Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2098-2102
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137216

40*p*三度对称图

赵路清*，茹 昕

云南民族大学数学与计算机科学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年6月17日；录用日期：2023年7月21日；发布日期：2023年7月28日

摘 要

称一个图为对称图，如果它的自同构群在这个图的弧集上是传递的。文中给出了40*p*阶三度对称图的分类的一些结论，其中*p*为素数。

关键词

对称图，自同构群，Cayley图

Cubic Symmetric Graphs of Order 40*p*

Luqing Zhao*, Xin Ru

School of Mathematics and Computer Sciences, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: Jun. 17th, 2023; accepted: Jul. 21st, 2023; published: Jul. 28th, 2023

Abstract

A graph is said to be symmetric if its automorphism group acts transitively on its arcs. Some conclusions of classification of cubic symmetric graphs of order 40*p* are given in this paper, where *p* is prime.

Keywords

Symmetric Graph, Automorphism Group, Cayley Graph

*通讯作者。

文章引用: 赵路清, 茹昕. 40*p* 三度对称图[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2098-2102.
DOI: 10.12677/pm.2023.137216

1. 引言

本文所考虑的图都是有限、连通、简单无向图。

对于图Γ，分别用$V(\Gamma)$，$E(\Gamma)$和$A(\Gamma)$表示图Γ的顶点集，边集和自同构群。设 s 是一个正整数，称Γ中$s+1$个顶点序列$V_0V_1\cdots V_S$为一个 s-弧，如果$(V_i,V_{i+1})\in E(\Gamma)$，$0\le i\le s-1$，并且对$s\ge 2$，有$V_i\ne V_{i+2}$，$0\le i\le s-2$。称$\Gamma$为 s-弧传递图，如果$\mathrm{Aut}(\Gamma)$在Γ的所有 s-弧上是传递的。称Γ为 s-传递图，如果Γ是 s-弧传递的，但不是$(s+1)$-弧传递的。

研究群与图里面的对称性，也就是图的自同构群作用在图的顶点集，边集，弧集等上面的传递性，对称图的研究是一个热门的话题，我们研究对称图一般从小度数开始研究。而对于三度图的研究，很多作者都有了一些显著的成果。Chao，Cheng 分别在文献[1] [2]里完全分类了阶为 p 和 $2p$ 的对称图。Conder 在文献[3]中分类了所有阶小于或等于 768 个顶点的三度对称图。Tutte 在文献[4]里给出了三度对称图的点稳定子后，对于三度对称图的分类才得到进一步的研究。Feng 在文献[5] [6]中分类了 $8p$，$10p$，$8p^2$，$10p^2$ 阶的三度对称图。Oh 在文献[7] [8]里完全分类了 $14p$，$16p$ 阶的三度对称图。Cheng 在文献[9]分类了阶为 $2p^n$ 的三度对称图。Ling 在文献[10]中完全分类了四倍的奇无平方整数阶的三度对称图。根据这些研究得到的背景以及结果，可以为我们分类以下的图提供方法。

现在，三度对称图的分类情况已经研究得差不多了，但是 $40p$ 阶的三度对称图还没有被分类。目前，这篇文章只考虑图自同构群 A 可解的情况，所以分类不完整，在今后的研究中会继续考虑这个问题，尝试用新的方法来将 $40p$ 阶的三度对称图完全分类。下面的定理是分类得到的结论。

定理 1.1 设Γ是一个 $40p$ 阶的三度对称图。令$\mathrm{A}=\mathrm{Aut}(\Gamma)$，$F$为 A 的 Fitting 子群，假设 A 是可解的，则下列之一成立。

1) F在$V(\Gamma)$上传递，则$F\lesssim Z_8\times Z_{5p},Z_2^3\times Z_{5p},Z_2\times Z_4\times Z_{5p},D_8\times Z_{5p},Q_8\times Z_{5p}$。

2) F在$V(\Gamma)$上恰好有两个轨道，F是一个二部图。

3) F在$V(\Gamma)$上至少有三个轨道，Γ是Γ_F的正规覆盖，Γ_F是三度的$\bar{\mathrm{A}}=\mathrm{A}/F$-弧传递图且$\bar{\mathrm{A}}$是对称的。

