Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(7), 2200-2212
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137226

拟线性波动方程的局部可解性

盛烁民

长安大学理学院，陕西 西安

收稿日期：2023年6月23日；录用日期：2023年7月24日；发布日期：2023年7月31日

摘 要

本文研究拟线性波动方程的柯西问题，在新的退化条件下证明解的唯一性和局部存在性。我们的证明基于特征方法、压缩映射原理和加权估计。

关键词

波动方程，退化，柯西问题，压缩映射，特征方法

Local Solvability of Quasilinear Wave Equation

Shuomin Sheng

College of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi

Received: Jun. 23rd, 2023; accepted: Jul. 24th, 2023; published: Jul. 31st, 2023

Abstract

We study the Cauchy problem of quasilinear wave equation and prove the uniqueness and local existence of the solution under the new degenerate condition. Our proof is based on the method of characteristic, contraction mapping principle and weighted estimates.

Keywords

Wave Equation, Degenerate, Cauchy Problem, Contraction Mapping, Method of Characteristic

文章引用: 盛烁民. 拟线性波动方程的局部可解性[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 2200-2212.
DOI: 10.12677/pm.2023.137226

1. 引言

波动方程是一种重要的偏微分方程，主要描述自然界中各种的波动现象，包括横波和纵波，例如声波、光波和水波。波动方程抽象于声学，电磁学和流体力学等领域。在本文中我们考虑非线性退化波动方程在 R 上的柯西问题：

$$\begin{cases} u_{tt} = c(u)\left(c(u)u_x\right)_x + F(u)u_x, & (t,x)\in(0,T]\times R \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in R \\ u_t(0,x) = u_1(x), & x\in R \end{cases} \tag{1.1}$$

这里的 $F(u)$ 是给定的函数。文章的主要目的是在初始条件 $u_0(x)>0$，并且当 $|x|\to\infty$，$u_0(x)$ 退化的条件下使得方程(1.1)在 $t=0$ 时是严格双曲型函数，由此证明方程解的局部存在性和唯一性。

关于退化波动方程现已有较多的研究成果，其中 Manfrin [1]建立了退化拟线性波动方程在初值属于 $C_0^\infty(R^n)$ 情况下解的局部存在性和唯一性，这个结果同时又被扩展到更多的一般退化波动方程中[2] [3]。Ivrii 和 Petkov [4]展示了 Levi 条件在一维弱双曲型方程的柯西问题的适定性。Y. Sugiyama [5]证明了波动方程在初值退化，利用黎曼函数证明了方程解的局部唯一存在性。Hu 和 Wang [6]利用压缩映射原理和特征方法证明了变分波动方程在声速线上退化情况下经典解的存在性。此外 Oleinik [7] [8] [9] [10] [11]等人研究了弱双曲方程的解，以及 Anikin [12] [13] [14] [15]等人介绍了波动方程的退化问题。

在本文开始前我们首先对初始条件进行一些设定：

$$\gamma = \begin{cases} 0, & a\ge 1 \\ (1-a)\alpha, & \text{其他} \end{cases}$$

对于初始数据 $u_0\in C^2(R)$，$u_1\in C_b^1(R)$，我们假设：

$$c_1\langle x\rangle^{-\alpha} \le u_0(x) \le c_2 \tag{1.2}$$

$$\left|u_1(x)\pm u_0^a(x)\right| \le c_3\langle x\rangle^{-\beta} \tag{1.3}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_1(x)\pm u_0^a u_0'(x)\right)\right| \le c_4\langle x\rangle^{-\gamma} \tag{1.4}$$

