Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2032-2036
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137209

二阶积分偏微分方程的剩余可控性

陈健柳，彭思琦，林佳仪，周秀香*
岭南师范学院数学与统计学院，广东 湛江

收稿日期：2023年6月12日；录用日期：2023年7月19日；发布日期：2023年7月26日

摘 要

不同于线性偏微分方程，积分偏微分方程的零能控性与剩余可控性之间关联不大。利用儒歇定理、拉普拉斯变换等方法分别得到具有三种常用积分核的二阶积分偏微分方程的非剩余可控性。这类结果是对积分偏微分方程能控性的补充。

关键词

积分偏微分方程，剩余可控性，积分核，儒歇定理

Controllability to Rest of the Second Order Integro-Differential Equation

Jianliu Chen, Siqi Peng, Jiayi Lin, Xiuxiang Zhou*
School of Mathematics and Statistics, Lingnan Normal University, Zhanjiang Guangdong

Received: Jun. 12th, 2023; accepted: Jul. 19th, 2023; published: Jul. 26th, 2023

Abstract

Unlike linear partial differential equations, the null controllability of integro-differential equations is not related to controllability to rest. Using Rouché's theorem, Laplace transform and so on, we obtain that second order integro-differential equations with three common integral kernels which cannot be controlled to rest, respectively. This result is a supplement to the controllability of integro-differential equations.

Keywords

Integro-Differential Equations, Controllability to Rest, Integral Kernels, Rouché's Theorem

*通讯作者。

文章引用：陈健柳，彭思琦，林佳仪，周秀香. 二阶积分偏微分方程的剩余可控性[J]. 理论数学，2023，13(7): 2032-2036. DOI: 10.12677/pm.2023.137209

1. 介绍

众所周知，由线性偏微分方程支配的控制系统的状态在某一时刻达到目标零后，这一时刻后不施加控制的状态都为零。前者我们称为零能控性，后者称为剩余可控性。然而由于积分项的累加作用，这一结论对于由积分偏微分方程支配的控制系统不再成立。文献[1]讨论了一阶积分偏微分方程的剩余可控性，对于大部分积分核函数，控制系统都是非剩余可控的。另一方面，为了得到剩余可控性，不仅要控制系统在某一时刻的状态，而且要控制在同一时刻的积分项。此时，必须施加移动控制使得控制函数的支集随着时间的改变而覆盖整个空间(如，[2] [3] [4])。关于积分偏微分方程的能控性问题，可以参考[5] [6] [7]及相关引用文献。

受文献[1]启发，本文考虑二阶积分偏微分方程的剩余可控性。与文献[1]相比，为得到类似的结果，相应核函数中的指标会发生改变。这类可控性问题的结论是进一步探讨最优控制问题的理论基础。

2. 定理及其证明

考虑如下二阶积分偏微分方程的边界控制：

$$\begin{cases}\theta_{tt}=\alpha\theta_{xx}+\int_0^t N(t-s)\theta_{xx}(x,s)\mathrm{d}s, & x\in(0,\pi),\ t>0,\\ \theta(0,t)=u(t),\ \theta(\pi,t)=0, & t>0,\\ \theta(x,0)=\theta_1(x),\ \theta_t(x,0)=\theta_2(x), & x\in(0,\pi),\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha>0$ 是常数，θ 是状态，$u\in L^2_{loc}(0,+\infty)$ 是控制，$\theta_1\in H_0^1(0,\pi)$ 和 $\theta_2\in L^2(0,\pi)$ 是初值，并且 $N\in L^2_{loc}(0,+\infty)$ 是积分核函数。为方便起见，记 $\theta(x,t;u)$ 是系统(1)对应控制 u 在位置 x 和时刻 t 的解。对于任意给定的 u 和 $T>0$，有

$$\big(\theta(\cdot,\cdot;u),\theta t(\cdot,\cdot;u)\big)\in C\big([0,T];H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)\big).$$

积分核的性质通常和材料有关，常见的核函数有三种形式：

$$N(t)=\beta\mathrm{e}^{\gamma t}\ (\beta\neq 0),\ N(t)=\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\ \big(m\in\mathbb{N}^+\triangleq\mathbb{N}\setminus\{0\}\big),$$

以及

$$N(t)=\frac{1}{\Gamma(1-r)}t^{-r}\big(r\in(0,1)\big).$$

这里 $\Gamma(\cdot)$ 表示伽马函数。

定义 1. 初值 $(\theta_1,\theta_2)\in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$ 称为剩余可控的，如果存在时间 $T>0$ 和控制 $u\in L^2(0,T)$ 使得

$$u(t)=0,\ \theta(x,t;u)=0,\quad t>T,\ x\in(0,\pi).$$

如果任意初值皆是剩余可控的，则称系统(1)是剩余可控的。进一步，如果控制时间 T 与初值无关，则称(1)在 T 时刻剩余可控。

记 $\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$，则(1)的解表示为

$$\theta(x,t;u)=\sum_{n=1}^{+\infty}\theta_n(t)\phi_n(x),\quad (x,t)\in(0,\pi)\times(0,+\infty), \tag{2}$$

