Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(6), 1555-1564
Published Online June 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.136157

Morita环上的强Gorenstein投射模

杨鲜红

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年4月29日；录用日期：2023年5月29日；发布日期：2023年6月6日

摘 要

设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$ 是一个具有零双模同态的Morita环，其中A和B都是环，N是A-B-双模，M是B-A-双模，研究了如何在具有零双模同态的Morita环上构造一类强Gorenstein投射模。

关键词

Morita环，强Gorenstein投射模，强完全投射分解

Strongly Gorenstein Projective Modules over Morita Rings

Xianhong Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 29th, 2023; accepted: May 29th, 2023; published: Jun. 6th, 2023

Abstract

Let $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$ is a Morita ring with zero bimodule homomorphisms, where A and B are two rings, N is an A-B-bimodule, and M is a B-A-bimodule. This paper studies how to construct a class of strongly Gorenstein projective modules over Morita rings with zero bimodule homomorphisms.

Keywords

Morita Ring, Strongly Gorenstein Projective Module, Strongly Complete Projective Resolution

文章引用: 杨鲜红. Morita 环上的强 Gorenstein 投射模[J]. 理论数学, 2023, 13(6): 1555-1564.
DOI: 10.12677/pm.2023.136157

1. 引言

Auslander 与 Bridger [1]为有限生成模引入了 Gorenstein 维数的概念，这种维数是投射维数的细化。Enochs 与 Jenda [2]将 Gorenstein 维数为零的有限生成模称为 Gorenstein 投射模，并将 Gorenstein 投射模推广到任意环的情形下。称左 R-模 M 是强 Gorenstein 投射模，如果存在投射左 R-模的正合序列 $\mathrm{P}^{\bullet}:\cdots\longrightarrow P_1\longrightarrow P_0\longrightarrow P^0\longrightarrow P^1\longrightarrow\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Im}\left(P_0\to P^0\right)$，并且对任意的投射模 Q，$\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{P}^{\bullet},Q\right)$ 正合。Bennis 与 Mahdou [3]研究了 Gorenstein 投射模的一种特殊情况。称左 R-模 M 是强 Gorenstein 投射模，如果存在投射左 R-模的正合序列 $\mathrm{P}^{\bullet}:\cdots\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}P\xrightarrow{f}\cdots$，使得 $M\cong\mathrm{Ker}\,f$，并且对任意的投射模 Q，$\mathrm{Hom}_R\left(\mathrm{P}^{\bullet},Q\right)$ 正合。此时，称 $\mathrm{P}^{\bullet}$ 为 M 的一个强完全投射分解。特别地，证明了一个模是 Gorenstein 投射模当且仅当它是某个强 Gorenstein 投射模的一个直和项。

为了研究模范畴之间的等价，Morita [4]引入了 Morita 系统 $\Omega=\left(A,N,M,B,\phi,\psi\right)$，其中 A，B 是环，M，N 是双模，它们通过两个双模同态 ϕ 与 ψ 联系起来。此后，随着它的广泛使用，许多学者发现，可以自然地构造一个矩阵形式的环 $\begin{pmatrix} A & N \\ M & B \end{pmatrix}$，此环中元素形如矩阵 $\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}$，其中 $a\in A$，$n\in N$，$m\in M$，$b\in B$，环的加法运算为对应位置相加，乘法定义为：

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi\left(n\otimes m'\right) & an'+nb' \\ ma'+bm' & bb'+\phi\left(m\otimes n'\right) \end{pmatrix}$$

其中 $\phi:M\otimes_A N\to B,\ \psi:N\otimes_B M\to A$ 是双模同态，并且 ϕ 和 ψ 满足一定的条件，称这个环为 Morita 系统环(简称为 Morita 环)。Mao [5]在三角矩阵环上给出了强 Gorenstein 投射模的等价刻画，注意到三角矩阵环是一种特殊的 Morita 环，Morita 环及其上的模在环模理论中扮演着重要角色。近年来，Gao 和 Psaroudakis [6]研究了如何在具有零双模同态的 Morita 环上构造 Gorenstein 投射模，受 Gao 等工作的启发，本文主要讨论在具有零双模同态的 Morita 环上构造一类强 Gorenstein 投射模。

2. 预备知识

给出了全文所需要的一些基本概念和事实。

贯穿全文，设所有环都为有单位元的结合环。对任意环 A，用 A-模表示左 A-模，Mod(A)表示左 A-模范畴。

对于一个 Morita 系统 $\Omega=\left(A,N,M,B,\phi,\psi\right)$，其中 A 和 B 都是环，${}_AN_B$ 是 A-B-双模，${}_BM_A$ 是 B-A-双模，并且 $\phi:M\otimes_A N\to B$ 是双模同态，$\psi:N\otimes_B M\to A$ 是双模同态，定义 Morita 环为：

$$\Lambda_{(\phi,\psi)}\left(\Omega\right)=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}.$$