2. 预备知识

在这一节中我们将引用一些基本的结果，方便后面的讨论。设 G 是有限群，G 的所有幂零正规子群的乘积$F(G)$仍为 G 的幂零正规子群，叫做 G 的 Fitting 子群，下面的引理(参见文献[11]，p. 30，推论)。

定理 2.1 设$F(G)$是G的 Fitting 子群，$C_G(F)/F$不包含$\ne 1$的可解正规子群，若G可解，则$C_G(F)\le F$。

对于轨道长公式，有下面的定理，参见文献[12]。

定理 2.2 设有限群 G 作用在有限集合Ω上，$\alpha\in\Omega$，则$|\alpha^G|=|G:G_\alpha|$，特别地，轨道α^G的长是$|G|$的因子。

设 G 是有限群，H 是 G 的子群，$C_G(H)$是 H 在 G 中的中心化子，$N_G(H)$是 H 在 G 中的正规。由文([12]，第 I 章，定理 5.7)得下面“*N/C*”定理。

定理 2.3 设$H\le G$，则$N_G(H)/C_G(H)$同构于$\mathrm{Aut}(H)$的一个子群。

称 Cayley 图$\Gamma=\mathrm{Cayley}(G,S)$是正规的，如果 G 的右正则表示$R(G)$是$\mathrm{Aut}(\Gamma)$的正规子群，令：$\mathrm{Aut}(G,S)=\{\alpha\in\mathrm{Aut}(G)\mid S^\alpha=S\}$，令$\mathrm{A}=\mathrm{Aut}(\Gamma)$。设$N_{\mathrm{A}}(R(G))$为$R(G)$在 A 中的正规化子，进一步由

文献([13]，引理 2.1)有下面的引理。

引理 2.4 $N_{\mathrm{A}}\left(R(G)\right)=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$。

因此 Γ 正规的当且仅当 $\mathrm{Aut}(\Gamma)=R(G)\mathrm{Aut}(G,S)$。

以下引理是关于三度对称图的点稳定子的结构，由([14]，命题 2~5)确定。

引理 2.5 设 Γ 是一个连通的五度 (G,s)-传递图，其中 $G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$，$s\ge1$，设 $\alpha\in V(\Gamma)$，则下列表述之一成立：

1) 如果 G_α 是可解的，则 $|G_\alpha|\,|\,80$ 且 $s\le3$。此外，(G_α,s) 见表 1。

Table 1. Soluble vertex-stabilizers
表 1. 可解的点稳定子

s	1	2	3
G_α	Z_5,D_{10},D_{20}	$F_{20},F_{20}\times Z_2$	$F_{20}\times Z_4$

2) 如果 G_α 是不可解的，则 $|G_\alpha|\,|\,2^9\cdot3^2\cdot5$ 且 $2\le s\le5$。此外，(G_α,s) 见表 2。

Table 2. Insoluble vertex-stabilizers
表 2. 非可解的点稳定子

s	2	3	4	5
G_α	A_5,S_5	$\mathrm{A}_5\times S_5,(\mathrm{A}_5\times S_5):\mathrm{A}_2,S_4\times S_5$	$\mathrm{ASL}(2,4),\mathrm{AGL}(2,4),\mathrm{A\Sigma L}(2,4),\mathrm{A\Gamma L}(2,4),$	$Z_6:\Gamma\mathrm{L}(2,4)$
$\lvert G_\alpha\rvert$	60, 120	720, 1440, 2880	960, 2880, 1920, 5760	23,040

由([5]，定理 5.1)可以得到 $8p$ 阶三度对称图的分类。

引理 2.6 令 p 为素数，Γ 是阶为 $8p$ 的三度对称图，则下列之一成立。

1) Γ 是 1-正则的，当 $3\,|\,p-1$ 时，$\Gamma\cong CQ_p$ 和 $\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong Z_p\rtimes\left(Z_2^3\rtimes Z_3\right)$。