其中 $\alpha\ge 0$，$\beta\ge 0$ 使得：

$$\alpha\le\beta \tag{1.5}$$

$$a\alpha\le\beta \tag{1.6}$$

这里 $u_0' = \mathrm{d}u_0/\mathrm{d}x$，$\langle x\rangle = \left(1+x^2\right)^{1/2}$，$c_1,c_2,c_3,c_4$ 是正常数，(1.2)式表明方程(1.1)是退化的。对于函数 $F\in C\left([0,\infty)\right)\cap C^1\left((0,\infty)\right)$，我们假设：

$$\left|F(\theta)\right| \le k_1\theta^a \tag{1.7}$$

$$\left|F_\theta(\theta)\right| \le k_2\theta^{a-1} \tag{1.8}$$

其中 $\theta \in (0,K]$，k_i 是正常数。同时我们假设 $c(u)$ 满足以下条件，这里 c_i 和 c^* 是正常数：

$$c_1 u^a \le c(u) \le c_2 \tag{1.9}$$

$$|c'(u)| \le c_3 u^{a-1} \tag{1.10}$$

$$|c''(u)| \le c_4 u^{a-2} \tag{1.11}$$

定理 1.1 取 $u_0 \in C^2(R), u_1 \in C_b^1(R)$，假设(1.2)~(1.11)成立，则存在一个依赖于(1.2)~(1.11)中的常数 $T>0$ 使得柯西问题(1.1)有唯一的局部解 $u \in C^2([0,T]\times R)$ 对于任意 $(t,x)\in[0,T]\times R$ 满足：

$$C_1 \langle x\rangle^{-\alpha} \le u(t,x) \le C_2 \tag{1.12}$$

$$|u_t(t,x) \pm c(u)u_x(t,x)| \le C_3 \langle x\rangle^{-\beta} \tag{1.13}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_t(t,x) \pm c(u)u_x(t,x)\right)\right| \le C_4 \langle x\rangle^{-\gamma} \tag{1.14}$$

这里 C_1, C_2, C_3, C_4 是正常数。

本文在第二部分利用黎曼不变量建立一阶双曲方程，给出一些特征曲线的估计。在第三部分我们利用特征方法、加权估计和压缩映射原理证明方程解的存在性。

2. 准备

2.1. 基本公式

由(1.1)式得到特征方程：

$$(\mathrm{d}x)^2 - c^2(u)(\mathrm{d}t)^2 = 0$$

则特征曲线为：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \pm c(u)$$

由此我们取：

$$\partial_+ = \partial_t + c(u)\partial_x,\ \partial_- = \partial_t - c(u)\partial_x,$$

从而有：

$$\begin{cases} \partial_+ u = \partial_t u + c(u)\partial_x u = R \\ \partial_- u = \partial_t u - c(u)\partial_x u = S \end{cases} \tag{2.1}$$

通过计算 $\partial_-\partial_+ u$ 和 $\partial_+\partial_- u$ 和应用(1.1)式，可以得到以下方程：

$$\begin{cases} R_t - c(u)R_x = \dfrac{c'\left(R^2 - S^2\right)}{4c} + F(u)\dfrac{R-S}{2c} = N_1(u,R,S) + L(u,R,S) \\ S_t + c(u)S_x = \dfrac{c'\left(S^2 - R^2\right)}{4c} + F(u)\dfrac{R-S}{2c} = N_2(u,R,S) + L(u,R,S) \end{cases} \tag{2.2}$$

取 $x_\pm(t)$ 是(2.2)式方程的特征线，其中 $x_+(t)$ 和 $x_-(t)$ 是以下微分方程的解：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_\pm(t) = \pm c\left(u\left(t, x_\pm(t)\right)\right) \tag{2.3}$$

当强调特征曲线经过点 (s,y)，我们通过 $x_\pm(t;s,y)$ 定义 $x_\pm(t)$，并且 $x_\pm(t;s,y)$ 满足：

$$x_{\pm}(t;s,y)=y\pm\int_s^t c\left(u\left(t,x_{\pm}(\tau;s,y)\right)\right)\mathrm{d}\tau \tag{2.4}$$

在特征曲线上满足：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R\left(t,x_-(t)\right)=N_1(u,R,S)\left(t,x_-(t)\right)+L(u,R,S)\left(t,x_-(t)\right)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S\left(t,x_+(t)\right)=N_2(u,R,S)\left(t,x_+(t)\right)+L(u,R,S)\left(t,x_+(t)\right)\end{cases} \tag{2.5}$$

