Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 1966-1975
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137203

Lee-Huang-Yang修正偶极Gross-Pitaevskii方程驻波解的强不稳定性

邓成德

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月6日；录用日期：2023年7月10日；发布日期：2023年7月17日

摘 要

考虑Lee-Huang-Yang修正偶极Gross-Pitaevskii 方程驻波解的强不稳定性

$$i\partial_t\psi+\Delta\psi-a^2|x|^2\psi-\lambda_1|\psi|^2\psi-\lambda_2(K*|\psi|^2)\psi-\lambda_3|\psi|^q\psi=0,(t,x)\in[0,T^*)\times\mathbb{R}^3.$$

当$\lambda_3<0$和$\frac{4}{3}\le q<4$时，建立爆破准则，获得了强不稳定驻波解的存在性。

关键词

Gross-Pitaevskii方程，强不稳定性，爆破准则

Strong Instability of Standing Waves for the Lee-Huang-Yang Corrected Dipolar Gross-Pitaevskii Equation

Chengde Deng

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 6^{th}, 2023; accepted: Jul. 10^{th}, 2023; published: Jul. 17^{th}, 2023

文章引用: 邓成德. Lee-Huang-Yang修正偶极Gross-Pitaevskii方程驻波解的强不稳定性[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 1966-1975. DOI: 10.12677/pm.2023.137203

Abstract

The author considered the strong instability of standing waves for the Lee-Huang-Yang corrected dipolar Gross-Pitaevskii equation

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi - a^2|x|^2\psi - \lambda_1|\psi|^2\psi - \lambda_2(K * |\psi|^2)\psi - \lambda_3|\psi|^q\psi = 0, (t,x) \in [0,T^*) \times \mathbb{R}^3.$$

When $\lambda_3 < 0$ and $\frac{4}{3} \le q < 4$, the author obtained the existence of strongly unstable standing waves by establishing blow-up criterion.

Keywords

Gross-Pitaevskii Equation, Strong Instability, Blow-Up Criterion

1. 引言

本文考虑Lee-Huang-Yang修正偶极Gross-Pitaevskii方程的柯西问题

$$\begin{cases} i\partial_t\psi + \Delta\psi - a^2|x|^2\psi - \lambda_1|\psi|^2\psi - \lambda_2(K * |\psi|^2)\psi - \lambda_3|\psi|^q\psi = 0, \\ \psi(0,x) = \psi_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中$\psi_0 \in \Sigma := \{\varphi \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2|\varphi(x)|^2dx < \infty\}$, $(t,x) \in [0,T^*)\times\mathbb{R}^3, 0 < q < 4, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $0 < T^* \le \infty$, $\psi : [0,T^*) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ 是复值函数. Δ是$\mathbb{R}^3$空间中的拉普拉斯算子, $*$是$\mathbb{R}^3$空间中的卷积. $K(x) = \frac{1-3\cos^2\theta}{|x|^3}$是偶极相互作用核, 其中$\theta$表示$\mathbb{R}^3$中的$x$与偶极轴$n$之间的夹角, 且$|n| = 1$. 为简化符号, 假设$n = (0,0,1)$, 则偶极相互作用核表达为:

$$K(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{|x|^5}, \; x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

记

$$F(u) = -\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^4\, dx - \lambda_2 \int_{\mathbb{R}^3} (K * |u|^2)(x)|u(x)|^2\, dx.$$

为确保$F(u) > 0$, 本文在文献 [1]的限制条件下进行研究

$$\lambda_1 < \begin{cases} -\frac{8}{3}\pi\lambda_2, & \lambda_2 > 0, \\ \frac{4}{3}\pi\lambda_2, & \lambda_2 < 0. \end{cases} \tag{2}$$

方程(1)具有很多的物理背景. 当$\lambda_3 = 0$ 时, Yi 和You在文献 [2]中提出该模型来描述Gross-Pitaevskii平均场近似范围内对应的玻色爱因斯坦凝聚. 当$\lambda_3 \neq 0$时, 该方程被认为是描述偶极玻色-爱因斯坦凝聚体动力学的最新模型, 并且描述了长程偶极-偶极相互作用和超平均场的量子涨落(即Lee-Huang-Yang修正), 见文献 [3]. 目前, 当$\lambda_3 = 0$时, 方程(1)已经在文献 [4–8]中被广泛研究.

