Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1867-1875
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136190

强拟-Gorenstein投射模

张文菲

西北师范大学，数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年5月22日；录用日期：2023年6月23日；发布日期：2023年6月30日

摘 要

本文引入了强拟-Gorenstein投射(内射)模的概念，证明了其一些基本性质，讨论了这两类模的等价刻画。

关键词

强拟-Gorenstein投射模，强拟-Gorenstein内射模，投射可解，内射可解

Strongly Quasi-Gorenstein Projective Modules

Wenfei Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: May 22^{nd}, 2023; accepted: Jun. 23^{rd}, 2023; published: Jun. 30^{th}, 2023

Abstract

In this paper, the concept of strongly quasi-Gorenstein projective (injective) modules is introduced and some basic properties are proved, and equivalent inscriptions of these two types of modules are discussed.

文章引用: 张文菲. 强拟-Gorenstein投射模[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1867-1875.
DOI: 10.12677/pm.2023.136190

Keywords

Strongly Quasi-Gorenstein Projective Modules, Strongly Quasi-Gorenstein Injective Modules, Projectively Resolved, Injectively Resolved

1. 介绍

1969年, 在文献 [1]中, Auslander等人引入了G-维数的概念, 并对它的性质做了一系列研究. 2004年, Holm在文献 [2]中研究了一般环上的Gorenstein投射(内射)模及其维数, 得到了很多与投射(内射)模及其维数相似的结论. 2007年, Bennis等人在文献 [3]中提出了强Gorenstein投射模的概念, 并证明了R-模M是Gorenstein投射的当且仅当它是某个强Gorenstein投射模的直和项. 2008年, Yang等人在文献 [4]中对这类模做了进一步研究.同年, Mao等人在文献 [5]引入了Gorenstein FP-内射模, 2009 年, Ding等人在文献 [6]引入了强Gorenstein平坦模. 2010年, Gillespie在文献 [7]中把它们分别重新命名为Ding内射模和Ding投射模. 2011 年, Xing在文献 [8] 中引入了强Ding投射模和强Ding 内射模的定义, 证明了其一些基本性质. 2022年, Mashhad在文献 [9]引入了拟-Gorenstein投射(内射)模的定义, 证明了其一些基本性质.

受此启发, 本文引入了强拟-Gorenstein投射(内射)模, 研究了该模的一些基本性质.

本文中, 环R指有单位元的结合环, 模均指左R-模, $\mathcal{P}(R)$和$\mathcal{QP}(R)$分别表示投射模类和拟投射模类. $\mathcal{I}(R)$和$\mathcal{QI}(R)$ 分别表示内射模和拟内射模类. $\mathcal{QGP}(R)$和$\mathcal{QGI}(R)$分别表示拟-Gorenstein投射模类和拟-Gorenstein内射模类. $\mathrm{pd}_R(M)$表示R-模M 的投射维数, $\mathrm{Gpd}_R(M)$表示R-模M 的Gorenstein投射维数.

2. 预备知识

定义 2.1 [9] 称R-模M为拟-Gorenstein投射模, 如果存在一个投射模的正合复形

$$\mathbb{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to \cdots,$$

使得$M \cong \mathrm{Im}(P_1 \to P_0)$, 且对任意的$Q \in \mathcal{QP}(R)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}, Q)$正合.

定义 2.2 [9] 称R-模N为拟-Gorenstein内射模, 如果存在一个内射模的正合复形

$$\mathbb{I} = \cdots \to I_1 \to I_0 \to I_{-1} \to \cdots,$$

使得$M \cong \mathrm{Im}(I_1 \to I_0)$, 且对任意的$E \in \mathcal{QI}(R)$, $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{I})$正合.

定义 2.3 [10] 称R-模M为拟投射模, 如果

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "\eta"] & M/T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

可以补充为以下交换图:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "f'"'] & \\ M \arrow[r, "\eta"] & M/T \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

即$f = \eta f'$.

定义 2.4 [10] 称R-模M为拟内射模, 如果

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M \\ & M & \end{tikzcd}$$

可以补充为以下交换图:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & M \arrow[dl, "f'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

即$f = f'j$, 其中T为M的子模.

3. 强拟-Gorenstein投射模

定义 3.1 称R-模M为强拟-Gorenstein投射模, 如果存在一个投射模的正合复形

$$\mathbb{P} = \cdots \to P \xrightarrow{f} P \xrightarrow{f} P \to \cdots,$$

使得$M \cong \mathrm{Im}f$, 且对任意的$Q \in \mathcal{QP}(R)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}, Q)$正合.