如果 $\Lambda_{(\phi,\psi)}\left(\Omega\right)$ 中元素的加法为对应元素相加，乘法为

$$\begin{pmatrix} a & n \\ m & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & n' \\ m' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} aa'+\psi\left(n\otimes m'\right) & an'+nb' \\ ma'+bm' & bb'+\phi\left(m\otimes n'\right) \end{pmatrix}$$

对任意 $m,\ m'\in M$，$n,\ n'\in N$，总假设 $\phi\left(m\otimes n\right)m'=m\psi\left(n\otimes m'\right)$，$n\phi\left(m\otimes_A n'\right)=\psi\left(n\otimes_B m\right)n'$，这个条

件保证了 $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\Omega)$ 是结合环。方便起见，全文始终记 Morita 环为 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 而不是 $\Lambda_{(\phi,\psi)}(\Omega)$。

Morita 环 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$ 上模的构造是已知的，见文献[7]。所有 $\Lambda_{(\phi,\psi)}$-模构成的范畴 $\mathrm{Mod}(\Lambda_{(\phi,\psi)})$ 等价于范畴 $\Omega(\Lambda)$，这个范畴中的对象是四元组 (X,Y,f,g)，$X\in\mathrm{Mod}(A)$, $Y\in\mathrm{Mod}(B)$，$f\in\mathrm{Hom}_B(M\otimes_A X,Y)$，$g\in\mathrm{Hom}_A(N\otimes_B Y,X)$，并且使得下图可交换，如图 1 和图 2 所示。

$$\begin{tikzcd} N\otimes_B M\otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{Id}_N\otimes f"] \arrow[d, "\psi\otimes\mathrm{Id}_X"] & N\otimes_B Y \arrow[d, "g"'] \\ A\otimes_A X \arrow[r, "\cong"] & X \end{tikzcd}$$

Figure 1. Commutative diagram
图 1. 交换图

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A N\otimes_B Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_M\otimes g"] \arrow[d, "\phi\otimes\mathrm{Id}_Y"] & M\otimes_A X \arrow[d, "f"'] \\ B\otimes_B Y \arrow[r, "\cong"] & Y \end{tikzcd}$$

Figure 2. Commutative diagram
图 2. 交换图

设 (X,Y,f,g) 和 (X',Y',f',g') 为 $\Omega(\Lambda)$ 中的对象，则 $\Omega(\Lambda)$ 中的态射

$$(X,Y,f,g)\xrightarrow{(a,b)}(X',Y',f',g')$$

是一个态射对，其中 $a:X\to X'$ 是 A-模同态，$b:Y\to Y'$ 是 B-模同态，并且使得下图可交换，如图 3 和图 4 所示。

$$\begin{tikzcd} M\otimes_A X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_M\otimes a"'] & Y \arrow[d, "b"'] \\ M\otimes_A X' \arrow[r, "f'"] & Y' \end{tikzcd}$$

Figure 3. Commutative diagram
图 3. 交换图

$$\begin{tikzcd} N\otimes_B Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N\otimes b"'] & X \arrow[d, "a"'] \\ N\otimes_B Y' \arrow[r, "g'"] & X' \end{tikzcd}$$

Figure 4. Commutative diagram
图 4. 交换图

注 1 设 $\Lambda_{(\phi,\psi)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环。

1) $\mathrm{Mod}(\Lambda_{(\phi,\psi)})$ 中对象构成的序列

$$0\longrightarrow(X_1,Y_1,f_1,g_1)\xrightarrow{(a_1,b_1)}(X_2,Y_2,f_2,g_2)\xrightarrow{(a_2,b_2)}(X_3,Y_3,f_3,g_3)\longrightarrow 0$$

是正合的当且仅当 $\mathrm{Mod}(A)$ 中的序列

$$0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$$

和 $\mathrm{Mod}(B)$ 中的序列

$$0 \to Y_1 \to Y_2 \to Y_3 \to 0$$

都是正合的。

2) 设 $(a,b):(X,Y,f,g)\to(X',Y',f',g')$ 为 $\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(\phi,\psi)}\right)$ 中的态射，考虑以下映射 $c:\mathrm{Ker}\,a\to X$ 与 $d:\mathrm{Ker}\,b\to Y$。则 (a,b) 的核是对象 $(\mathrm{Ker}\,a,\mathrm{Ker}\,b,h,j)$，其中映射 h 与 j 由下述交换图诱导，如图 5 和图 6 所示。

$$\begin{tikzcd}
M\otimes_A \mathrm{Ker}\,a \arrow[r, "\mathrm{Id}_M\otimes c"] \arrow[d, "h"] & M\otimes_A X \arrow[r, "\mathrm{Id}_M\otimes a"] \arrow[d, "f"] & M\otimes_A X' \arrow[d, "f'"] \\
\mathrm{Ker}\,b \arrow[r, tail, "d"] & Y \arrow[r, "b"] & Y'
\end{tikzcd}$$

