \alpha\overline{c}\left(\|u\|^2 + \|u\|^4\right)$。

其中 $\overline{c}$ 仅与 C, S, γ_{12} 有关。

(v) 如果 v 是径向的，则 ϕ_u 也是径向的。

根据引理 2.1，容易得到 $(u,\phi) \in H^1(\mathrm{R}^3) \times D^{1,2}(\mathrm{R}^3)$ 是系统(1)的弱解，仅当 $u \in H^1(\mathrm{R}^3)$ 是泛函 Φ 的临界点，其中

$$\Phi(u) = I(u,\phi) = \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_{\mathrm{R}^3} F(u)\phi_u \mathrm{d}x - \int_{\mathrm{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x.$$

定理 2.2 [9]设 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Hilbert 空间，e_j 为其一组标准正交基。令 $X_j = span\{e_j\}$，$Y_k = \oplus_{j-0}^{k} X_j$，$Z_k = \oplus_{j-0}^{k} X_j$。设泛函 $\Phi \in C^1(X, \mathrm{R})$ 满足 $\Phi(-u) = \Phi(u)$，$u \in X$。如果存在 $k_0 \in N$，使得对每一个 $k > k_0$，存在 $\rho_k > r_k > 0$ 满足：

(Φ1) $a_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = \rho_k} \Phi(u) \le 0$；

(Φ2) $b_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \Phi(u) \to \infty, k \to \infty$；

(Φ3)对任意的 $c > 0$，Φ 满足 $(PS)_c$ 条件。

引理 2.3 [10]对任意的 $2 \le p < 2^*$，我们有：

$$\beta_k := \sup_{u \in Z_k, \|u\|_E = 1} \|u\|_{L^p} \to 0, k \to \infty.$$

引理 2.4 [1]设 X 是一个 Banach 空间，$\Phi \in C^1(X, \mathrm{R})$ 满足 $(PS)_c$ 条件，如果任一 $\{u_n\} \in X$，

$$\Phi(u_n) \to c, \Phi'(u_n) \to 0,$$

则 Φ 有一收敛子列。

引理 2.5 [11]在定理 2.2 的假设下，若 Φ 满足 $(PS)_c$ 条件，则 c 是 Φ 的一个临界值。

3. 定理 1.1 的证明

我们先证明 $\Phi(u)$ 在 E 中满足 $(PS)_c$ 条件，再证明 $\Phi(u)$ 满足喷泉定理其他条件，最后运用定理 2.2 即可。在通篇文章中，常数 c 和 c_λ 代表不同的常数，其中 λ 为正整数。

引理 3.1 若 G(1')，G(2)~G(6)条件成立，则 $\Phi(u)$ 满足 $(PS)_c$ 条件。

证明：设任一序列 $\{u_n\} \in E$，满足：

$$n \to \infty, u_n \in Y_n, \Phi(u_n) \to c, \Phi'(u_n) \to 0,$$

当 n 充分大时，由 G(3)，G(5)得：

$$
\begin{aligned}
c+1+\|u_n\| &\geq \Phi(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle \Phi'(u_n),u_n\rangle \\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\left(\frac{1}{2}F(u_n)\phi_{u_n}-\frac{1}{\mu}f(u_n)\phi_{u_n}u_n\right)\mathrm{d}x \\
&\quad+\int_{\mathrm{R}^3}\left(\frac{1}{\mu}g(x,u_n)\phi_{u_n}-G(x,u_n)\right)\mathrm{d}x \\
&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\left(\frac{1}{2}F(u_n)\phi_{u_n}-\frac{1}{\mu}f(u_n)\phi_{u_n}u_n\right)\mathrm{d}x \\
&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2+\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\mu}\right)F(u_n)\phi_{u_n}\mathrm{d}x \\
&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|u_n\|^2.
\end{aligned}
$$

故$\{u_n\}$在E中有界。因为$\{u_n\}$有界，不妨假定在E中u_n弱收敛于u，则在$L^s(\mathrm{R}^3)(s\in[2,6))$中，我们有$u_n\to u$，且：

$$
\begin{aligned}
\|u_n-u\|^2=&\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u\rangle+\alpha\int_{\mathrm{R}^3}\left(f(u)\phi_u-f(u_n)\phi_{u_n}\right)(u_n-u)\mathrm{d}x \\
&+\int_{\mathrm{R}^3}\left(g(x,u_n)-g(x,u)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

显然：$\langle\Phi'(u_n)-\Phi'(u),u_n-u\rangle\to0$。又因为

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathrm{R}^3}\left(f(u)\phi_u-f(u_n)\phi_{u_n}\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leq\left(\|\phi_u\|_6\|f(u)\|_2+\|\phi_{u_n}\|_6\|f(u_n)\|_2\right)\|u_n-u\|_3, \\
&\left|\int_{\mathrm{R}^3}\left(g(x,u_n)\phi_u-g(x,u)\right)(u_n-u)\mathrm{d}x\right|\leq\left(\|g(x,u_n)\|_2+\|g(x,u_n)\|_2\right)\|u_n-u\|_2.
\end{aligned}
$$

因此$\|u_n-u\|^2\to0$，$n\to\infty$。

引理 3.2 若 G(1')，G(2)~G(6)条件成立，则：

$$
a_k:=\max_{u\in Y_k,\|u\|=\rho_k}\Phi(u)\leq0.
$$

证明：由 G(4)可知，存在$\delta>0$，当$x\in\mathrm{R}^3,0<|t|\leq\delta$时，我们有：

$$
\left|\frac{g(x,t)t}{t^2}\right|=\left|\frac{g(x,t)}{t}\right|\leq1, \tag{4}
$$