2.2. 特征曲线的估计

在 $u\in C^1([0,T]\times R)$ 时，特征曲线对于 $\alpha\geq 0$ 满足：

$$A_0\langle x\rangle^{-\alpha}\leq u(t,x)\leq A_1 \tag{2.6}$$

这里 A_0,A_1 是正常数。另外，我们假设：

$$0\leq c(u)\left|u_x(t,x)\right|\leq A_2\langle x\rangle^{-\alpha} \tag{2.7}$$

根据 u 的有界性和(2.4)式，在 $s\in[0,T]$ 得到以下估计：

$$x-A_1^a|t-s|\leq x_{\pm}(s;t,x)\leq x+A_1^a|t-s| \tag{2.8}$$

为了得到特征曲线是满足 Arzelá-Ascoli 定理，下面我们引用引理来确保 $x_{\pm}(t;s,y)$ 是一致利普希资连续的。

引理 2.1 令 $u\in C^1([0,T]\times R)$，假设(2.6)和(2.7)成立，则当 T 足够小时，有特征曲线对任意 $x_1,x_2\in R$ 和 $t_1,t_2,t_3,t_4\in[0,T]$ 满足：

$$\left|x_{\pm}(t_3;t_1,x_1)-x_{\pm}(t_4;t_2,t_2)\right|\leq 3\left(1+c^*\right)\left(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|+|t_3-t_4|\right) \tag{2.9}$$

证明：取 $t_3=t_4=t\in[0,T]$ 和 $t\geq t_1,t_2$。由(2.4)式我们可以得到：

$$\begin{aligned}&\left|x_+(t;t_1,x_1)-x_+(t;t_2,x_2)\right|\\ &\leq|x_1-x_2|+\left|\int_{t_1}^t c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_1,x_1)\right)\right)\mathrm{d}\tau-\int_{t_2}^t c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_2,x_2)\right)\right)\mathrm{d}\tau\right|\\ &\leq|x_1-x_2|+\left|\int_{t_1}^{t_2} c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_2,x_2)\right)\right)\mathrm{d}\tau\right|+\int_0^t\left|c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_1,x_1)\right)\right)-c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_2,x_2)\right)\right)\right|\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中：$\left|\int_{t_1}^{t_2} c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_2,x_2)\right)\right)\mathrm{d}\tau\right|\leq\int_{t_1}^{t_2}c_2u^a\mathrm{d}\tau\leq c_2A_1^a|t_1-t_2|\leq c^*|t_1-t_2|$

$$\begin{aligned}&\left|c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_1,x_2)\right)\right)-c\left(u\left(\tau,x_+(\tau;t_2,x_2)\right)\right)\right|\\ &\leq\int_{x_+(\tau;t_2,x_2)}^{x_+(\tau;t_1,x_1)}\left|c'u_x(\tau,y)\right|\mathrm{d}y\leq c^*\left|x_+(\tau;t_1,x_1)-x_+(\tau;t_2,x_2)\right|\end{aligned}$$

由 Gronwall 引理得：

$$\begin{aligned}\left|x_+(t;t_1,x_1)-x_+(t;t_2,x_2)\right|&\leq\left(1+c^*\right)\left(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|\right)\mathrm{e}^{c^*t}\\ &\leq 2\left(1+c^*\right)\left(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|\right)\end{aligned} \tag{2.11}$$

同样得方法我们可以证明 $t<t_1$ 或 $t<t_2$ 的情况。然后由(2.4)和(2.6)式有：

$$\begin{aligned}\left|x_+(t_3;t_1,x_1)-x_+(t_4;t_2,x_2)\right|&\leq\left|x_+(t_3;t_1,x_1)-x_+(t_3;t_2,x_2)\right|+\left|x_+(t_3;t_1,x_1)-x_+(t_4;t_2,x_2)\right|\\ &\leq 3\left(1+c^*\right)\left(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|+|t_3-t_4|\right)\end{aligned}$$