定义 3.2 称R-模N为强拟-Gorenstein内射模, 如果存在一个内射模的正合复形

$$\mathbb{I} = \cdots \to I \xrightarrow{g} I \xrightarrow{g} I \to \cdots,$$

使得$N \cong \mathrm{Im}g$, 且对任意的$E \in QI(R)$, $\mathrm{Hom}(E, \mathbb{I})$正合.

用$\mathcal{SQGP}(R)$和$\mathcal{SQGI}(R)$分别记为强拟-Gorenstein投射模类和强拟-Gorenstein内射模类.

注记 3.3 $\mathcal{P}(R)\subseteq\mathcal{QP}(R),\mathcal{I}(R)\subseteq\mathcal{QI}(R)$. $\mathcal{SQGP}(R)\subseteq\mathcal{QGP}(R),\mathcal{SQGI}(R)\subseteq\mathcal{QGI}(R)$.

命题 3.4 (1) 强拟-Gorenstein投射模关于直和封闭;

(2) 强拟-Gorenstein内射模关于直积封闭.

证明 (1) 设$(P_i)_{i\in I}$是一簇强拟-Gorenstein投射模, 则由定义知, 存在正合列

$$\mathbb{P}=\cdots\to P\overset{f}{\to}P\overset{f}{\to}P\to\cdots,$$

使得$P_i\cong\mathrm{Im}f$, 且对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$, $\mathrm{H}om(\mathbb{P},Q)$正合. 又因为存在正合列

$$\oplus\mathbb{P}=\cdots\to\oplus P\overset{\oplus f}{\to}\oplus P\overset{\oplus f}{\to}\oplus P\to\cdots,$$

并且$\mathrm{H}om(\oplus\mathbb{P},Q)\cong\prod\mathrm{Hom}(\mathbb{P},\mathrm{Q})$, 故对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R),\mathrm{H}om(\oplus\mathbb{P},Q)$正合, 且$\oplus P_i\cong\mathrm{Im}(\oplus f)$, 因此$(\oplus P_i)_{i\in I}$是强拟-Gorenstein投射模.

(2)设$(I_i)_{i\in I}$是一簇强拟-Gorenstein内射模, 则由定义知, 存在正合列

$$\mathbb{I}=\cdots\to I\overset{g}{\to}I\overset{g}{\to}I\to\cdots,,$$

使得$I_i\cong\mathrm{Im}g$, 且对任意的$E\in\mathcal{QI}(R)$, $\mathrm{H}om(E,\mathbb{I})$正合. 又因为存在正合列

$$\prod\mathbb{I}=\cdots\to\prod I\overset{\prod g}{\to}\prod I\overset{\prod g}{\to}\prod I\to\cdots$$

并且$\mathrm{H}om(E,\prod\mathbb{I})\cong\prod\mathrm{Hom}(\mathrm{E},\mathbb{I})$, 故对任意的$E\in\mathcal{QI}(R),\mathrm{H}om(E,\prod\mathbb{I})$ 正合, 且$\prod I_i\cong\mathrm{Im}(\prod g)$, 因此$\prod I_i$是强拟-Gorenstein内射模.

命题 3.5 每个投射模是强拟-Gorenstein投射模.

证明 设P是投射模,考虑正合列$\mathbb{P}=\cdots\to P\oplus P\overset{f}{\to}P\oplus P\to\cdots$,其中$f:(x,y)\to(0,x)$,则$0\oplus P=\mathrm{Ker}f=\mathrm{Im}f=P$. 对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$, 用$\mathrm{H}om(-,Q)$作用于$\mathbb{P}$, 则有以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}om(P\oplus P,Q) \arrow[r, "\mathrm{H}om(f,Q)"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{H}om(P\oplus P,Q) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{H}om(P,Q)\oplus\mathrm{H}om(P,Q) \arrow[r] & \mathrm{H}om(P,Q)\oplus\mathrm{H}om(P,Q) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

故$\mathrm{H}om(\mathbb{P},Q)$正合, 因此$P$是强拟-Gorenstein投射模.

命题 3.6 每个内射模是强拟-Gorenstein内射模.

定理 3.7 M是拟-Gorenstein投射模$\Longleftrightarrow M$是一个强拟-Gorenstein投射模的直和项.