本文主要研究方程(1)的驻波解, 即形如$\psi(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$的解, 其中$\omega \in \mathbb{R}$是频率. $u \in \Sigma$ 是椭圆方程

$$-\Delta u + a^2|x|^2u + \omega u + \lambda_1|u|^2u + \lambda_2(K * |u|^2)u + \lambda_3|u|^q u = 0 \tag{3}$$

的非平凡解. $\lambda_1 = 3a$是三维简谐势$-\Delta + a^2|x|^2$的第一个特征值, 更准确地说,

$$3a = \inf\{\|\nabla u\|_{L^2}^2 + a^2\|xu\|_{L^2}^2;\ u \in \Sigma(\mathbb{R}^3),\ \|u\|_{L^2} = 1\},$$

和

$$3a\|u\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 + a^2\|xu\|_{L^2}^2.$$

在假设$\omega > -3a$下, 有以下范数的等价性

$$\|u\|_{H_\omega}^2 := \|\nabla u\|_{L^2}^2 + a^2\|xu\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 \sim \|u\|_\Sigma^2.$$

相应的作用泛函定义为

$$S_{a,\omega}(u) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{a^2}{2}\|xu\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}F(u) + \frac{\lambda_3}{q+2}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}. \tag{4}$$

定义下面的泛函

$$Q_a(u) := \partial_\lambda S_{a,\omega}(u^\lambda)|_{\lambda=1} = \|\nabla u\|_{L^2}^2 - a^2\|xu\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}F(u) + \frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}, \tag{5}$$

$$K_{a,\omega}(u) := \partial_\lambda S_{a,\omega}(\lambda u)|_{\lambda=1} = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + a^2\|xu\|_{L^2}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 - F(u) + \lambda_3\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}, \tag{6}$$

其中$u^\lambda(x) := \lambda^{\frac{3}{2}}u(\lambda x)$. 考虑极小化问题

$$d_\omega = \inf\{S_{a,\omega}(u):\ u \in \Sigma \setminus \{0\},\ K_{a,\omega}(u) = 0\}, \tag{7}$$

并定义问题(7)的极小化子集合为

$$\mathcal{M}_{a,\omega} = \inf\{u \in \Sigma \setminus \{0\}:\ S_{a,\omega}(u) = d_\omega,\ K_{a,\omega}(u) = 0\}. \tag{8}$$

由于$\Sigma(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^3)$在$p \in [2,6)$时是紧嵌入, 因此可以解决极小化问题(7).

最近, 具有谐波势的非线性薛定谔方程的强不稳定性在文献 [9, 10]中已经被广泛研究. 当$\partial_\lambda^2 S_\omega(v^\lambda)|_{\lambda=1} \leq 0$ 时, Ohta在文献 [10]中证明了驻波解的强不稳定性. 在某些假设条件下, Zhang在文献 [9]中通过建立交叉不变流形, 研究了具有谐波势的非线性薛定谔方程的强不稳定性. 文献 [1]中研究了当$\lambda_3 = 0$时方程(1)驻波解的强不稳定性. 若不考虑限制条件, Dinh在文献 [11]中研究了整个不稳定状态(2)下驻波解的强不稳定性. 当$\lambda_3 < 0$和$0 < q < 4$时, Feng, Cao 和Liu在文献 [12] 中研究了方程(1)的稳定驻波解的存在性. 但是在该情形下, 方程(1)的驻波解可能在有限时间内爆破, 是否存在相应的强不稳定的驻波解就是一个值得研究的问题.

本文基于该问题, 主要研究方程(1)驻波解的强不稳定性. 由于文献 [9]中的参数依赖于函数$g(\lambda) := S_{0,\omega}(\lambda v)$在$(0,\infty)$内有唯一的临界点, 而方程(1)恰好具有该性质. 因此, 结合文献 [9]与文献 [10]中的方法, 通过基态解的变分刻画, 建立爆破准则, 从而获得基态驻波解的强不稳定性. 主要结果如下:

定理 1 设$0 < q < 4$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 且满足条件(2), 则$d_\omega > 0$, $u \in \mathcal{G}_\omega$当且仅当u是极小化问题(7)的解.

现在, 考虑交叉约束极小化问题

$$d_m = \inf_{u \in M} S_{a,\omega}(u), \tag{9}$$

其中$M := \{u \in \Sigma \setminus \{0\};\ Q_a(u) = 0, K_{a,\omega}(u) < 0\}$. 同时定义

$$d_{a,\omega} := \min\{d_\omega,\ d_m\}. \tag{10}$$

根据引理2.2, 获得$d_{a,\omega} > 0$.