由此(2.9)得证。

定理 2.2 取 $u\in C^1\left(\left[0,T\right]\times R\right)$，假设(2.6)、(2.7)成立，则特征曲线在 $\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times R$，$s\in\left(0,T\right)$ 以及 $T>0$ 且足够小时，满足 $x_\pm\left(s;t,x\right)$ 关于 x 是可微的：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x_\pm\left(s;t,x\right)=\pm c'u_x\left(t,x_\pm\left(s;t,x\right)\right)\partial_x x_\pm\left(s;t,x\right)\\ \partial_x x_\pm\left(t;t,x\right)=1\end{cases}\tag{2.12}$$

和

$$\left|\partial_x x_\pm\left(s;t,x\right)\right|\le \mathrm{e}^{c^*|t-s|}\tag{2.13}$$

这里 c^* 是依赖于 A_1,A_2,A_3 的正常数。

证明： $x_\pm\left(s;t,x\right)$ 的可微性和(2.12)式是基于已知的事实(e.g. textbook of Sideris [16])，我们估计 $\partial_x x_-\left(s;t,x\right)$ 的在 $t\ge s$ 时，由(2.6)和(2.7)，可以得到：

$$\left|\partial_x x_\pm\left(s;t,x\right)\right|\le 1+\left|\int_t^s c'u_x\left(\tau,x_\pm\left(\tau;t,x\right)\right)\partial_x x_\pm\left(\tau;t,x\right)\mathrm{d}\tau\right|\le 1+c^*\int_t^s\left|\partial_x x_\pm\left(\tau;t,x\right)\right|\mathrm{d}\tau$$

从而由 Gronwall 引理当 T 足够小时，(2.13)成立。

3. 主要定理的证明

我们假设在 $\alpha,\beta\ge 0$ 和 $\alpha\le\beta$ 函数满足以下条件：

$$A_0\left\langle x\right\rangle^{-\alpha}\le f\left(t,x\right)\le A_1\tag{3.1}$$

$$c\left(u\right)\left|f_x\left(t,x\right)\right|\le A_2\left\langle x\right\rangle^{-\beta}\tag{3.2}$$

$$\left|f_t\left(t,x\right)\right|\le A_3\left\langle x\right\rangle^{-\beta}\tag{3.3}$$

或者：

$$\left|f\left(t,x\right)\right|\le A_3\left\langle x\right\rangle^{-\beta}\tag{3.4}$$

$$\left|f_x\left(t,x\right)\right|\le A_4\left\langle x\right\rangle^{-\gamma}\tag{3.5}$$

$$\left|f_t\left(t,x\right)\right|\le A_5\left\langle x\right\rangle^{-\gamma}\tag{3.6}$$

这里 $A_j\left(j=1,\cdots,5\right)$ 是正常数。我们定义在 C^1 上的集合 $X_\alpha,Y_{\beta,1},Y_{\beta,2}$：

$$X_\alpha=\left\{f\in C^1\cap C^b\mid f\left(0,x\right)=u_0\left(x\right)\text{且满足}(3.1)、(3.2)、(3.3)\right\}$$

$$Y_{\beta,1}=\left\{f\in C_b^1\mid f\left(0,x\right)=R_0\left(x\right)\text{且满足}(3.4)、(3.5)、(3.6)\right\}$$

$$Y_{\beta,2}=\left\{f\in C_b^1\mid f\left(0,x\right)=S_0\left(x\right)\text{且满足}(3.4)、(3.5)、(3.6)\right\}$$

这里给定初值函数 $\left(u_0,R_0,S_0\right)\in C^1\cap C_b\times C_b^1\times C_b^1$。对于给定的函数 $\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$，我们考虑以下的一阶线性双曲方程：

$$\begin{cases}R_t-c\left(v\right)R_x=N_1\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)+L\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\\ S_t+c\left(v\right)S_x=N_2\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)+L\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\end{cases}\tag{3.7}$$