Figure 5. Commutative diagram
图 5. 交换图

$$\begin{tikzcd}
N\otimes_B \mathrm{Ker}\,b \arrow[r, "\mathrm{Id}_N\otimes d"] \arrow[d, "j"] & N\otimes_B Y \arrow[r, "\mathrm{Id}_N\otimes b"] \arrow[d, "g"] & N\otimes_B Y' \arrow[d, "g'"] \\
\mathrm{Ker}\,a \arrow[r, tail, "c"] & X \arrow[r, "a"] & X'
\end{tikzcd}$$

Figure 6. Commutative diagram
图 6. 交换图

类似地，可以得到态射的余核。

注 2 设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B\end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环，其中双模同态 $\phi=0=\psi$。为了后面定理的证明，引入以下函子：

1) 函子 $\mathrm{T}_A:\mathrm{Mod}(A)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $X\in\mathrm{Mod}(A)$，$\mathrm{T}_A(X)=(X,M\otimes_A X,1,0)$，给定 A-模同态 $a:X\to X'$，定义 $\mathrm{T}_A(a)=(a,\mathrm{Id}_M\otimes a)$。

2) 函子 $\mathrm{T}_B:\mathrm{Mod}(B)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $Y\in\mathrm{Mod}(B)$，$\mathrm{T}_B(Y)=(N\otimes_B Y,Y,0,1)$，给定 B-模同态 $b:Y\to Y'$，定义 $\mathrm{T}_B(b)=(\mathrm{Id}_N\otimes b,b)$。

3) 函子 $\mathrm{H}_A:\mathrm{Mod}(A)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $X\in\mathrm{Mod}(A)$，$\mathrm{H}_A(X)=\left(X,\mathrm{Hom}_A(N,X),0,1\right)$，给定 A-模同态 $a:X\to X'$，定义 $\mathrm{H}_A(a)=\left(a,\mathrm{Hom}_A(N,a)\right)$。

4) 函子 $\mathrm{H}_B:\mathrm{Mod}(B)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $Y\in\mathrm{Mod}(B)$，$\mathrm{H}_B(Y)=\left(\mathrm{Hom}_B(M,Y),Y,1,0\right)$，给定 B-模同态 $b:Y\to Y'$，定义 $\mathrm{H}_B(b)=\left(\mathrm{Hom}_B(M,b),b\right)$。

5) 函子 $\mathrm{Z}_A:\mathrm{Mod}(A)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $X\in\mathrm{Mod}(A)$，$\mathrm{Z}_A(X)=(X,0,0,0)$，给定一个 A-模同态 $a:X\to X'$，定义 $\mathrm{Z}_A(a)=(a,0)$。

6) 函子 $\mathrm{Z}_B:\mathrm{Mod}(B)\to\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$，对任意的 $Y\in\mathrm{Mod}(B)$，$\mathrm{Z}_B(Y)=(0,Y,0,0)$，给定一个 B-模同态 $b:Y\to Y'$，定义 $\mathrm{Z}_B(b)=(0,b)$。

3. Morita 环上的强 Gorenstein 投射模

本文的主要结果要用到以下引理。

引理 1 ([6]引理 3.8) 设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$是一个 Morita 环，则对任意 A-模 X 和 B-模 Y，有以下 $\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$ 中的正合序列

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_B\left(M \otimes_A X\right) \longrightarrow \mathrm{T}_A(X) \longrightarrow \mathrm{Z}_A(X) \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_A\left(N \otimes_B Y\right) \longrightarrow \mathrm{T}_B(Y) \longrightarrow \mathrm{Z}_B(Y) \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_A(X) \longrightarrow \mathrm{H}_A(X) \longrightarrow \mathrm{Z}_B\left(\mathrm{Hom}_A(N, X)\right) \longrightarrow 0;$$

$$0 \longrightarrow \mathrm{Z}_B(Y) \longrightarrow \mathrm{H}_B(Y) \longrightarrow \mathrm{Z}_A\left(\mathrm{Hom}_B(M, Y)\right) \longrightarrow 0.$$

引理 2 ([6]引理 3.9) 设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$是一个 Morita 环，则对任意 X，$X' \in \mathrm{Mod}(A)$，Y，$Y' \in \mathrm{Mod}(B)$，有以下同构

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}\left(\mathrm{T}_A(X) \oplus \mathrm{T}_B(Y), \mathrm{Z}_A(X')\right) \cong \mathrm{Hom}_A(X, X'),$$

