Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2093-2097
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137215

Hans汉斯

单调混合变分不等式解集性质

黎穷远

西南石油大学理学院，四川 成都

收稿日期：2023年6月16日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月26日

摘　要

本文研究了单调混合变分不等式的解集性质。利用*f*投影算子我们知道一点是单调混合变分不等式的解当且仅当为*f*投影的不动点。结合这个结论我们得到了关于单调混合变分不等式解集的一些性质。

关键词

单调混合变分不等式，*f*投影算子

Properties of Solution Set for Monotonic Mixed Variational Inequalities

Qiongyuan Li

College of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan

Received: Jun. 16th, 2023; accepted: Jul. 19th, 2023; published: Jul. 26th, 2023

Abstract

This article investigates the properties of the solution set for monotonic mixed variational inequalities. Using the *f*-projection operator, we know that a point is a solution for monotonic mixed variational inequalities if and only if it is a fixed point for the *f*-projection. Based on this conclusion, we obtain some properties about the solution set for monotonic mixed variational inequalities.

Keywords

Monotonic Mixed Variational Inequality, *f*-Projection Operator

文章引用: 黎穷远. 单调混合变分不等式解集性质[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2093-2097.
DOI: 10.12677/pm.2023.137215

1. 引言

变分不等式已成为当今非线性分析的重要组成部分，也是最优化理论领域内研究的热点之一。其中单调混合变分不等式是一类非常重要的变分不等式。其在管理学、交通运输等方面都有很多的应用，具体可以参考[1] [2] [3] [4]。Wu 和 Huang [5] [6] [7]在巴拿赫空间中引入了广义 f 投影算子。这种投影算子可以作为研究混合变分不等式的一个有效的工具。Lescarret [8]和 Browder [9]结合众多应用考虑带有非线性项的混合变分不等式，混合变分不等式是一般的变分不等式的一个有用且重要的推广。本文主要研究在算子单调情况下的单调混合变分不等式的解的存在唯一性及其解集的性质。

2. 预备知识

定义 1.1 H 为一实希尔伯特空间，K 为 H 上的一非空闭凸集，$f:K\to(-\infty,+\infty]$ 为一真凸下半连续泛函，$T:H\to H$ 连续，寻找 $x\in K$，使得

$$\langle Tx, y-x\rangle + f(y) - f(x) \ge 0 \quad \forall y\in K .$$

其中 $T:H\to H$ 是单调，该变分不等式称为单调混合变分不等式。

定义 1.2 映射 $G:H\times K\to(-\infty,+\infty]$ 被定义为

$$G(x,y)=\|x\|^2+\|y\|^2-2\langle x,y\rangle+2\rho f(y)$$

这里的 ρ 为任意正实数，$f:K\to(-\infty,+\infty]$ 为一真凸下半连续泛函，集值映射 $P_K^f:H\to 2^K$ 称为 f 投影算子，如果

$$P_K^f x=\left\{u\in K: G(x,u)=\inf_{y\in K} G(x,y)\right\}.$$

容易得到对于任意的 $x\in H$，$G(x,y)$ 关于 y 是凸下半连续的。对于任意的 $y\in K$，$G(x,y)$ 关于 x 是连续的。

根据 Wu 和 Huang [5] [6] [7]在巴拿赫空间中引入的广义 f 投影算子的一些性质我们容易得到在希尔伯特空间中的 f 投影算子有如下性质

定理 1.3 1) 对于任意的 $x\in H$，$P_K^f x\ne\varnothing$。

2) 对于任意的 $x\in H$，$P_K^f x$ 为闭凸集。

3) 对于任意的 $x\in H$，$x^*\in P_K^f x$ 当且仅当

$$\langle x^*-x, y-x^*\rangle+\rho f(y)-\rho f(x^*)\ge 0 \quad \forall y\in K$$

4) f 投影算子 P_K^f 是单值的。

5) $P_K^f:H\to K$ 是连续的并且 $y_1\in P_K^f x_1$，$y_2\in P_K^f x_2$ 有 $\|y_2-y_1\|\le\|x_1-x_2\|$。