2) Γ 是 2-正则的，当 $p=2,3$ 或 7 时，Γ 同构于 CQ_2,CQ_3 或 Lorimer 图。

3) Γ 是 3-正则的，当 $p=7$ 或 5 时，Γ 同构于典范双重覆盖图 $D_{20}^{(2)}$ 或 $D_{28}^{(2)}$。

对于图 Γ 以及点传递子群 $G\le\mathrm{Aut}(\Gamma)$，令 N 是 Γ 在 $V(\Gamma)$ 上是不传递的正规子群。用 $V(\Gamma_N)$ 表示 $V(\Gamma)$ 中的 N 的轨道的集合，由 N 诱导的正规商图 Γ_N 定义为顶点集 $V(\Gamma_N)$ 的图。在商图 Γ_N 中 $(B_1,B_2)\in E(\Gamma_N)$ 当且仅当 $x\in B_1$ 和 $y\in B_2$，使得 $(x,y)\in E(\Gamma)$。文献([15]，引理 2.5)和([16]，定理 4.1)为研究三度对称图提供了一种基本的方法。

定理 2.7 设 Γ 是奇数度的 G-弧传递图，令 $N\lhd G$ 在 $V(\Gamma)$ 上至少有三个轨道，那么下列的陈述成立。

(i) N 是 $V(\Gamma)$ 上的半正则，$G/N\le\mathrm{Aut}(\Gamma_N)$，$\Gamma$ 是 Γ_N 的正规覆盖。

(ii) $G_\alpha\cong(G/N)_\delta$，其中 $\alpha\in V(\Gamma)$，$\delta\in V(\Gamma_N)$。

(iii) Γ 是 (G,s)-传递的当且仅当 Γ_N 是 $(G/N,s)$-传递。

3. 定理 1.1 的证明

设 Γ 是一个阶为 $40p$ 的三度对称图，根据引理 2.5，$|\mathrm{A}_\alpha|\,|\,2^4\cdot3$，所以 $|\mathrm{A}|\,|\,2^7\cdot3\cdot5p$。接下来，我们考虑 A 是可解的情况。

证明：设 F 是 A 的 Fitting 子群，根据定理 2.1，$F\ne1$，且 $C_{\mathrm{A}}(F)\le F$，因为 $|V(\Gamma)|=40p$，A 没有

非平凡的正规 s-子群，其中 $s \neq 2,5$，p 是一个素数，我们有：$F = O_2(\mathrm{A}) \times O_5(\mathrm{A}) \times O_p(\mathrm{A})$。

其中 $O_2(\mathrm{A}), O_5(\mathrm{A}), O_p(\mathrm{A})$ 分别表示 A 的最大正规 2-，5-，p-子群。

对于任意的 $q \in \{2,5,p\}$，因为 A 在 $V(\Gamma)$ 上的作用是传递的，$O_q(\mathrm{A}) \lhd \mathrm{A}$，则 $O_q(\mathrm{A})$ 在顶点集 $V(\Gamma)$ 上所有轨道的长都相等。根据定理 2.2 的轨道公式 $\alpha \in V(\Gamma)$，$\alpha^{O_q(\mathrm{A})} = \left|O_q(\mathrm{A}) : \left(O_q(\mathrm{A})\right)_\alpha\right| = t$，再设 $O_q(\mathrm{A})$ 在 $V(\Gamma)$ 上有 m 个轨道，因为 $p \geq 3$ 且 $p \neq 5$ 时，$40p = mt \Rightarrow m = 40p/t = 30$，所以 $O_q(\mathrm{A})$ 在 $V(\Gamma)$ 上至少有 30 个轨道。又根据定理 2.7(i)可得 $O_q(\mathrm{A})$ 在 $V(\Gamma)$ 上是半正则的，此外 $\left|O_2(\mathrm{A})\right| \leq 8$，$O_5(\mathrm{A}) \leq Z_5$，$O_p(\mathrm{A}) \leq Z_p$，下面对 F 进行分情况讨论：

根据 $\left|O_2(\mathrm{A})\right| \leq 8$，则 8 阶群有：循环群 Z_8，交换群 $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$，交换群 $Z_4 \times Z_2$，非交换群 $D_8 = \left\langle a,b \mid a^4 = b_2 = 1, ba = a^{-1}b \right\rangle$，非交换群 $Q_8 = \left\langle a,b \mid a^4 = 1, b_2 = a^2, ba = a^{-1}b \right\rangle$。