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}\left(\mathrm{T}_A(X) \oplus \mathrm{T}_B(Y), \mathrm{Z}_B(Y')\right) \cong \mathrm{Hom}_B(Y, Y').$$

三角矩阵环上强 Gorenstein 投射模的刻画见文献[5]。考虑三角矩阵环 $T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ U & B \end{pmatrix}$，其中 A, B 是环，U 是 B-A-双模，并且假设 $\mathrm{fd}\left(U_A\right)<\infty$，$\mathrm{pd}\left({}_BU\right)<\infty$，则由([5]定理 1)可知，左 T-模 $M=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}_{\varphi^M}$ 是强 Gorenstein 投射模当且仅当以下条件成立：1) M_1是强 Gorenstein 投射左 A-模；2) $M_2/\mathrm{Im}\varphi^M$ 是强 Gorenstein 投射左 B-模，并且 $\varphi^M: U \otimes_A M_1 \to M_2$ 是单态射；3) 存在 $\mu: M_2 \to U \otimes_A P$ 和 $v: Q \to M_2$，使得 $\mu\varphi^M=U \otimes_A \iota$, $\rho v=\omega$ 且 $\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} U \otimes_A f & \mu v \\ 0 & g \end{pmatrix}=\mathrm{Im}\begin{pmatrix} U \otimes_A f & \mu v \\ 0 & g \end{pmatrix}$，其中 $\iota: M_1 \to P$ 是单同态，$\omega: Q \to M_2/\mathrm{Im}\varphi^M$ 和 $\rho: M_2 \to M_2/\mathrm{Im}\varphi^M$ 都是满同态，并且 $\begin{pmatrix} U \otimes_A f & \mu v \\ 0 & g \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_B\left(\left(U \otimes_A P\right) \oplus Q\right)$。

下述定理为本文的主要结果。证明了在具有零双模同态的 Morita 环上如何构造一类强 Gorenstein 投射模，其中 $\mathrm{SGP}(A)$ 和 $\mathrm{SGP}(B)$ 分别表示所有强 Gorenstein 投射 A-模和所有强 Gorenstein 投射 B-模构成的类。

定理 1 设 $\Lambda_{(0,0)}=\begin{pmatrix} A & {}_AN_B \\ {}_BM_A & B \end{pmatrix}$是一个 Morita 环，并且使得双模 ${}_AN_B$ 和 ${}_BM_A$ 满足下述条件：

1) 函子 $M \otimes_A -$: $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(B)$ 作用投射 A-模的零调复形为 B-模的零调复形。
2) 对任意投射 B-模 Q，$N \otimes_B Q \in \left(\mathrm{SGP}(A)\right)^{\perp}$。
3) 函子 $N \otimes_B -$: $\mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A)$ 作用投射 B-模的零调复形为 A-模的零调复形。
4) 对任意投射 A-模 P，$M \otimes_A P \in \left(\mathrm{SGP}(B)\right)^{\perp}$。

i) 假设存在强 Gorenstein 投射 B-模 Z，使得对某个 A-模 X 有一个单同态 $s: N \otimes_B Z \to X$，满足 $\mathrm{Coker}\, s \in \mathrm{SGP}(A)$，并且对某个 B-模 Y 有一个单同态 $t: M \otimes_A \mathrm{Coker}\, s \to Y$，满足 $\mathrm{Coker}\, t=Z$。则四元组

$$\left(X, Y, t\left(\mathrm{Id}_M \otimes \pi_X\right), s\left(\mathrm{Id}_N \otimes \pi_Y\right)\right)$$

是一个强 Gorenstein 投射 $\Lambda_{(0,0)}$-模，其中 $\pi_X: X \to \mathrm{Coker}\, s$，$\pi_Y: Y \to \mathrm{Coker}\, t$。

ii) 假设存在强 Gorenstein 投射 A-模 Z，使得对某个 B-模 Y 有一个单同态 $t: M\otimes_A Z\to Y$，满足 $\operatorname{Coker} t\in \operatorname{SGP}(B)$，并且对某个 A-模 X 有一个单同态 $s: N\otimes_B \operatorname{Coker} t\to X$，满足 $\operatorname{Coker} s = Z$。则四元组

$$\left(X,Y,t\left(\operatorname{Id}_M\otimes\pi_X\right),s\left(\operatorname{Id}_N\otimes\pi_Y\right)\right)$$

是一个强 Gorenstein 投射 $\Lambda_{(0,0)}$-模，其中 $\pi_X: X\to \operatorname{Coker} s$，$\pi_Y: Y\to \operatorname{Coker} t$。