其中 θ_n 满足

$$\begin{cases}\theta_n''(t)=\alpha\left(-n^2\theta_n(t)+\sqrt{\frac{2n^2}{\pi}}u(t)\right)+\int_0^t N(t-s)\left(-n^2\theta_n(s)+\sqrt{\frac{2n^2}{\pi}}u(s)\right)\mathrm{d}s,\quad t>0,\\ \theta_n(0)=\theta_1^n=\langle\theta_1,\phi_n\rangle,\ \theta_n'(0)=\theta_2^n=\langle\theta_2,\phi_n\rangle.\end{cases} \tag{3}$$

这里 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 $L^2(0,\pi)$ 中的内积。因此，若初值 (θ_1,θ_2) 是剩余可控的，则对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，(3)的解一定有紧支集。令 $\hat{N}$ 表示 N 的拉普拉斯变换，则 θ_n 的拉普拉斯变换为

$$\hat{\theta}_n(\lambda)=\frac{\lambda\theta_1^n+\theta_2^n+n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\hat{u}(\lambda)\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)}{\lambda^2+n^2\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)}. \tag{4}$$

设 $\mathcal{G}=\left\{\hat{f}\,\middle|\,f\in L^2(0,+\infty),\ \mathrm{supp}\,f\text{是紧的}\right\}$。如果(1)在 T 时刻剩余可控，则对于任意 $(\theta_1,\theta_2)\in H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)$，存在 $\hat{u}(\lambda)\in\mathcal{G}$ 使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，有 $\hat{\theta}_n\in\mathcal{G}$。因为 $\mathcal{G}$ 中的元素都是整函数，因此当 $\lambda^2+n^2\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)=0$ 时，一定有插值问题

$$\hat{u}(\lambda)=-\frac{\lambda\theta_1^n+\theta_2^n}{n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{n\left(\lambda\theta_1^n+\theta_2^n\right)}{\lambda^2} \tag{5}$$

对于任意 $\{n\theta_1^n\},\{\theta_2^n\}\in l^2$ 都可解。利用拉普拉斯变换的定义知，(5)转化为矩量问题

$$\int_0^T \mathrm{e}^{-\lambda t}u(t)\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{n}{\lambda}\left(\theta_1^n+\frac{\theta_2^n}{\lambda}\right). \tag{6}$$

为得到系统(1)在 T 时刻非剩余可控，接下来试图证明 $\lambda^2+n^2\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)=0$ 存在根时，(6)不成立。

引理 1 [8]. 设 C 为一闭曲线，若函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 C 所围区域内及 C 上均解析，且在 C 上有 $|f(z)|>|g(z)|$，则有函数 $f(z)$ 和 $f(z)+g(z)$ 在 C 所围区域内的零点个数相同。

此引理称为儒歇定理，可以用于考查函数零点的个数及其分布情况。下面的定理利用儒歇定理得到方程 $\lambda^2+n^2\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)=0$ 的根有无穷个且存在收敛子列，最后得到矩量问题(6)对不满足 $\theta_1^n+\frac{\theta_2^n}{\lambda_n}=0$ 的初值不可解。

定理 1. 若 $\alpha+\hat{N}(\lambda)=0$ 存在根，则系统(1)在 T 时刻非剩余可控。

证明 设 $\alpha+\hat{N}(\lambda)=0$ 的根为 λ_0，考虑以 λ_0 为圆心的一个圆盘 $B(\lambda_0)$ 使 $\alpha+\hat{N}(\lambda)$ 无奇点且存在 $\mu_0>0$ 使得

$$\left|\alpha+\hat{N}(\lambda)\right|>\mu_0,\ \forall\lambda\in\partial B(\lambda_0).$$

设 $v=\max_{\lambda\in\partial B(\lambda_0)}|\lambda|$，则对于充分大的 n 一定有

$$n^2\mu_0>v^2.$$

因此，在圆盘 $B(\lambda_0)$ 的边界上应用引理 1 知，对于充分大的 n，$\lambda^2+n^2\left(\alpha+\hat{N}(\lambda)\right)=0$ 存在根 $\{\lambda_n\}\subset B(\lambda_0)$。

假设(1)在 T 时刻剩余可控。由于 $\{\lambda_n\}\subset B(\lambda_0)$，所以存在收敛子列，不妨仍记为 $\{\lambda_n\}$。设 $\{\lambda_n\}$ 收敛于 μ，并选取 $\{\theta_1^n\},\{\theta_2^n\}$ 满足对于充分大的 $n=2k+1$ 有

$$\theta_1^{2k+1}+\frac{\theta_2^{2k+1}}{\lambda_{2k+1}}=0.$$

即对充分大的 $k\in\mathbb{N}^+$，有 $\hat{u}(\lambda_{2k+1})=0$。由于 $\hat{u}(\cdot)$ 是一个整函数且 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_{2k+1}=\mu$，则有 $\hat{u}(\lambda)\equiv 0$。因此，

$$\theta_1^{2k}+\frac{\theta_2^{2k}}{\lambda_{2k}}=0.$$

除非对于充分大的 n 有

$$\theta_1^n+\frac{\theta_2^n}{\lambda_n}=0,$$

否则(6)不成立。故与假设矛盾，进而得到结论。

定理 2. 设 $\alpha=0$，$\hat{N}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda^{\tau}}$，$\tau>0$，则(1)在 T 时刻非剩余可控。