如果 F 在 $V(\Gamma)$ 上是传递的，当 F 是交换群时：$F = Z_8 \times Z_5 \times Z_p$，$F = Z_2 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_5 \times Z_p$，$F = Z_4 \times Z_2 \times Z_5 \times Z_p$。如果 F 在 $V(\Gamma)$ 上是传递的，那么 $|F| = 40p$ 在 $V(\Gamma)$ 是正则的，Γ 是 F 的 Cayley 图。设 $\Gamma = \mathrm{Cayley}(F,S)$，其中 $S = S^{-1} \subseteq F \setminus \{1\}$，$|S| = 3$，因为 $F \lhd \mathrm{A}$，则 Γ 是正规 Cayley 图，根据引理 2.4 可得 $\mathrm{A} = F : \mathrm{Aut}(F,S)$，又因为 Γ 是弧传递的，由弧传递的等价条件得知 $\mathrm{A}_1 = \mathrm{Aut}(F,S) \leq \mathrm{Aut}(F)$ 在 $\Gamma(1) = S$ 上是传递的，其中 1 表示 Γ 的顶点对应 F 的单位元，S 里的元素都是群 F 里的元素，对于 $\forall S_1, S_2 \in F$，$\exists \sigma \in \mathrm{Aut}(F)$，使得 $S_1^\sigma = S_2$，则 $|S_1| = |S_2|$，所以 S 中的元素具有相同的阶，并令其阶为 t。当 $t = 1$ 时，$|S| = 3$，有三个单位元，显然是矛盾的，当 $t \geq 2$ 时，不能得到矛盾。当 F 是非交换群时，用所学的知识不能得到矛盾。但是我们有 $F \lesssim Z_8 \times Z_{5p}, Z_2^3 \times Z_{5p}, Z_2 \times Z_4 \times Z_{5p}, D_8 \times Z_{5p}, Q_8 \times Z_{5p}$。

如果 F 在 $V(\Gamma)$ 上是至少有三个轨道，则定理 2.7(i)表明 Γ_F 是 A/F 弧传递的，根据假设 $F = Z_8 \times Z_5 \times Z_p$ 时，因为 F 在 $V(\Gamma)$ 上是半正则的且 F 为交换群，所以 $F \leq C_{\mathrm{A}}(F)$，又根据引理 2.1 $C_{\mathrm{A}}(F) \leq F$，即 $F = C_{\mathrm{A}}(F)$。根据定理 2.3，$F \leq \mathrm{A}$，则 $N_A(F)/C_A(F)$ 同构于 $N_A(F)/C_A(F)$ 的一个子群，又因为 $F \lhd \mathrm{A}$，所以 $N_{\mathrm{A}}(F) = \mathrm{A}$。即 $\mathrm{A}/F = \mathrm{A}/C_{\mathrm{A}}(F)$ 同构于 $\mathrm{Aut}(F)$ 的一个子群。由于循环群的自同构群是交换群，可得 $\mathrm{Aut}(F)$ 是交换群，因此 A/F 是可交换的。由弧传递的等价条件可得对于 $\forall v \in V(\Gamma_F)$，$(\mathrm{A}/F)_v$ 在它的邻域上传递。因为 A/F 作用在 $V(\Gamma_F)$ 上是传递的且是交换群，则 A/F 是正则的，所以 $(\mathrm{A}/F)_v = 1$，出现矛盾。

当 F 为其它群时，F 在 $V(\Gamma)$ 上是至少有三个轨道。在正规块图里面，原图度数与块图的度数相等，则 Γ 是 Γ_F 的正规覆盖，Γ_F 是三度的 $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/F$ -弧传递图。设 A 存在非平凡的正规子群 F 且 $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/F$，设 (B_1, B_2)，(B_3, B_4) 是块图 Γ_F 的两条弧，由块图的定义知道，$v_1 \in B_1, v_2 \in B_2, v_3 \in B_3, v_4 \in B_4$。使得 (v_1, v_2) 和 (v_3, v_4) 是图 Γ 的两条弧，于是 $\exists g \in G$，我们有 $v_1^g = v_3$，$v_2^g = v_4$，令 $B_1 = B^{g_1}$，$B_2 = B^{g_2}$，$B_3 = B^{g_3}$，$B_4 = B^{g_4}$。$v_1^g = v_3 \in B_1^g \cap B_3 = B^{g_1 g} \cap B^{g_3}$，$(v_3)^{(g_3)^{-1}} \in B^{g_1 g (g_3)^{-1}} \cap B \Rightarrow \neq \varnothing$，$B^{g_1 g (g_3)^{-1}} = B \Rightarrow B_1^g = B_3$。同理，$B_2^g = B_4$，于是 Γ_F 的 $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/N$ 对称的。