证明 $(\Rightarrow)$设M是拟-Gorenstein投射模.则由定义知存在正合列

$$\mathbb{P}=\cdots\to P_1\overset{d_1^P}{\to}P_0\overset{d_0^P}{\to}P_{-1}\overset{d_{-1}^P}{\to}P_{-2}\to\cdots$$

使得$M\cong Im(d_1^P)$, 并且对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{P},\mathrm{Q})$正合, 对任意的整数$m,i$, 规定

$$(\sum^m P)_i=P_{i-m},d_i^{\sum^m p}=d_{i-m}^P,$$

考虑正合列

$$\mathbb{Q}=\oplus(\sum^m P)=\cdots\to Q=\oplus P_i\overset{\oplus d_i^P}{\to}Q=\oplus P_i\overset{\oplus d_i^P}{\to}Q=\oplus P_i\to\cdots.$$

因为$Im(\oplus d_i^P)\cong\oplus Im(d_i^P)$, 则$M$是$Im(\oplus d_i^P)$的直和项. 又由文献([11],命题20.2(1))知, 对任意的$L\in\mathcal{QP}(R)$,

DOI: 10.12677/pm.2023.136190

$\mathrm{Hom}(\oplus_{m\in Z}(\sum^m P),L)\cong\prod_{m\in Z}\mathrm{H}om(\sum^m P,L)$, 故$\mathrm{Hom}(\mathbb{Q},L)$ 是正合的, 所以M是一个强拟-Gorenstein投射模$Im(\oplus d_i^P)$的直和项.

($\Leftarrow$) 设N是强拟-Gorenstein投射模, 则$N=M\oplus Q$, 由注记3.3知, $N\in\mathcal{QGP}(R)$, 又由文献([9],引理2.6(1))可知, N关于直和项封闭, 故$M\in\mathcal{QGP}(R)$.

定理 3.8 M是拟-Gorenstein内射模$\Longleftrightarrow M$是一个强拟-Gorenstein内射模的直和项.

命题 3.9 M是R-模, 以下结论等价:

(1) M是强拟-Gorenstein内射模;

(2) 存在短正合列$0\to M\to P\to M\to 0$, 其中P是投射模, 且对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$, $Ext^{i\geq 1}(M,Q)=0$;

(3) 存在短正合列$0\to M\to P\to M\to 0$, 其中P是投射模, 且对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$,$0\to\mathrm{Hom}(M,Q)\to\mathrm{Hom}(M,Q)\to\mathrm{Hom}(M,Q)\to 0$正合.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 因为M是强拟-Gorenstein投射模, 则由定义知, 存在短正合列$\mathbb{X}=0\to M\to P\to M\to 0$, 其中$P$是投射模, 且对任意的$Q\in\mathcal{QP}(R)$, $\mathrm{Hom}(\mathbb{X},Q)$正合, 故考虑以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}om(M,Q) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{H}om(M,Q) \arrow[r] & Ext_R^1(M,Q) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

则由短五引理知, $Ext_R^1(M,Q)=0$, 从而$Ext_R^{i\geq 1}(M,Q)=0$.

(2)$\Rightarrow$(3) 显然.

(3)$\Rightarrow$(1) 由定义即可证明.

对于强拟-Gorenstein内射模也有类似性质.

命题 3.10 N是R-模, 以下结论等价:

(1) N是强拟-Gorenstein内射模;

(2) 存在短正合列$0\to N\to I\to N\to 0$, 其中I是内射模, 且对任意的$E\in\mathcal{QI}(R)$, $Ext_R^{i\geq 1}(E,N)=0$;

(3) 存在短正合列$0\to N\to I\to N\to 0$, 其中I是内射模, 且对任意的$E\in\mathcal{QI}(R)$, $0\to\mathrm{H}om(E,N)\to\mathrm{H}om(E,I)\to\mathrm{H}om(E,N)\to 0$ 正合.

定理 3.11 设$0\to N\to M\to Q\to 0$正合, 其中$Q\in\mathcal{P}(R)$, 则N是强拟-Gorenstein投射模$\Longleftrightarrow M$是强拟-Gorenstein投射模.

证明:($\Rightarrow$) 因为Q是投射模, 故此正合列可裂, 则$M\cong N\oplus Q$. 则由命题3.4和命题3.5知, M是强拟-Gorenstein-投射模.