证明 方程 $\lambda^2+n^2\hat{N}(\lambda)=0$ 转化为

$$f_n(\lambda)=\lambda^{\tau+2}+n^2=0.$$

于是对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$，f_n 的零点为 $\eta_n=\left(-n^2\right)^{\frac{1}{\tau+2}}$。由 $\dfrac{2}{\tau+2}<1$ 可知

$$\sum\frac{1}{|\eta_n|}=\sum\frac{1}{n^{\frac{2}{\tau+2}}}=+\infty.$$

从而 $\left\{\mathrm{e}^{-\eta_n t}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $L^2(0,T)$ 中完备。于是(6)不可解。

定理 3. 设 $\hat{N}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda^{\sigma}}$，$\sigma\in(0,1)$，则(1)在 T 时刻非剩余可控。

证明 利用反证法，假设(1)是剩余可控的，则 $\hat{u}\in\mathcal{G}$，且

$$\hat{\theta}_n(\lambda)=\frac{\lambda\theta_1^n+\theta_2^n+n\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\alpha+\lambda^{-\sigma}\right)\hat{u}(\lambda)}{\lambda^2+n^2\left(\alpha+\lambda^{-\sigma}\right)}\in\mathcal{G}.$$

令 $\lambda=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$。由于在原点解析，所以

$$\lim_{\omega\to 0}\hat{\theta}_n\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right)=\lim_{\omega\to 2\pi}\hat{\theta}_n\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right),\ \lim_{\omega\to 0}\hat{u}\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right)=\lim_{\omega\to 2\pi}\hat{u}\left(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\right),$$

进一步

$$\frac{\rho\theta_1^n+\theta_2^n+n\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\alpha+\rho^{-\sigma}\right)\hat{u}(\rho)}{\rho^2+n^2\left(\alpha+\rho^{-\sigma}\right)}=\frac{\rho\theta_1^n+\theta_2^n+n\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\left(\alpha+\rho^{-\sigma}\mathrm{e}^{-2\pi\sigma i}\right)\hat{u}(\rho)}{\rho^2+n^2\left(\alpha+\rho^{-\sigma}\mathrm{e}^{-2\pi\sigma i}\right)}.$$

由 $\sigma\in(0,1)$ 计算得，对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$ 有

$$\hat{u}(\rho)=\frac{\sqrt{\pi}n\left(\rho\theta_1^n+\theta_2^n\right)}{\sqrt{2}\rho^2}.$$

于是当 $\rho\to 0^+$ 且 $\theta_1^n\neq 0$ 时，$\hat{u}(\rho)$ 无界。从而产生矛盾，结论得证。

注 1. 事实上，定理 3 的结论可以由定理 1 得到。这里针对不同形式的核函数提供了另外的证明方法，便于找到更多满足条件的核函数。

3. 小结

注意到 $\beta e^{\gamma t}$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{\beta}{\lambda-\gamma}$，函数 $\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{\lambda^m}$，积分核 $\frac{1}{\Gamma(1-r)t^r}$ 的拉普拉斯变换为 $\frac{1}{\lambda^{1-r}}$。因此，分别由定理 1~3 知，三者对应的控制系统皆非剩余可控。同理，可以讨论施加内部控制的控制系统的非剩余可控性。

基金项目

国家自然科学基金项目(11926331)，岭南师范学院校级人才引进专项资助(ZL1612)和岭南师范学院 2021 年度校级教育教学研究和改革资助项目。

参考文献

[1] Ivanov, S. and Pandolfi, L. (2009) Heat Equation with Memory: Lack of Controllability to Rest. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **355**, 1-11. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.01.008

[2] Biccari, U. and Micu, S. (2019) Null-Controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term. *Journal of Differential and Equations*, **267**, 1376-1422. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.02.009

[3] Chaves-Silva, F.W., Zhang, X. and Zuazua, E. (2017) Controllability of Evolution Equations with Memory. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **55**, 2437-2459. https://doi.org/10.1137/151004239

[4] Lv, Q., Zhang, X. and Zuazua, E. (2017) Null Controllability for Wave Equations with Memory. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **108**, 500-531. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2017.05.001

[5] Barbu, V. and Iannelli, M. (2000) Controllability of the Heat Equation with Memory. *Differential and Integral Equations*, **13**, 1393-1412. https://doi.org/10.57262/die/1356061131

[6] Guerrero, S. and Imanuvilov, O.Y. (2013) Remarks on Non Controllability of the Heat Equation with Memory. *ESAIM*: *Control*, *Optimisation* and *Calculus of Variations*, **19**, 288-300. https://doi.org/10.1051/cocv/2012013

[7] Zhou, X.X. and Gao, H. (2016) Controllability of a Class of Heat Equations with Memory in One Dimension. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 3066-3078. https://doi.org/10.1002/mma.4221

[8] 余家荣. 复变函数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980: 128.