定义$K := \{u \in \Sigma \setminus \{0\},\ S_{a,\omega}(u) < d_{a,\omega},\ Q_a(u) < 0,\ K_{a,\omega}(u) < 0\}$, 建立下列爆破准则.

定理 2 设$\frac{4}{3} \leq q < 4$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 且满足条件(2). 若$\psi_0 \in K$, 则方程(1)以$\psi_0$为初值的解$\psi(t)$在有限时间内爆破.

定理 3 设$\frac{4}{3} \leq q < 4$, $\lambda_3 < 0$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 并且满足条件(2).

(i) 若$d_m \geq d_\omega$, 并且u_ω是方程(3)的基态, 则方程(1)的驻波解$e^{i\omega t}u_\omega$是强不稳定的.

(ii) 若$d_m < d_\omega$, 则存在$\delta > 0$, 且ψ_0满足$\|\psi_0 - u_\omega\|_\Sigma > \delta$, 使得方程(1) 的驻波解在有限时间内爆破.

2. 预备知识

定义 1.1 (强不稳定性) 设$\psi(t,x) = e^{i\omega t}u_\omega(x)$是方程(1)的驻波解, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在$\psi_0 \in \Sigma$使得$\|\psi_0 - u\|_\Sigma < \varepsilon$, 且方程(1) 以$\psi_0$为初值的解$\psi(t)$在有限时间内爆破, 则$\psi(t,x) = e^{i\omega t}u_\omega(x)$是强不稳定的.

定义 1.2 (基态解) 若$u \in \mathcal{A}_\omega$是$S_{a,\omega}$在集合$\mathcal{A}_\omega$上的极小化能量解, 则

$$\mathcal{G}_\omega := \{u \in \mathcal{A}_\omega,\ S_{a,\omega}(u) \leq S_{a,\omega}(v),\ \forall v \in \mathcal{A}_\omega\},$$

其中

$$\mathcal{A}_{\omega} := \{v \in \Sigma \backslash \{0\} : S'_{a,\omega}(v) = 0\}.$$

引理 1.1 [1] 设$0 < q < 4$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, $\psi_0 \in \Sigma$, 则存在$T = T(\|\psi_0\|_{\Sigma})$使得方程(1)的唯一解$\psi \in C([0,T),\Sigma)$. 设$[0,T^*)$是解$\psi(t)$的极大存在区间, 若$T^* < \infty$, 则$\lim_{t\to T^*} \|\psi(t)\|_{H^1} = \infty$. 此外, 对任意的$t \in (0,T^*)$, 方程(1)的解$\psi(t)$ 满足质量守恒和能量守恒, 即

$$\|\psi(t)\|_{L^2}^2 = \|\psi_0\|_{L^2}^2,\ E(\psi(t)) = E(\psi_0).$$

注 1.1 谐波限制具有$a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2$的形式. 选择$n = (0,0,1)$具有一定的影响, 它会严重影响系统的行为, 具体取决于a_i的值. 例如, 如果$n = (0,0,1)$ 和a_3远大于a_1和a_2, 则系统非常稳定. 因此, 物理学家通常考虑准一维或准二维几何系统, 因为$3D$几何(当所有a_i都相等时)是非常不稳定的.

注 1.2 偶极Gross-Pitaevskii方程的能量泛函不受下方限制. 因此无论是否存在谐波势, 总存在使系统崩溃的初始状态. 由于偶极相互作用势的形状, 如果从一个过于局域化的初始状态开始, 对应的波函数就会坍缩成一个点. 如果避免坍塌并且$a > 0$, 由于谐波势的作用, 系统将永远不会爆炸(在它不会延伸到空间无限的意义上).

3. 基态解的变分刻画

引理 2.1 设$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_3 < 0$, $\frac{4}{3} < q < 4$, 并且满足条件(2), 则存在$u \in \Sigma \setminus \{0\}$使得$K_{a,\omega}(u) = 0$和$Q_a(u) = 0$.

证明 根据以上条件可知, 存在$u \in \Sigma \setminus \{0\}$ 使得u 是方程(3)的一个解, 得$K_{a,\omega}(u) = 0$. 对方程(3)两端乘以$x \cdot \nabla u$, 得Pohozaev恒等式

$$\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{5a^2}{2}\|xu\|_{L^2}^2 + \frac{3\omega}{2}\|u\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}F(u) + \frac{3\lambda_3}{q+2}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2} = 0. \tag{11}$$

由于$K_{a,\omega}(u) = 0$, 则$Q_a(u) = 0$.