故存在$M_1>0$，满足

$$
\left|\frac{g(x,t)t}{t^2}\right|\leq\frac{c\left(1+|t|^{p-1}\right)|t|}{t^2}\leq M_1, \tag{5}
$$

因此，当$0\leq|t|\leq r_0$时，由式(4)和式(5)得：

$$
g(x,t)t\geq-(M_1+1)|t|^2,x\in\mathrm{R}^3.
$$

利用等式$G(x,t)=\int_0^1 g(x,rt)t\mathrm{d}r$，我们有：

$$
G(x,t)\geq-\frac{1}{2}(M_1+1)|t|^2. \tag{6}
$$

令 $c_4 = \frac{1}{2}(M_1 + 1) + c_3$，则由 G(5)，式(6)得：

$$G(x,t) \ge c_3 |t|^{\mu} - c_4 |t|^2,$$

所以有：

$$\Phi(u) \le \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha^2 c}{2}\|u\|^4 - c_3 \|u\|_{L^\mu}^{\mu} + c_4 \|u\|_{L^2}^2 .$$

因为在有限维空间中所有范数等价，$\mu > 4$，所以对于 $u \in Y_k$，$\rho_k > 0$ 足够大时，有：

$$a_k := \max_{u \in Y_k, \|u\| = \rho_k} \Phi(u) \le 0.$$

引理 3.3 若 G(1')，G(2)~G(6)条件成立，则：

$$b_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \Phi(u) \to \infty, k \to \infty.$$

证明：由 G(4)可知，对任意的 $u \in Z_K$，$\varepsilon > 0$ 足够小时，有：

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_{\mathrm{R}^3} F(u)\phi_u \mathrm{d}x - \int_{\mathrm{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathrm{R}^3} G(x,u)\mathrm{d}x \\
&\ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{c}{2}\|u\|_2^2 - \frac{c}{p}\|u\|_p^p \\
&\ge \left(\frac{1}{2} - \varepsilon c\right)\|u\|^2 - \frac{c}{p}\beta_k^p \|u\|^p .
\end{aligned}$$

由引理 2.3 可知 $\beta_k := \sup_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \|u\|_p \to 0$，$k \to \infty$。

选定 $r_k = \left[\frac{p}{2c\beta_k^p}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon c\right)\right]^{\frac{1}{2-p}}$，则：

$$\begin{aligned}
b_k &= \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \Phi(u) \\
&\ge \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon c\right)\|u\|^2 - \frac{c}{p}\beta_k^p \|u\|^p \\
&\ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon c\right) r_k^2 .
\end{aligned}$$

由 $\beta_k := \sup_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \|u\|_p \to 0$，$k \to \infty$，$p > 2$，有：$b_k \to \infty$，$k \to \infty$，故

$$b_k := \inf_{u \in Z_k, \|u\| = r_k} \Phi(u) \to \infty, k \to \infty.$$

由 G(1)可得，存在一个常数 $V_0 > 0$，使得 $\bar{V}(x) := V(x) + V_0 \ge a_0 + 1$，这里的 a_0 与式(5)中的 a_0 相同。令 $\bar{g}(x,u) = g(x,u) + V_0 u$，则容易验证下列引理成立。

引理 3.4 问题(1)与下列问题等价。

$$\begin{cases} -\Delta u + \bar{V}(x)u + \alpha\phi f(u) = \bar{g}(x,u), & x \in \mathrm{R}^3, \\ -\Delta\phi = 2\alpha F(u), & x \in \mathrm{R}^3. \end{cases} \tag{7}$$

定理 1.1 的证明 由引理 3.1、引理 3.2 和引理 3.3 可知，式(7)的泛函满足定理 2.2 的所有条件。再由引理 3.4 可知，系统(1)有无穷多个高能解，故定理 1.1 成立，证毕。

基金项目

本论文得到了 2022 年广西区教育厅高校中青年科研基础能力提升项目(2022KY1623)；桂林信息科技学院 2020 年科研启动基金项目(XJ202080)资助。

参考文献

[1] Azzollini, A., d'Avenia, P. and Pomponio, A. (2010) On the Schrödinger-Maxwell Equations under the Effect of a General Nonlinear Term. *Annales del'Institut Henri Poincare* (*C*) *Nonlinear Analysis*, **27**, 779-791. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2009.11.012

[2] D'Aprile, T. and Mugnai, D. (2004) Solitary Waves for Nonlinear Klein-Gordon-Maxwell and Schrödinger-Maxwell Equations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*: *Section A Mathematics*, **134**, 893-906. https://doi.org/10.1017/S030821050000353X

[3] Ruiz, D. (2006) The Schrödinger-Poisson Equation under the Effect of a Nonlinear Local Term. *Journal of Functional Analysis*, **237**, 655-674. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.005

[4] Coclite, G.M. (2003) A Multiplicity Result for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Communications in Applied Analysis*, **7**, 417-424.

[5] Zzollini, A. and Pomponio, A. (2008) Ground State Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **345**, 90-108. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.057

[6] Benci, V. and Fortunato, D. (1998) An Eigenvalue Problem for the Schrödinger-Maxwell Equations. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **11**, 283-293. https://doi.org/10.12775/TMNA.1998.019

[7] Sun, J. (2012) Infinitely Many Solutions for a Class of Sublinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **390**, 514-522. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.01.057

[8] Li, Q., Su, H. and Wei, Z. (2010) Existence of Infinitely Many Large Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Maxwell Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **72**, 4264-4270. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.02.002

[9] Willem, M. (1996) Minimax Theorems. Birkhäuser Boston, Inc., Boston. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[10] Zou, W.-M. and Schechter, M. (2006) Critical Point Theory and Its Applications. Springer, New York.

[11] Zhao, L. and Zhao, F. (2008) On the Existence of Solutions for the Schrödinger-Poisson Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **346**, 155-169. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.053