此时的初值条件为：$\left(R(0,x),S(0,x)\right)=\left(R_0,S_0\right)\in C_b^1\times C_b^1$。我们建立：

$$u=u_0(x)+\int_0^t\frac{R+S}{2}(s,x)\mathrm{d}s \tag{3.8}$$

我们发现(3.7)和 C^1 空间的初始数据有一个唯一的全局空间的解，使得对于任意 $T>0$，由特征方法都有 $R,S\in C^1\left(\left[0,T\right]\times R\right)\cap C_b\left(\left[0,T\right]\times R\right)$。由(3.8)式可知 $u\in C^1\cap C_b$，由此我们可以定义映射：

$$\Phi:X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}\to C^1\times C^1\times C^1$$

使得有：$\Phi\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)=\left(u,R,S\right)$。我们用 A_0,A_1,A_3,A_4 满足以下方程：

$$2A_0\langle x\rangle^{-\alpha}\le u_0(x)\le\frac{A_1}{2} \tag{3.9}$$

$$\left\|\langle x\rangle^\beta R_0\right\|_{L^\infty}+\left\|\langle x\rangle^\beta S_0\right\|_{L^\infty}\le\frac{A_3}{4} \tag{3.10}$$

$$\left\|\langle x\rangle^\gamma R_0'\right\|_{L^\infty}+\left\|\langle x\rangle^\gamma S_0'\right\|_{L^\infty}\le\frac{A_4}{4} \tag{3.11}$$

在以下的内容，我们首先证明 $(u,R,S)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$，并且当 T 足够小时，Φ 在 L^∞ 空间上是压缩映射。由于 $X_\alpha,Y_{\beta,1},Y_{\beta,2}$ 在 L^∞ 空间上不是闭集，所以我们可以证明不动点是属于 $X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$，进一步我们证明 $u\in C^2$。

命题 3.1 取 $\left(u_0,R_0,S_0\right)\in C^1\times C^1\times C^1$ 满足(3.9)~(3.11)，假设 $v,\bar{R},\bar{S}\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$，当 $T>0$ 且足够小时，就有 $\Phi(v,R,S)=(u,R,S)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$。

证明： 由特征方法，(3.7)的解可以写成以下的形式：

$$\begin{cases}R(t,x)=R\left(0,x_-(0)\right)+\int_0^t N_1\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\left(s,x_-(s)\right)+L\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\left(s,x_-(s)\right)\mathrm{d}s\\ S(t,x)=S\left(0,x_+(0)\right)+\int_0^t N_2\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\left(s,x_+(s)\right)+L\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\left(s,x_+(s)\right)\mathrm{d}s\end{cases} \tag{3.12}$$

这里的特征曲线由(3.7)可以定义为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_\pm(t)=\pm c\left(u\left(t,x_\pm(t)\right)\right)$$

初值为：$x_\pm(t)=x$。由这个表达式我们可以得到 $(u,R,S)\in C^1\times C^1\times C^1$。

根据(2.8)式，若 T 足够小，可得：

$$\frac{\langle x\rangle^\beta}{2}\le\langle x_-(s;,t,x)\rangle^{-\beta}\le2\langle x\rangle^\beta$$

运用此不等式，根据(3.12)和(1.5) (1.6)可以得到在 T 足够小有：

$$\begin{aligned}\left|\langle x\rangle^\beta R(t,x)\right|&\le2\left\|\langle x\rangle^\beta R(0,\cdot)\right\|_{L^\infty}+\int_0^t\frac{\langle x_-(s)\rangle^\beta c'(v)\left(\bar{R}^2-\bar{S}^2\right)}{2c(v)}\mathrm{d}s+\int_0^t\frac{\langle x_-(s)\rangle^\beta F(v)\left(\bar{R}-\bar{S}\right)}{c(v)}\mathrm{d}s\\&\le\frac{A_3}{2}+c^*\int_0^t\langle x(s)\rangle^{\beta+\alpha}\left|\bar{R}^2-\bar{S}^2\right|\mathrm{d}s+c^*\int_0^t\langle x(s)\rangle^\beta\left|\bar{R}-\bar{S}\right|\mathrm{d}s\\&\le\frac{A_3}{2}+c^*T\left(\left\|\langle x\rangle^\beta\bar{R}\right\|_{L_T^\infty L^\infty}^2+\left\|\langle x\rangle^\beta\bar{S}\right\|_{L_T^\infty L^\infty}^2\right)+c^*T\left(\left\|\langle x\rangle^\beta\bar{R}\right\|_{L_T^\infty L^\infty}+\left\|\langle x\rangle^\beta\bar{S}\right\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)\\&\le\frac{A_3}{2}+c^*T\end{aligned}$$