证明只证明(i)，(ii)的证明是对偶的。(i)的证明分为四个步骤，前两步利用 $\operatorname{Coker} s$ 和 Z 的强完全投射分解对象构造 X 和 Y 相应的分解。第三步是把前两个分解提升到 $\operatorname{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$。最后一步证明对任意投射 $\Lambda_{(0,0)}$-模 (X,Y,f,g)，$\operatorname{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}\left(-,(X,Y,f,g)\right)$ 作用第三步得到的正合序列后保持正合。

第一步：因为 $\operatorname{Coker} s\in\operatorname{SGP}(A)$，所以存在 A-模的强完全投射分解

$$\mathrm{P}^\bullet:\cdots\xrightarrow{d_P}P\xrightarrow{d_P}P\xrightarrow{d_P}P\xrightarrow{d_P}P\xrightarrow{d_P}\cdots,$$

其中 $\operatorname{Coker} s\cong \operatorname{Ker} d_P$。记 $\xi: P\to\operatorname{Coker} s$ 为满同态，$\iota:\operatorname{Coker} s\to P$ 为单同态，使得 $d_P=\iota\xi$。

因为 $Z\in\operatorname{SGP}(B)$，所以存在 B-模的强完全投射分解

$$\mathrm{Q}^\bullet:\cdots\xrightarrow{d_Q}Q\xrightarrow{d_Q}Q\xrightarrow{d_Q}Q\xrightarrow{d_Q}Q\xrightarrow{d_Q}\cdots,$$

其中 $Z\cong\operatorname{Ker} d_Q$。记 $\omega: Q\to Z$ 为满同态，$i: Z\to Q$ 为单同态，使得 $d_Q=i\omega$。

由假设(3)可知，A-模复形 $N\otimes_B \mathrm{Q}^\bullet$ 是零调复形。用 $\operatorname{Hom}_A\left(-,N\otimes_B Q\right)$ 作用 A-模正合序列

$$0\longrightarrow N\otimes_B Z\xrightarrow{\ s\ }X\xrightarrow{\ \pi_X\ }\operatorname{Coker} s\longrightarrow 0.$$

因为 $\operatorname{Coker} s\in\operatorname{SGP}(A)$，并且由假设(2)可知 $N\otimes_B Q\in\left(\operatorname{SGP}(A)\right)^{\perp}$，所以 $\operatorname{Ext}_A^1\left(\operatorname{Coker} s,N\otimes_B Q\right)=0$，故得正合序列

$$0\longrightarrow\operatorname{Hom}_A\left(\operatorname{Coker} s,N\otimes_B Q\right)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A\left(X,N\otimes_B Q\right)\longrightarrow\operatorname{Hom}_A\left(N\otimes_B Z,N\otimes_B Q\right)\longrightarrow 0.$$

这表明存在映射 $\gamma^0: X\to N\otimes_B Q$，使得 $\gamma^0 s=\operatorname{Id}_N\otimes i$。因此，得到映射 $\alpha^0=\begin{pmatrix}\iota\pi_X\\ \gamma^0\end{pmatrix}: X\to P\oplus\left(N\otimes_B Q\right)$。

由文献[8]中引理 1.6 的 Horseshoe 引理得到以下行列都正合的交换图，如图 7 所示。

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N\otimes_B Z \arrow[r, "\operatorname{Id}_N\otimes i"] \arrow[d, "s"] & N\otimes_B Q \arrow[r, "\operatorname{Id}_N\otimes d_Q"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & N\otimes_B Q \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & \cdots \\
0 \arrow[r, dotted] & X \arrow[r, dotted, "\alpha^0"] \arrow[d, "\pi_X"] & P\oplus(N\otimes_B Q) \arrow[r, dotted, "\alpha"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & P\oplus(N\otimes_B Q) \arrow[r, dotted] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} s \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & P \arrow[r, "d_P"] \arrow[d] & P \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figure 7. Commutative diagram
图 7. 交换图

对于 α，有 $\alpha=\begin{pmatrix}d_P & 0\\ \gamma & \operatorname{Id}_N\otimes d_Q\end{pmatrix}: P\oplus\left(N\otimes_B Q\right)\to P\oplus\left(N\otimes_B Q\right)$，并且 $\gamma: P\to N\otimes_B Q$，注意到 γ 存在性由假设(2)可知，用同样的方法可以构造 X 的形如 $P\oplus\left(N\otimes_B Q\right)$ 的 A-模分解。特别地，得到映射

$$\alpha^{-1}=\left(\gamma^{-1}s\left(\mathrm{Id}_N\otimes\omega\right)\right):P\oplus\left(N\otimes_B Q\right)\to X,$$