对于极小化问题(9), 则有以下结果成立.

引理 2.2 设$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_3 < 0$, $\frac{4}{3} < q < 4$, 且满足条件(2), 则$d_m > 0$.

证明 首先, 证明$M \neq \varnothing$.

根据引理2.1可知, 存在$u \in \Sigma \setminus \{0\}$ 使得$K_{a,\omega}(u) = 0$和$Q_a(u) = 0$. 定义$u_\lambda(x) = \lambda u(x)$, 由(5)式和(6)式可得, 对任意的$\lambda > 1$, 则$K_{a,\omega}(u_\lambda) < 0$和$Q_a(u_\lambda) < 0$.

当$\frac{4}{3} \le q \le 2$时, 对任意的$\mu > 1$, 定义$v_\mu(x) = \mu^{\frac{2}{q}} v(\mu x)$. 结合(5)式和(6) 式, 可得

$$Q_a(v_\mu) = \mu^{\frac{4}{q}-1}(\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}) - a^2\mu^{\frac{4}{q}-5}\|xv\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}\mu^{\frac{8}{q}-3}F(v),$$

$$K_{a,\omega}(v_\mu)=\mu^{\frac{4}{q}-1}(\|\nabla v\|_{L^2}^2+\lambda_3\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2})+a^2\mu^{\frac{4}{q}-5}\|xv\|_{L^2}^2+\omega\mu^{\frac{4}{q}-3}\|v\|_{L^2}^2-\mu^{\frac{8}{q}-3}F(v).$$

当$\frac{4}{3}\le q\le 2$和$\mu>1$时, 有$\mu^{\frac{4}{q}-1}\le\mu^{\frac{8}{q}-3}$. 结合$\mu>1$, 则

$$\begin{aligned}K_\omega(v_\mu)=&\mu^{\frac{4}{q}-1}(\|\nabla v\|_{L^2}^2+\lambda_3\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2})+a^2\mu^{\frac{4}{q}-5}\|xv\|_{L^2}^2+\omega\mu^{\frac{4}{q}-3}\|v\|_{L^2}^2-\mu^{\frac{8}{q}-3}F(v)\\ \le&\mu^{\frac{4}{q}-1}K_\omega(v)<0.\end{aligned}$$

接着, 定义

$$f(\lambda,\mu):=Q_a(v_\mu)=\mu^{\frac{4}{q}-1}(g(\lambda,\mu)-\mu^{-4}\lambda^2g(1,1)),$$

其中

$$g(\lambda,\mu)=\lambda^2\|\nabla u\|_{L^2}^2+\frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\lambda^{q+2}\mu^{-4}\|u\|_{L^{q+2}}^{q+2}-\frac{3}{4}\lambda^4\mu^{\frac{4}{q}-2}F(u).$$

因为$g(1,1)>0$, 所以对任意的$\lambda\in[1,1+\delta)$与$\mu\in[1,1+\delta)$, 存在$\delta>0$使得$g(\lambda,\mu)>0$. 结合$f(1,1)=0$, 对任意的$\lambda_0>1$与$\mu_0>1$, 存在相应的(λ_0,μ_0)使得$f(\lambda_0,\mu_0)>0$. 另一方面, 有$f(\lambda_0,1)<0$. 因此, 存在$\mu_*>1$使得$Q_a(v_{\mu_*})=0$, 即$v_{\mu_*}\in M$.

当$2<q<4$时, 对任意的$\mu>1$, 定义$v_\mu(x)=\mu v(\mu x)$. 结合(5)式和(6)式, 则有

$$Q(v_\mu)=\mu(\|\nabla v\|_{L^2}^2-\frac{3}{4}F(v))-a^2\mu^{-3}\|xv\|_{L^2}^2+\frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\mu^{q-1}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2},$$

$$K_\omega(v_\mu)=\mu(\|\nabla v\|_{L^2}^2-F(v))+a^2\mu^{-3}\|xv\|_{L^2}^2+\omega\mu^{-1}\|v\|_{L^2}^2+\lambda_3\mu^{q-1}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}.$$

当$2<q<4$和$\mu>1$时, 则有$\lambda_3\mu^{q-1}\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}<\lambda_3\mu\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}$, 可得

$$K_\omega(v_\mu)=\mu K_\omega(v)<0.$$

由于该情况与$\frac{4}{3}\le q\le 2$的情况类似, 则存在$\mu_*>1$使得$Q_a(v_{\mu_*})=0$. 因此, $v_{\mu_*}\in M$, 则M是非空的.