($\Leftarrow$)因为M是强拟-Gorenstein投射模,则由定义知存在正合列$0\to N\oplus Q\to P\to N\oplus Q\to 0$,

其中P为投射模, 考虑$N\oplus Q\to P$和$N\oplus Q\to N$ 的推出:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & N\oplus Q \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d] & Q^{'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N\oplus Q \arrow[r, equal] \arrow[d] & N\oplus Q \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

因为$M\cong N\oplus Q$, M是强拟-Gorenstein投射模, 故由定理3.7知, N是拟-Gorenstein投射模. 由文献([9],命题2.5)知, $Q^{'}\in\mathcal{QGP}(R)$. 又由文献([9], 引理2.3)知, $Ext_R^{i\geq 1}(Q^{'},Q)=0$, 故$0\to Q\to P\to Q^{'}\to 0$可裂, 因此$Q^{'}\in P(R)$. 再考虑$Q^{'}\to N\oplus Q, N\to N\oplus Q$的拉回:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & N \arrow[r, equal] \arrow[d] & N \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Q^{''} \arrow[r] \arrow[d] & Q^{'} \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d] & N\oplus Q \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

因为$0\to Q^{''}\to Q^{'}\to Q\to 0$可裂, 故$Q^{''}\in\mathcal{P}(R)$, 并且存在正合列$0\to N\to Q^{''}\to N\to 0$. 对任意的$W\in\mathcal{QP}(R)$, 因为$N\in\mathcal{QGP}(R)$, 故由文献([9],引理2.3)知, $Ext_R^{i\geq 1}(N,W)=0$, 则由命题3.9知, N是强拟-Gorenstein投射模.

定理 3.12 设$0\to E\to M\to N\to 0$正合, 其中$E\in\mathcal{I}(R)$, 则N是强拟-Gorenstein内射模$\Longleftrightarrow$ M是强拟-Gorenstein内射模.

命题 3.13 设R为交换环, Q是投射模, 如果M是一个强拟-Gorenstein投射模, 则$M\otimes Q$是强拟-Gorenstein投射模.

证明:因为M是强拟-Gorenstein投射模, 则由定义知, 存在短正合列$0\to M\to P\to M\to 0\ (*)$, 其中$P$是投射模, 用$-\otimes Q$作用于$(*)$, 得$0=Tor_1^R(M,Q)\to M\otimes Q\to\to P\otimes Q\to\to M\otimes Q\to 0$正合. 因为$R$是交换环, 则由文献([12],ch2,§1,定理3)知, $P\otimes Q$是投射模. 对任意的$Q^{'}\in\mathcal{QP}(R)$, 由

文献([13], p. 258,9.20)知, $Ext_R^{i\geq 1}(M\otimes_R Q, Q^{'})\cong \mathrm{Hom}_R(Q, Ext_R^{i\geq 1}(M, Q^{'}))=0$, 故由命题3.9知, $M\otimes Q$强拟-Gorenstein投射模.

命题 3.14 设R是环, 则以下等价:

(1)强拟-Gorenstein投射模关于扩张封闭;

(2)强拟-Gorenstein投射模是投射可解类;

(3)对每个正合列$0\to G_1\to G_0\to M\to 0$, 其中$G_0$和$G_1$是强拟-Gorenstein投射模, 若对任意$Q\in\mathcal{QP}(R)$, $Ext_R^1(M,Q)=0$, 则M是强拟-Gorenstein投射模.

证明:(1)⇒(2) 设$0\to A\to A^{'}\to A^{''}\to 0$正合, 其中$A^{''}$,$A^{'}$是强拟-Gorenstein投射模. 故可得短正合列$0\to A^{''}\to P\to A^{''}\to 0$, 其中$P$是投射模. 考虑$A^{'}\to A^{''}$与$P\to A^{''}$的拉回：

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & A^{''} \arrow[r, equal] \arrow[d] & A^{''} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & A^{'} \arrow[r] \arrow[d] & A^{''} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为$A^{''}$, $A^{'}$是强拟-Gorenstein投射模, 故由(1)知, B是强拟-Gorenstein投射模, 则由定理3.11知, A是强拟-Gorenstein投射.