其中 $\gamma^{-1}:P\to X$，使得 $\pi_X\gamma^{-1}=\xi$。因此，得到以下正合序列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r,"\alpha"] & P\oplus\left(N\otimes_B Q\right) \arrow[rr,"\alpha"] \arrow[dr,"\alpha^{-1}"'] & & P\oplus\left(N\otimes_B Q\right) \arrow[r,"\alpha"] & P\oplus\left(N\otimes_B Q\right) \arrow[r,"\alpha"] & \cdots \\
& & X \arrow[ur,"\alpha^{0}"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

其中 α^{-1} 是满同态，α^{0} 是单同态。

第二步：对于 B-模 Y，构造一个类似于(1)的正合序列，得到以下行列都正合的交换图，如图 8 所示。

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\otimes_A \mathrm{Coker}\, s \arrow[r,"\mathrm{Id}_M\otimes\iota"] \arrow[d,"t"] & M\otimes_A P \arrow[r,"\mathrm{Id}_M\otimes d_P"] \arrow[d,"\binom{1}{0}"] & M\otimes_A P \arrow[r] \arrow[d,"\binom{1}{0}"] & \cdots \\
0 \arrow[r, dotted] & Y \arrow[r, dotted, "\beta^{0}"] \arrow[d,"\pi_Y"] & (M\otimes_A P)\oplus Q \arrow[r, dotted, "\beta"] \arrow[d,"(0\ 1)"] & (M\otimes_A P)\oplus Q \arrow[r, dotted] \arrow[d,"(0\ 1)"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & Z \arrow[r,"i"] \arrow[d] & Q \arrow[r,"d_Q"] \arrow[d] & Q \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Figure 8. Commutative diagram
图 8. 交换图

对于 β，有 $\beta=\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M\otimes d_P & \delta\\ 0 & d_Q\end{pmatrix}:\left(M\otimes_A P\right)\oplus Q\to\left(M\otimes_A P\right)\oplus Q$，并且 $\delta:Q\to M\otimes_A P$，注意到 δ 存在性由假设(4)可知，用同样的方法构造 Y 的形如 $\left(M\otimes_A P\right)\oplus Q$ 的 B-模分解。特别地，得到映射

$$\beta^{-1}=\left(t\left(\mathrm{Id}_M\otimes\xi\right))\delta^{-1}\right):\left(M\otimes_A P\right)\oplus Q\to Y,$$

其中 $\delta^{-1}:Q\to Y$，使得 $\pi_Y\delta^{-1}=\omega$。因此，得到以下正合序列

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r,"\beta"] & \left(M\otimes_A P\right)\oplus Q \arrow[rr,"\beta"] \arrow[dr,"\beta^{-1}"'] & & \left(M\otimes_A P\right)\oplus Q \arrow[r,"\beta"] & \left(M\otimes_A P\right)\oplus Q \arrow[r,"\beta"] & \cdots \\
& & Y \arrow[ur,"\beta^{0}"'] & & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

其中 β^{-1} 是满同态，β^{0} 是单同态。

第三步：由正合列序列(1)和(2)可得如下序列

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{\bullet}: \cdots \arrow[r,"(\alpha,\beta)"] & \mathrm{T}_A(P)\oplus\mathrm{T}_B(Q) \arrow[rr,"(\alpha,\beta)"] \arrow[dr,"(\alpha^{-1}{,}\beta^{-1})"'] & & \mathrm{T}_A(P)\oplus\mathrm{T}_B(Q) \arrow[r,"(\alpha,\beta)"] & \cdots \\
& & (X,Y,f,g) \arrow[ur,"(\alpha^{0}{,}\beta^{0})"'] & &
\end{tikzcd}$$

下证序列 $\mathrm{T}^{\bullet}$ 是 $\mathrm{Mod}\left(\Lambda_{(0,0)}\right)$ 中的正合序列。易证有以下交换图，如图 9 和图 10 所示。

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(M\otimes_A P)\oplus(M\otimes_A N\otimes_B Q) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M\otimes d_P & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M\otimes d_P & 0\\ \mathrm{Id}_M\otimes\gamma & \mathrm{Id}_{M\otimes N}\otimes d_Q\end{pmatrix}"'] & (M\otimes_A P)\oplus Q \arrow[d, "\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M\otimes d_P & \delta\\ 0 & \mathrm{d}_Q\end{pmatrix}"] \\
(M\otimes_A P)\oplus(M\otimes_A N\otimes_B Q) \arrow[r, "\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_M\otimes d_P & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}"] & (M\otimes_A P)\oplus Q
\end{tikzcd}$$