3. 主要内容

我们利用类似于研究单调变分不等式的方法得出了单调混合变分不等式的解集同样为凸集，在此之前我们先证明单调混合变分不等式问题等价于如下变分不等式问题。

定理 2.1 单调混合变分不等式问题等价于如下变分不等式问题寻找 $x \in H$ 使得

$$\langle Ty, y-x \rangle + f(y) - f(x) \ge 0 \quad \forall y \in K$$

证明：由**定理 1.3** 易知该变分不等式和单调混合变分不等式的解一定在 K 上。若 $x \in K$ 为单调混合变分不等式的解，则有

$$\langle Tx, y-x \rangle + f(y) - f(x) \ge 0 \quad \forall y \in K$$

由 T 单调，则有

$$\langle Ty, y-x \rangle + f(y) - f(x) \ge \langle Tx, y-x \rangle + f(y) - f(x) \ge 0$$

故而此时 x 为后面一个变分不等式的解。若 $x \in K$ 为后面一个变分不等式的解，则对于任意的 $z \in K$ 有

$$tz + (1-t)x \in K$$

此时有

$$\begin{aligned} 0 &\le \langle T(tz+(1-t)x), t(z-x) \rangle + f(tz+(1-t)x) - f(x) \\ &\le t\langle T(tz+(1-t)x), z-x \rangle + tf(z) - tf(x) \end{aligned}$$

两边同时除以 t 我们可以得到

$$0 \le \langle T(tz+(1-t)x), z-x \rangle + f(z) - f(x)$$

令 $t \to 0^+$，由 T 的连续性我们有

$$0 \le \langle Tx, z-x \rangle + f(z) - f(x)$$

故而此时 x 为单调混合变分不等式的解。

我们利用上面的结论证明单调混合变分不等式解集为凸集。

定理 2.2 若单调混合变分不等式解存在，则解集为凸集。

证明：由**定理 2.1** 我们只用证明如下集合为凸集。

$$S = \{x \in H : \langle Ty, y-x \rangle + f(y) - f(x) \ge 0\}$$

若对于任意的 $x_1, x_2 \in S$ 及任意的 $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} &\langle Ty, y-(tx_1+(1-t)x_2) \rangle + f(y) - f(tx_1+(1-t)x_2) \\ &= t\langle Ty, y-x_1 \rangle + (1-t)\langle Ty, y-x_2 \rangle + f(y) - f(tx_1+(1-t)x_2) \\ &\ge t\langle Ty, y-x_1 \rangle + (1-t)\langle Ty, y-x_2 \rangle + f(y) - tf(x_1) - (1-t)f(x_2) \\ &= t\langle Ty, y-x_1 \rangle + t(f(y) - f(x_1)) + (1-t)\langle Ty, y-x_2 \rangle + (1-t)(f(y) - f(x_2)) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

故而 S 为凸集，故而单调混合变分不等式的解集为凸集。

同样，类似于单调变分不等式，我们可以得出单调混合变分不等式当算子为严格单调时，若解存在，则解一定唯一。

定理 2.3 若单调混合变分不等式的解存在，且 T 为严格单调的，则解唯一。

证明：若不然存在不相同的 x_1, x_2 都为单调混合变分不等式的解。则对于任意的 $y \in K$ 有

$$\langle Tx_1, y-x_1 \rangle + f(y) - f(x_1) \ge 0$$

$$\langle Tx_2, y-x_2\rangle + f(y) - f(x_2) \geq 0$$

第一个式子 y 取 x_2，第二个式子 y 取 x_1 我们可以得到

$$\langle Tx_1, x_2-x_1\rangle + f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