(2)⇒(3) 因为G_1是强拟-Gorenstein投射, 所以存在正合列$0\to G_1\to P_1\to G_1\to 0$, 其中$P_1$是投射模. 考虑$G_1\to P_1$与$G_1\to G_0$的推出:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & G_1 \arrow[r] \arrow[d] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
 & G_1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & G_1 \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

因为G_0与G_1是强拟-Gorenstein投射, 故由条件(2)知, C是强拟-Gorenstein投模, 因此存在正合

列$0 \to C \to P_2 \to C \to 0$, 其中$P_2$是投射模. 考虑$C \to M$和$C \to P_2$的推出:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d] & D \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

用$\mathrm{H}om(-, P_1)$作用于$0 \to M \to D' \to C \to 0$, 由长正合引理可得正合列：

$$Ext_R^1(C, P_1) \to Ext_R^1(D, P_1) \to Ext_R^1(M, P_1)$$

因为投射模是拟投射模, 则由命题3.9和已知条件得, $Ext_R^1(C, P_1) = Ext_R^1(M, P_1) = 0$, 故$Ext_R^1(D, P_1)$=0, 从而短正合列$0 \to P_1 \to P_2 \to D \to 0$可裂, 因此$D$是投射模. 又由引理3.5知, D是强拟-Gorenstein投射, 则由(2)知, M是强拟-Gorenstein投射.

(3)⇒(1) 设$0 \to N \to N' \to N'' \to 0$正合, 其中$N$ 与N''是强拟-Gorenstein投射模. 对任意$Q \in \mathcal{QP}(R)$, 用$\mathrm{Hom}(-, Q)$作用于上述正合列, 由长正合引理可得正合列：

$$Ext_R^1(N'', Q) \to Ext_R^1(N', Q) \to Ext_R^1(N, Q)$$

因为投射模是拟投射模, 由命题3.9知$Ext_R^1(N'', Q) = Ext_R^1(N, Q) = 0$, 故$Ext_R^1(N', Q) = 0$. 因为$N''$是强拟-Gorenstein投射, 故存在正合列$0 \to N'' \to P \to N'' \to 0$, 其中$P$是投射模. 考虑$P \to N''$与$N' \to N''$的拉回:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & N'' \arrow[r, equal] \arrow[d] & N'' \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & H \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & N' \arrow[r] \arrow[d] & N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

因为N是强拟-Gorenstein投射模, P是投射模, 则由定理3.11知, H是强拟-Gorenstein投射模, 从而由(3)知N'是强拟-Gorenstein投射模, 因此强拟-Gorenstein投射模关于扩张封闭.

对偶可得以下命题.

命题 3.15 设R是环,则以下条件等价:

(1)强拟-Gorenstein内射模关于扩张封闭;

(2)强拟-Gorenstein内射模是内射可解类;

(3)对每个正合列$0 \to M \to Q^0 \to Q^1 \to 0$, 其中$Q^0, Q^1$是强拟Gorenstein内射模, 若对任意$E \in \mathcal{QI}(R)$, $Ext_R^1(E, M) = 0$, 则M是强拟Gorenstein内射模.

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. In: *Memoirs of the American Mathematical Society*, No. 94, American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Holm, H. (2004) Gorenstein Homological Dimensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **189**, 167-193. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2003.11.007

[3] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[4] Yang, X.Y. and Liu, Z.K. (2008) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules. *Journal of Algebra*, **320**, 2659-2674. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2008.07.006

[5] Mao, L.X. and Ding, N.Q. (2013) Gorenstein FP-Injective and Gorenstein Flat Module. *Journal of Algebra and Its Applications*, **37**, 218-230.

[6] Ding, N.Q., Li, Y.L. and Mao, L.X. (2009) Strongly Gorenstein Flat Modules. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **86**, 323-338. https://doi.org/10.1017/S1446788708000761

[7] Gillespie, J. (2010) Model Structures on Modules over Ding-Chen Rings. *Homology, Homotopy and Applications*, **12**, 61-73. https://doi.org/10.4310/HHA.2010.v12.n1.a6

[8] Xing, J.M. (2011) Strongly Ding Projective, Injective and Flat Modules. *Intelligent Structure and Vibration Control*, **50**, 176-179. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.50-51.176

[9] Mohammadi, F.M.A. (2022) Quasi-Gorenstein Projective and Quasi-Gorenstein Injective Modules. *International Journal of Mathematics*, **33**, Article 2250086. https://doi.org/10.1142/S0129167X22500860

[10] Wu, L.E.T. and Jans, J. (1967) On Quasi Projective. *Illinois Journal of Mathematics*, **11**, 439-448.

[11] Anderson, F.W. and Fuller, K.R. (1974) Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9913-1

[12] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[13] Rotman, J.J. (1979) An Introductions to Homological Algebra. Academic Press, Cambridge, MA.