接下来, 证明$d_m>0$.

设$v\in M$, 由于$K_{a,\omega}(v)<0$, 则$v\neq 0$. 因为$Q_a(v)=0$, 若$\frac{4}{3}\le q\le 2$, 则

$$\begin{aligned}S_{a,\omega}(v)=&S_{a,\omega}(v)-\frac{2}{3q}Q_a(v)\\ =&\frac{3q-4}{6q}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+a^2\frac{3q+4}{6q}\|xv\|_{L^2}^2+\frac{2-q}{4q}F(v).\end{aligned}\tag{12}$$

若$2<q<4$, 则

$$S_{a,\omega}(v)=S_{a,\omega}(v)-\frac{1}{3}Q_a(v)=\frac{1}{6}\|\nabla v\|_{L^2}^2+\frac{\omega}{2}\|v\|_{L^2}^2+\frac{5a^2}{6}\|xv\|_{L^2}^2+\frac{2-q}{2(q+2)}\lambda_3\|v\|_{L^{q+2}}^{q+2}.\tag{13}$$

当$\frac{4}{3}\le q<4$时, 由于$v\neq 0$, 结合(12)式和(13)式, 对任意的$v\in M$, 有$S_{a,\omega}(v)>0$, 从而可得$d_m\ge 0$. 在下文中, 使用反证法证明$d_m\neq 0$.

假设$d_m = 0$, 根据(12)式可得, 存在一个序列$\{v_n\} \subset M$使得$Q_a(v_n) = 0$, 并且$K_{a,\omega}(v_n) < 0$和$\lim\limits_{n\to\infty} S_{a,\omega}(v_n) = 0$. 结合(12)式, 当$n \to \infty$ 时, 则有

$$\|v_n\|_{L^2}^2 \to 0,\ \ \|xv_n\|_{L^2}^2 \to 0,\ \ F(v_n) \to 0,\ \ \frac{4}{3} \le q \le 2, \tag{14}$$

$$\|v_n\|_{L^2}^2 \to 0,\ \ \|xv_n\|_{L^2}^2 \to 0,\ \ \|v_n\|_{L^{q+2}}^{q+2} \to 0,\ \ 2 < q < 4. \tag{15}$$

另一方面, 根据$K_{a,\omega}(v_n) < 0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\|\nabla v_n\|_{L^2}^2 + \omega\|v_n\|_{L^2}^2 + a^2\|xv_n\|_{L^2}^2\right) &< F(v_n) - \lambda_3\|v_n\|_{L^{q+2}}^{q+2} \\ &\le C_3\|\nabla v_n\|_{L^2}^3\|v_n\|_{L^2} + C_4\|\nabla v_n\|_{L^2}^{\frac{3q}{2}}\|v_n\|_{L^2}^{\frac{4-q}{2}}.\end{aligned} \tag{16}$$

化简可得

$$\frac{1}{2} \le C_3\|\nabla v_n\|_{L^2}\|v_n\|_{L^2} + C_4\|\nabla v_n\|_{L^2}^{\frac{3q-4}{2}}\|v_n\|_{L^2}^{\frac{4-q}{2}}.$$

由于该式与(15)式矛盾, 故$d_m > 0$.

4. 爆破准则

引理 3.1 设$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_3 < 0$, $\frac{4}{3} < q < 4$, 并且满足条件(2), 则K 是方程(1)的一个不变流形. 若$\psi_0 \in K$, 则对任意的$t \in [0, T^*)$, 方程(1)以ψ_0为初值的解$\psi(t)$满足$\psi(t) \in K$.

证明 设$\psi_0 \in \Sigma$, 并且$\psi(t)$是方程(1)的解. 根据引理1.1, 则有

$$S_{a,\omega}(\psi(t)) = S_{a,\omega}(\psi_0) < d_{a,\omega},\quad \forall t \in [0, T^*). \tag{17}$$

首先, 证明对任意的$t \in [0, T^*)$, 有$K_{a,\omega}(\psi(t)) < 0$. 假设结果不成立, 根据连续性可得, 存在$t_1 \in [0, T^*)$使得$K_{a,\omega}(\psi(t_1)) = 0$, 则$S_{a,\omega}(\psi(t_1)) \ge d_\omega \ge d_{a,\omega}$. 因为该式与(17)式矛盾, 所以假设不成立, 即对任意的$t \in [0, T^*)$, 有$K_{a,\omega}(\psi(t)) < 0$.