c^* 是关于 A_0, A_1, A_3 的正常数。所以在 T 足够小时我们可以得到：

$$\left\| \langle x \rangle^{\beta} R \right\|_{L_T^\infty L^\infty} \le A_3 \tag{3.13}$$

同 R 的证明，我们可以同样得到

$$\left\| \langle x \rangle^{\beta} S \right\|_{L_T^\infty L^\infty} \le A_3 \tag{3.14}$$

下面估计 $\left\| \langle x \rangle^{\gamma} R_x \right\|_{L_T^\infty L^\infty}$ 和 $\left\| \langle x \rangle^{\gamma} S_x \right\|_{L_T^\infty L^\infty}$，对(3.7)式关于 x 微分，可以得到 R_x 和 S_x 的积分方程：

$$\begin{aligned} R_x(t,x) &= R_x(0;t,x)\partial_x x_-(0;t,x) + \int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(N_{1u}v_x + N_{1R}\bar{R}_x + N_{1S}\bar{S}_x\right)\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(L_u v_x + L_R \bar{R}_x + L_S \bar{S}_x\right)\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} S_x(t,x) &= S_x(0;t,x)\partial_x x_-(0;t,x) + \int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(N_{2u}v_x + N_{2R}\bar{R}_x + N_{2S}\bar{S}_x\right)\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + \int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(L_u v_x + L_R \bar{R}_x + L_S \bar{S}_x\right)\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.16}$$

这里 $N_{ju}, N_{jS}, N_{jR}\ (j=1,2)$ 是 $N_j = N_j(u,R,S)$ 关于 u,R,S 的偏导数(同样定义 L 的导数)。由引理 2.2 我们可以得到在 T 足够小时 $\left|\partial_x x_+(0;t,x)\right|$ 是有界的，由此我们有：

$$\begin{aligned} \left|R_x(t,x)\right| &\le \frac{A_4 \langle x \rangle^{-\gamma}}{2} + 2\int_0^t \left|\left(N_{1u}v_x + N_{1R}\bar{R}_x + N_{1S}\bar{S}\right)\right|\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \\ &\quad + 2\int_0^t \left|\left(L_u v_x + L_R \bar{R}_x + L_S \bar{S}\right)\right|\left(t, x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.17}$$

通过(3.4)~(3.6)和(1.5)、(1.9)、(1.11)、(1.12)对于 $\left|N_{1u}v_x\right|$ 有：

$$\left|N_{1R}\bar{R}_x\right| + \left|N_{1S}\bar{S}_x\right| = \left|\frac{c'\bar{R}}{c}\bar{R}_x\right| + \left|\frac{c'\bar{S}}{c}\bar{S}_x\right| \le c^*\left(\left|\bar{R}\right| + \left|\bar{S}\right|\right)\left(\left|\bar{R}_x\right| + \left|\bar{S}_x\right|\right) \le c^* \langle x \rangle^{-\gamma}$$

根据(1.7)、(1.8)、(1.12)：

$$\begin{aligned} \left|L_u v_x\right| &\le \left|\frac{2cF_u(v)\left(\bar{R}-\bar{S}\right) - 2c'F(v)\left(\bar{R}-\bar{S}\right)}{4c^2} v_x\right| \\ &\le \left|c^* \frac{F_u(v)}{c^2} c v_x \langle x \rangle^{-\beta}\right| + \left|c^* \frac{c'}{c} \cdot \frac{F(v)}{c^2} c v_x \langle x \rangle^{-\beta}\right| \\ &\le \left|c^* \langle x \rangle^{-\gamma}\right| \end{aligned}$$