如果 F 恰好在 $V(\Gamma)$ 上有两个轨道，根据原图中的轨道个数为块图中的顶点个数，可得块图顶点的个数为 2。对于任意的 $B \in \mathcal{B}$，设 $u, v \in B$ 且 $\{u,v\} \in E(\Gamma)$，又设 $v' \in \Gamma_1(u)$，$\Gamma_1(u)$ 为 u 在图 Γ 中的领域。$\{u, v'\} \in E(\Gamma)$，由 Γ 得的 G-对称性，$\exists g \in G$，使得 $u^g = u$，$v^g = v \Rightarrow g \in G_u$，而 $u \in B$，有 $u^g \in B^g \Rightarrow u \in B^g \cap B$，又因为 B 为块，$B^g = B$，$v \in B \Rightarrow v^g \in B^g = B \Rightarrow v' \in B$。从而 $\Gamma_1(u) \subseteq B$，继续这样的推理，Γ 的包含 u 的连通分支也含于 B 中。因为 Γ 是连通的，只有一条连通分支，且含于 B 中，$B = V(\Gamma)$，所以产生矛盾。则 B 中不含图 Γ 的边，这两个轨道就构成了二部图的二部划分，于是 Γ 是二部图。

参考文献

[1] Chao, C.-Y. (1971) On the Classification of Symmetric Graphs with a Prime Number of Vertices. *Transactions of the American Mathematical Society*, **158**, 247-256. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1971-0279000-7

[2] Cheng, Y. and Oxley, J. (1987) On Weakly Symmetric Graphs of Order Twice a Prime. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **42**, 196-211. https://doi.org/10.1016/0095-8956(87)90040-2

[3] Conder, M. and Dobcsányi, P. (2002) Trivalent Symmetric Graphs on up to 768 Vertices. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, **40**, 41-63.

[4] Tutte, W.T. (1947) A Family of Cubical Graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **43**, 459-474. https://doi.org/10.1017/S0305004100023720

[5] Feng, Y.-Q., Kwak, J.H. and Wang, K. (2005) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order 8p or 8p^2. *European Journal of Combinatorics*, **26**, 1033-1052. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2004.06.015

[6] Feng, Y. and Kwak, J.H. (2006) Classifying Cubic Symmetric Graphs of Order 10p or 10p^2. *Science in China Series A*, **49**, 300-319. https://doi.org/10.1007/s11425-006-0300-9

[7] Oh, J.-M. (2009) A Classification of Cubic s-Regular Graphs of Order 16p. *Discrete Mathematics*, **309**, 2721-2726. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.06.025

[8] Oh, J.-M. (2009) A Classification of Cubic s-Regular Graphs of Order 14p. *Discrete Mathematics*, **309**, 3150-3155. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.09.001

[9] Cheng, H.W. (2010) Note on Cubic Symmetric Graphs of Order 2p^n. *Australasian Journal of Combinatorics*, **47**, 205-210.

[10] Ling, B. and Lou, B.G. (2016) Arc-Transitive Cubic Graphs of Order Four Times an Odd Square-Free Integer. *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**, Article ID: 1750213. https://doi.org/10.1142/S0219498817502139

[11] Suzuki, M. (1985) Group Theory I. Springer, New York.

[12] Xu, M.Y. (1999) Introduction to Finite Group, I. 2nd Edition, Science Press, Beijing. (In Chinese)

[13] Godsil, C.D. (1981) On the Full Automorphism Group of a Graph. *Combinatorica*, **1**, 243-256. https://doi.org/10.1007/BF02579330

[14] Miller, R.C. (1971) The Trivalent Symmetric Graphs of Girth at Most Six. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **10**, 163-182. https://doi.org/10.1016/0095-8956(71)90075-X

[15] Li, C.H. and Pan, J.M. (2008) Finite 2-Arc-Transitive Abelian Cayley Graphs. *European Journal of Combinatorics*, **29**, 148-158. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2006.12.001

[16] Praeger, C.E. (1993) An O'Nan-Scott Theorem for Finite Quasiprimitive Permutation Groups and an Application to 2-Arc Transitive Graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, **s2-47**, 227-239. https://doi.org/10.1112/jlms/s2-47.2.227