其次, 证明对任意的$t \in [0, T^*)$, 有$Q_a(\psi(t)) < 0$. 假设结果不成立, 根据连续性可得, 存在$t_2 \in [0, T^*)$ 使得$Q_a(\psi(t_2)) = 0$. 因为$K_{a,\omega}(\psi(t)) < 0$, 所以$\psi(t_2) \in M$, 则$S_{a,\omega}(\psi(t_2)) \ge d_m \ge d_{a,\omega}$. 由于该式与(17)式矛盾, 则假设不成立, 即对任意的$t \in [0, T^*)$, 有$Q_a(\psi(t)) < 0$.

接下来, 证明定理 2.

定理 2的证明 根据Virial恒等式, 有

$$\frac{d^2}{dt^2}\|x\psi(t)\|_{L^2}^2 = 8Q_a(\psi(t)),\ \ \forall t \in [0, T).$$

根据凸性可知, 只需证明存在$\delta > 0$使得$Q_a(\psi(t)) < \delta$. 因为K在方程(1)的作用下是不变的, 所以对任意的$t \in [0, T)$, 有$K_{a,\omega}(\psi(t)) < 0$和$Q_a(\psi(t)) < 0$. 固定$t \in [0, T)$且记$\psi = \psi(t)$, 使得$\psi$满

足$S_{a,\omega}(\psi) < S_{a,\omega}(u)$, $K_{a,\omega}(\psi) < 0$和$Q_a(\psi) < 0$. 对于$\lambda > 0$, 设$\psi_\lambda = \lambda^{\frac{3}{q+2}}\psi(\lambda x)$, 则有

$$S_{a,\omega}(\psi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{\frac{4-q}{q+2}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\lambda^{\frac{-3q}{q+2}}\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{a^2}{2}\lambda^{\frac{-5q-4}{q+2}}\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}\lambda^{\frac{6-3q}{q+2}}F(\psi) + \frac{\lambda_3}{q+2}\|\psi\|_{L^{q+2}}^{q+2},$$

$$Q_a(\psi_\lambda) = \lambda^{\frac{4-q}{q+2}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \lambda^{\frac{-5q-4}{q+2}}a^2\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}\lambda^{\frac{6-3q}{q+2}}F(\psi) + \frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\|\psi\|_{L^{q+2}}^{q+2}.$$

因此, 结合$Q_a(\psi) < 0$可得, 对任意的$\lambda \in [1, \lambda_*)$, 存在$\lambda_* > 1$使得$Q_a(\psi_{\lambda_*}) = 0$和$Q_a(\psi_\lambda) < 0$. 对任意的$\lambda \in [1, \lambda_*]$, 由于$K_{a,\omega}(\psi) < 0$, 则$K_{a,\omega}(\psi_\lambda)$有以下两种情况:

(i)对任意的$\lambda \in [1, \lambda_*]$, 有$K_{a,\omega}(\psi_\lambda) < 0$.

(ii)存在$\mu \in (1, \lambda_*]$使得$K_{a,\omega}(\psi_\mu) = 0$.

对于第(i)种情况, 有$Q_a(\psi_{\lambda_*}) = 0$ 和$K_{a,\omega}(\psi_{\lambda_*}) < 0$, 则$S_{a,\omega}(\psi_{\lambda_*}) \geq d_\omega \geq S_{a,\omega}(u)$, 得

$$\begin{aligned} S_{a,\omega}(\psi) - S_{a,\omega}(\psi_\lambda) =& \frac{1}{2}(1 - \lambda^{\frac{4-q}{q+2}})\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}(1 - \lambda^{\frac{-3q}{q+2}})\|\psi\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{a^2}{2}(1 - \lambda^{\frac{-5q-4}{q+2}})\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}(1 - \lambda^{\frac{6-3q}{q+2}})F(\psi), \end{aligned} \tag{18}$$

$$Q_a(\psi) - Q_a(\psi_\lambda) = (1 - \lambda^{\frac{4-q}{q+2}})\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - (1 - \lambda^{\frac{-5q-4}{q+2}})a^2\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}(1 - \lambda^{\frac{6-3q}{q+2}})F(\psi). \tag{19}$$