Figure 9. Commutative diagram
图 9. 交换图

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
(N\otimes_B M\otimes_A P)\oplus(N\otimes_B Q) \arrow[r, "\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_N\otimes d_Q\end{pmatrix}"] \arrow[d, "\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{N\otimes M}\otimes d_P & \mathrm{Id}_N\otimes\delta\\ 0 & \mathrm{Id}_N\otimes d_Q\end{pmatrix}"'] & P\oplus(N\otimes_B Q) \arrow[d, "\begin{pmatrix}\mathrm{d}_P & 0\\ \gamma & \mathrm{Id}_N\otimes d_Q\end{pmatrix}"] \\
(N\otimes_B M\otimes_A P)\oplus(N\otimes_B Q) \arrow[r, "\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_N\otimes d_Q\end{pmatrix}"] & P\oplus(N\otimes_B Q)
\end{tikzcd}$$

Figure 10. Commutative diagram
图 10. 交换图

这表明映射$(\alpha,\beta):\mathrm{T}_A(P)\oplus\mathrm{T}_B(Q)\to\mathrm{T}_A(P)\oplus\mathrm{T}_B(Q)$是$\mathrm{Mod}(\Lambda_{(0,0)})$中的态射。因为复形(1)和(2)是零调复形，所以由注 1 的(1)可知$\mathrm{T}^{\bullet}$是$\mathrm{Mod}(\Lambda_{(0,0)})$中的一个正合序列。此外，因为有$(X,Y,f,g)\cong\mathrm{Ker}(\alpha,\beta)$，所以由注 1 的(2)可知$f=t(\mathrm{Id}_M\otimes\pi_X)$，$g=s(\mathrm{Id}_N\otimes\pi_Y)$。由文献[9]中的命题 7.1 可知函子$\mathrm{T}_A$和$\mathrm{T}_B$都保持投射对象，故零调复形$\mathrm{T}^{\bullet}$中的每一项都是投射模。

第四步：下证对任意投射$\Lambda_{(0,0)}$-模(X,Y,f,g)，$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(-,(X,Y,f,g))$作用零调复形$\mathrm{T}^{\bullet}$保持正合。由文献[9]中的定理 7.3 可知只需证得复形$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{T}_A(P))$，$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{T}_B(Q))$是零调复形即可，其中$P$是投射$A$-模，$Q$是投射$B$-模。由引理 1 得到正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Z}_B(M\otimes_A P)\longrightarrow \mathrm{T}_A(P)\longrightarrow \mathrm{Z}_A(P)\longrightarrow 0.$$

因为复形$\mathrm{T}^{\bullet}$的每一项都是投射$\Lambda_{(0,0)}$-模，所以$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},-)$作用上述正合序列，得到以下正合序列

$$0\to\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{Z}_B(M\otimes_A P))\to\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{T}_A(P))\to\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{Z}_A(P))\to 0. \tag{3}$$

根据引理 2 可知有同构$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{Z}_A(P))\cong\mathrm{Hom}_A(\mathrm{P}^{\bullet},P)$，由于$\mathrm{P}^{\bullet}$是强完全投射分解且$P$是投射$A$-模，故复形$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{P}^{\bullet},P)$是零调复形，因此复形$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},Z_A(P))$也是零调复形。同样，根据引理 2 可知有同构$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{Z}_B(M\otimes_B P))\cong\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Q}^{\bullet},M\otimes_A P)$。而由假设(4)可知$M\otimes_A P\in(\mathrm{SGP}(B))^{\perp}$，这表明复形$\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Q}^{\bullet},M\otimes_A P)$是零调复形，于是复形$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{Z}_B(M\otimes_A P))$是零调复形。故由正合序列(3)可知复形$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{T}_A(P))$是零调复形。

类似地，由正合列$0\longrightarrow\mathrm{Z}_A(N\otimes_B Q)\longrightarrow\mathrm{T}_B(Q)\longrightarrow\mathrm{Z}_B(Q)\longrightarrow 0$，可知复形$\mathrm{Hom}_{\Lambda_{(0,0)}}(\mathrm{T}^{\bullet},\mathrm{T}_B(Q))$是零调复形。

综上，$\Lambda_{(0,0)}$-模$(X,Y,t(\mathrm{Id}_M\otimes\pi_X),s(\mathrm{Id}_N\otimes\pi_Y))$是强 Gorenstein 投射模。

推论 1 设$\Delta_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & A\\ A & A\end{pmatrix}$是一个 Morita 环，其中$A$是任意环，假设$(X,Y,f,g)$是一个$\Lambda_{(0,0)}$-模，使得存在正合序列

$$0\longrightarrow Z\xrightarrow{\ s\ }X\xrightarrow{\ \pi_X\ }W\longrightarrow 0,$$

$$0\longrightarrow W\xrightarrow{\ t\ }Y\xrightarrow{\ \pi_Y\ }Z\longrightarrow 0,$$

其中 $Z,W\in\mathrm{SGP}(A)$，并且设 $f=t\pi_X$，$g=s\pi_Y$。则对象 (X,Y,f,g) 和 (Y,X,g,f) 都是强 Gorenstein 投射 $\Delta_{(0,0)}$-模。