$$\langle Tx_2, x_1-x_2\rangle + f(x_1) - f(x_2) \geq 0$$

两式相加有

$$\langle Tx_1 - Tx_2, x_2-x_1\rangle \geq 0$$

由于 T 单调，故而有

$$\langle Tx_1 - Tx_2, x_1-x_2\rangle = 0$$

再由 T 严格单调可知 $x_1 = x_2$，矛盾，故而单调混合变分不等式解唯一。

利用 Banach 压缩映像原理，我们可以得到如下单调混合变分不等式解的唯一性条件。

定理 2.4 若单调混合变分不等式中，映射 $T: H \to H$ 是李普希兹的，李普希兹常数为 L，且还为 α 强单调的，泛函 $f: K \to (-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续的。则当 $k < 1$ 时，MMVI 有解且解唯一。其中 $k = \sqrt{1+\rho^2 L^2 - 2\alpha\rho}$

证明：由**定理 1.3** 单调混合变分不等式有解意味着 $P_K^f(I-\rho T)$ 存在不动点。

对于任意的 $x_1, x_2 \in H$。并且可知 $P_K^f(I-\rho T)$ 为非空的且为单值的。可得

$$\begin{aligned}
&\left\|P_K^f(x_1-\rho Tx_1) - P_K^f(x_2-\rho Tx_2)\right\|^2 \leq \left\|x_1 - x_2 + \rho Tx_2 - \rho Tx_1\right\|^2 \\
&= \langle x_1 - x_2 + \rho Tx_2 - \rho Tx_1, x_1 - x_2 + \rho Tx_2 - \rho Tx_1\rangle \\
&= \|x_1 - x_2\|^2 + \rho^2\|Tx_1 - Tx_2\|^2 - 2\rho\langle x_1 - x_2,\ Tx_1 - Tx_2\rangle \\
&\leq \|x_1 - x_2\|^2 + \rho^2 L^2\|x_1 - x_2\|^2 - 2\alpha\rho\|x_1 - x_2\|^2 \\
&= \left(1+\rho^2 L^2 - 2\alpha\rho\right)\|x_1 - x_2\|^2
\end{aligned}$$

我们可以得到

$$\left\|P_K^f(x_1-\rho Tx_1) - P_K^f(x_2-\rho Tx_2)\right\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$

由巴拿赫压缩映像原理可知映射 $P_K^f(I-\rho T)$ 不动点存在且唯一，故而单调混合变分不等式有解且唯一。

巴拿赫压缩映像原理说明存在唯一性的好处在于，由此我们可以直接得到一种计算变分不等式解的算法。

算法 2.1 给定 $x_0 \in H$，迭代序列由 $x_{n+1} = P_K^f(x_n - \rho_n Tx_n)$ 产生。

参考文献

[1] 周晶. 随机交通均衡配流模型及其等价的变分不等式问题[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(1): 120-127.

[2] 李润梅, 汤淑明, 王飞跃. 动态用户最优的变分不等式分配模型研究综述[J]. 交通运输系统工程与信息, 2006, 6(2): 8.

[3] 丁方允, 张欣, 丁睿. 摩擦问题中的边界混合变分不等式[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(2): 201-210.

[4] 郇宁, 姚恩建, 杨扬, 等. 电动汽车混入条件下随机动态用户均衡分配模型[J]. 交通运输工程学报, 2019, 19(5): 150-161.

[5] Wu, K.Q. and Huang, N.J. (2006) The Generalised f-Projection Operator with an Application. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **73**, 307-317. https://doi.org/10.1017/S0004972700038892

[6] Wu, K.Q. and Huang, N.J. (2007) Properties of the Generalized-Projection Operator and Its Applications in Banach Spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, **54**, 399-406. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.01.029

[7] Wu, K.Q. and Huang, N.J. (2009) The Generalized F-Projection Operator and Set-Valued Variational Inequalities in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*, **71**, 2481-2490. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.01.082

[8] Lescarret, C. (1965) Cas d'addition des applications monotones maximales dans un espace de Hilbert. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*. **261**, 1160-1163.

[9] Browder, F.E. (1966) On the Unification of the Calculus of Variations and the Theory of Monotone Nonlinear Operators in Banach Spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **56**, 419-425. https://doi.org/10.1073/pnas.56.2.419