根据$2 \leq q < 4$和$\lambda_* > 1$可得,

$$S_{a,\omega}(\psi) - S_{a,\omega}(\psi_{\lambda_*}) \geq \frac{1}{2}(Q_a(\psi) - Q_a(\psi_{\lambda_*})) = \frac{1}{2}Q_a(\psi). \tag{20}$$

对于第(ii)种情况, 有$K_{a,\omega}(\psi_\mu) = 0$和$Q_a(\psi_\mu) \leq 0$. 应用定理1, 则$S_{a,\omega}(\psi_\mu) \geq S_{a,\omega}(u)$. 结合(18)式和(19)式, 则有

$$S_{a,\omega}(\psi) - S_{a,\omega}(\psi_\mu) \geq \frac{1}{2}(Q_a(\psi) - Q_a(\psi_\mu)) \geq \frac{1}{2}Q_a(\psi). \tag{21}$$

因为$S_{a,\omega}(\psi_{\lambda_*}) \geq S_{a,\omega}(u)$ 和$S_{a,\omega}(\psi_\mu) \geq S_{a,\omega}(u)$, 结合(20)式和(21) 式, 对任意$t \in [0, T^*)$, 则有

$$Q_a(\psi(t)) \leq 2(S_{a,\omega}(\psi_0) - S_{a,\omega}(u)). \tag{22}$$

当$\frac{4}{3} \leq q < 2$时, 设$\psi_\lambda = \lambda^{\frac{3}{4}}\psi(\lambda x)$, 得

$$S_{a,\omega}(\psi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 + \frac{\omega}{2}\lambda^{\frac{-3}{2}}\|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{a^2}{2}\lambda^{\frac{-7}{2}}\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4}F(\psi) + \frac{\lambda_3}{q+2}\lambda^{\frac{3q-6}{4}}\|\psi\|_{L^{q+2}}^{q+2},$$

$$Q_a(\psi_\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \lambda^{\frac{-7}{2}}a^2\|x\psi\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}F(\psi) + \frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\lambda^{\frac{3q-6}{4}}\|\psi\|_{L^{q+2}}^{q+2}.$$

DOI: 10.12677/pm.2023.137203

由于该情况与$2 \leq q < 4$的情况类似, 则有关键估计(22)式, 定理2得证.

5. 强不稳定性

在本小节主要证明驻波解的强不稳定性, 即证明定理3.

由于$d_m \geq d_\omega$, 则$d_{a,\omega} = d_\omega$. 根据引理2.1可知, 则有$K_{a,\omega}(u_\omega) = Q_a(u_\omega) = 0$. 令$u_\omega^\lambda(x) = \lambda u_\omega(x)$, 由于

$$Q_a(u_\omega^\lambda) = \lambda^2\|\nabla u_\omega\|_{L^2}^2 - a^2\lambda^2\|xu_\omega\|_{L^2}^2 - \frac{3}{4}\lambda^4 F(u_\omega) + \frac{3q\lambda_3}{2(q+2)}\lambda^{q+2}\|u_\omega\|_{L^{q+2}}^{q+2},$$

$$K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) = \lambda^2\|\nabla u_\omega\|_{L^2}^2 + a^2\lambda^2\|xu_\omega\|_{L^2}^2 + \omega\lambda^2\|u_\omega\|_{L^2}^2 - \lambda^4 F(u_\omega) + \lambda_3\lambda^{q+2}\|u_\omega\|_{L^{q+2}}^{q+2},$$

则方程$K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) = 0$和$Q_a(u_\omega^\lambda) = 0$有唯一的非零解$\lambda_0$, 即$\lambda_0 = 1$. 对任意的$\lambda > 1$, 得

$$Q_a(u_\omega^\lambda) < 0, \;\; K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < 0.$$

另一方面, 注意到$\frac{d}{d\lambda}S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) = \lambda^{-1}K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda)$. 因此, 对任意的$\lambda > 1$, 有$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < S_{a,\omega}(u_\omega)$. 由于$S_{a,\omega}(u_\omega) = d_\omega = d_{a,\omega}$, 对任意的$\lambda > 1$, 有$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < d_{a,\omega}$, $K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < 0$和$Q_a(u_\omega^\lambda) < 0$. 这就表明对任意的$\lambda > 1$, 则有$u_\omega^\lambda \in K$. 设$\varepsilon > 0$, 取$\lambda_1 > 1$并足够接近1 使得

$$\|u_\omega^{\lambda_1} - u_\omega\|_\Sigma = (\lambda_1 - 1)\|u_\omega\|_\Sigma < \varepsilon.$$

设$\psi_0 = u_\omega^{\lambda_1}(x)$, 则$\psi_0 \in K$. 因此, 根据定理2可得, 方程(1)的解$\psi(t)$在有限时间内爆破.