下面这个例子告诉我们如何应用推论 1，从三角矩阵环上的强 Gorenstein 投射模出发来构造 $\Delta_{(0,0)}$ 上的强 Gorenstein 投射模。

例 1 设 $\Delta_{(0,0)}=\begin{pmatrix}A & A\\ A & A\end{pmatrix}$ 是一个 Morita 环，其中 A 是任意环。

1) 考虑下三角矩阵环 $\Gamma=\begin{pmatrix}A & 0\\ A & A\end{pmatrix}$，由文献[5]中的推论 1 可知，三元组 (X,Y,f) 是强 Gorenstein 投射 Γ-模，则存在短正合序列

$$0\longrightarrow X\xrightarrow{\ f\ }Y\xrightarrow{\ \pi\ }\mathrm{Coker}\,f\longrightarrow 0, \tag{4}$$

使得 A-模 X 和 $\mathrm{Coker}\,f$ 都是强 Gorenstein 投射模。

设 (X,Y,f) 是一个强 Gorenstein 投射 Γ-模，则有正合序列(4)，并且容易构造可裂短正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}\,f\xrightarrow{\binom{1}{0}}\mathrm{Coker}\,f\oplus X\xrightarrow{(0\ \ 1)}X\longrightarrow 0.$$

因此由推论 1 可知对象

$$\left(Y,\mathrm{Coker}\,f\oplus X,\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\pi,\ f\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)\text{和}\left(\mathrm{Coker}\,f\oplus X,\ Y,\ f\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\pi\right)$$

都是强 Gorenstein 投射 $\Delta_{(0,0)}$-模。

2) 考虑上三角矩阵环 $\Sigma=\begin{pmatrix}A & A\\ 0 & A\end{pmatrix}$，并且设 $(Z,W,g)\in\mathrm{SGP}(\Sigma)$，由文献[5]中的推论 1 可知，存在短正合序列

$$0\longrightarrow W\xrightarrow{\ g\ }Z\xrightarrow{\ \rho\ }\mathrm{Coker}\,g\longrightarrow 0,$$

使得 A-模 W 和 $\mathrm{Coker}\,g$ 都是强 Gorenstein 投射 A-模，并且有可裂短正合序列

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}\,g\xrightarrow{\binom{1}{0}}\mathrm{Coker}\,g\oplus W\xrightarrow{(0\ \ 1)}W\longrightarrow 0.$$

因此，由推论 1 易知对象

$$\left(Z,\mathrm{Coker}\,\mathrm{g}\oplus W,\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rho,\ g\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\right)\text{和}\left(\mathrm{Coker}\,\mathrm{g}\oplus W,Z,g\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rho\right)$$

都是强 Gorenstein 投射 $\Delta_{(0,0)}$-模。

设 X 为一个强 Gorenstein 投射模，则由(1)可知对象 $(X,X,0,\mathrm{Id}_X)$ 是强 Gorenstein 投射 $\Delta_{(0,0)}$-模，由(2)可知对象 $(X,X,\mathrm{Id}_X,0)$ 是强 Gorenstein 投射 $\Delta_{(0,0)}$-模。

参考文献

[1] Auslander, M. and Bridger, M. (1969) Stable Module Theory. American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/memo/0094

[2] Enochs, E.E. and Jenda, O.M.G. (1995) Gorenstein Injective and Projective Modules. *Mathematische Zeischrift*, **220**, 611-633. https://doi.org/10.1007/BF02572634

[3] Bennis, D. and Mahdou, N. (2007) Strongly Gorenstein projective, Injective, and Flat Modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **210**, 437-445. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2006.10.010

[4] Morita, K. (1958) Duality for Modules and Its Applications to the Theory of Rings with Minimun Condition. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku*, *Section A*, **6**, 83-142.

[5] Mao, L.X. (2020) Strongly Gorenstein Projective, Injective and Flat Modules over Formal Triangular Matrix Rings. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, **63**, 271-285.

[6] Gao, N. and Psaroudakis, C. (2017) Gorenstein Homological Aspects of Monomorphism Categories via Morita Rings. *Algebras and Represention Theory*, **20**, 487-529. https://doi.org/10.1007/s10468-016-9652-1

[7] Green, E.L. (1982) On the Representation Theory of Rings in Matrix Form. *Pacific Journal of Mathematical*, **100**, 123-138. https://doi.org/10.2140/pjm.1982.100.123

[8] Zhang, P. (2013) Gorenstein-Projective Modules and Symmetric Recollements. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **388**, 65-80. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.008

[9] Krylov, P.A. and Tuganbaew, A.A. (2010) Modules over Formal Matrix Rings. *Journal of Mathematical Sciences*, **171**, 248-295. https://doi.org/10.1007/s10958-010-0133-5