接下来, 证明定理3(ii). 当$d_{a,\omega} = d_m < d_\omega$时, 由于$u_\omega \in \Sigma \setminus \{0\}$, 则对任意的$\lambda > 1$, 有

$$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < S_{a,\omega}(u_\omega) = d_\omega.$$

因为$\frac{d}{d\lambda}S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) = \lambda^{-1}K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda)$ 和$K_{a,\omega}(u_\omega) = 0$, 所以对任意的$\lambda > 1$, 有$\frac{d}{d\lambda}S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < 0$. 另一方面, 有$S_{a,\omega}(u_\omega) = d_{a,\omega}$. 当$\lambda \to \infty$时, 有$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) \to -\infty$. 因此, 当$\lambda > \lambda_0$时, 存在$\lambda_0 > 1$ 使得$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < S_{a,\omega}(u_\omega^{\lambda_0})$. 对任意的$\lambda > \lambda_0$, 则有$S_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < d_{a,\omega}$, $K_{a,\omega}(u_\omega^\lambda) < 0$, $Q_a(u_\omega^\lambda) < 0$, 或$u_\omega^\lambda \in K$. 取$\delta = (\lambda_0 - 1)\|u_\omega\|_\Sigma$, 对任意的$\lambda_1 > \lambda_0$, 令$\psi_0 = u_\omega^{\lambda_1}(x)$, 则结论成立, 定理3得证.

参考文献

[1] Feng, B.H. and Wang, Q.X. (2021) Strong Instability of Standing Waves for the Nonlinear Schrödinger Equation in Trapped Dipolar Quantum Gases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **33**, 1989-2008. https://doi.org/10.1007/s10884-020-09881-0

[2] Yi, S. and You, L. (2000) Trapped Atomic Condensates with Anisotrpic Interactions. *Physical Review A*, **61**, Article 041604. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.61.041604

[3] Luo, Y.M. and Stylianou, A. (2021) Ground States for a Nonlocal Mixed Order Cubic-Quartic Gross-Pitaevskii Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **496**, Article 124802. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124802

[4] Antonelli, P. and Sparber, C. (2011) Existence of Solitary Waves in Dipolar Quantum Gases. *Physica D. Nonlinear Phenomena*, **240**, 426-431. https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.10.004

[5] Bao, W.Z. and Cai, Y.Y. (2013) Mathematical Theory and Numerical Methods for Bose-Einstein Condensation. *Kinetic and Related Models*, **6**, 1-135. https://doi.org/10.3934/krm.2013.6.1

[6] Bao, W.Z., Cai, Y.Y. and Wang, H.Q. (2010) Efficient Numerical Methods for Computing Ground States and Dynamics of Dipolar Bose-Einstein Condensates. *Journal of Computational Physics*, **229**, 7874-7892. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.07.001

[7] Bellazzini, J. and Forcella, L. (2019) Asymptotic Dynamic for Dipolar Quantum Gases below the Ground State Energy Threshold. *Journal of Functional Analysis*, **277**, 1958-1998. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2019.04.005

[8] Bellazzini, J. and Jeanjean, L. (2016) On Dipolar Quantum Gases in the Unstable Regime. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **48**, 2028-2058. https://doi.org/10.1137/15M1015959

[9] Zhang, J. (2005) Sharp Threshold for Blowup and Global Existence in Nonlinear Schrödinger Equations under a Harmonic Potential. *Communications in Partial Differential Equations*, **30**, 1429-1443. https://doi.org/10.1080/03605300500299539

[10] Ohta, M. (2018) Strong Instability of Standing Waves for Nonlinear Schrödinger Equations with Harmonic Potential. *Funkcialaj Ekvacioj. Serio Internacia*, **61**, 135-143. https://doi.org/10.1619/fesi.61.135

[11] Dinh, V.D. (2021) On the Instability of Standing Waves for 3D Dipolar Bose-Einstein Condensates. *Physica D*, **419**, Article 132856. https://doi.org/10.1016/j.physd.2021.132856

[12] Feng, B.H., Cao, L.J. and Liu, J.Y. (2021) Existence of Stable Standing Waves for the Lee-Huang-Yang Corrected Dipolar Gross-Pitaevskii Equation. *Applied Mathematics Letters*, **115**, Article 106952. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106952