由(1.7)和(1.9)得到：

$$\left|L_R \bar{R}_x\right| + \left|L_S \bar{S}_x\right| = \left|\frac{F(v)}{2c}\bar{R}_x\right| + \left|\frac{F(v)}{2c}\bar{S}_x\right| \le \left|\frac{k_1 v^a}{c_2 v^a}\langle x \rangle^{-\gamma}\right| \le c^* \langle x \rangle^{-\gamma}$$

将以上估计应用到(3.17)式，当 T 足够小时，我们得到：

$$\left\| \langle x \rangle^{\gamma} R_x \right\|_{L_T^\infty L^\infty} \le A_4 \tag{3.18}$$

$$\left\| \langle x \rangle^{\gamma} S_x \right\|_{L_T^\infty L^\infty} \le A_4 \tag{3.19}$$

由(3.7)式估计 R_t 和 S_t，我们有：

$$\begin{aligned}\left|R_t(t,x)\right|+\left|S_t(t,x)\right| &\le \left|c(v)R_x\right|+\left|c(v)S_x\right|+\left|N_1\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\right|+\left|N_2\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\right|+2\left|L\left(v,\bar{R},\bar{S}\right)\right| \\ &\le c^*\langle x\rangle^{-\gamma}+c^*\langle x\rangle^{\alpha-2\beta}+c^*\left|\frac{k_1 v^a}{v^a}\langle x\rangle^{-\beta}\right| \\ &\le C^*\langle x\rangle^{-\gamma}\end{aligned} \tag{3.20}$$

这里的 c^* 是依赖于 A_1,A_3,A_4 的常数，这里取 $C^*=A_5$。综合以上估计，我们可以得到 $(R,S)\in Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$。下面我们估计 $u\in X_\alpha$。通过(3.13)和(3.14)，我们有：

$$\left\|\langle x\rangle^\beta u_t\right\|_{L_T^\infty L}\le\left\|\frac{\langle x\rangle^\beta(R+S)}{2}\right\|_{L_T^\infty L^\infty}\le A_3 \tag{3.21}$$

通过(3.8)和(3.13) (3.14)且当 T 足够小时：

$$\langle x\rangle^\alpha u(t,x)\ge\langle x\rangle^\alpha u_0-\int_0^t\frac{\langle x\rangle^\alpha(R+S)}{2}\mathrm{d}s\ge 2A_0-TA_3\ge A_0 \tag{3.22}$$

$$\left|u(t,x)\right|\le\left|u_0(x)\right|+\left|\int_0^t\frac{R+S}{2}\mathrm{d}s\right|\le\frac{A_1}{2}+c^*T\langle x\rangle^{-\beta}\le A_1 \tag{3.23}$$

通过(3.8)得到：

$$\begin{aligned}\left|c(u)u_x\right| &= \left|c(u)\left(u_0'(x)+\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right)\right| \\ &\le\left|c(u)u_0'(x)\right|+\left|c(u)\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right| \\ &\le c^*\langle x\rangle^{-\beta}+\left|c(u)\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right|\end{aligned} \tag{3.24}$$

其中由(3.7)式得到 R_x+S_x：

$$\begin{aligned}\left|c(u)\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right| &\le\left|c_2u^a\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right|\le c^*\left(\left|u_0(x)\right|+\left|\int_0^t\frac{R+S}{2}\mathrm{d}s\right|\right)^a\left|\int_0^t\frac{R_x+S_x}{2}\mathrm{d}s\right| \\ &\le c^*\left(\left|u_0(x)\right|^a+\left|\int_0^t\frac{R+S}{2}\mathrm{d}s\right|^a\right)\left|\int_0^t\frac{R_t-S_t+N_2-N_1}{2c(v)}\mathrm{d}s\right| \\ &\le c^*\left(\left|u_0(x)\right|^a+c^*T^a\langle x\rangle^{-\alpha\beta}\right)\left|\int_0^t\frac{R_t-S_t}{2c(v)}\mathrm{d}s\right| \\ &\quad+c^*\left(\left|u_0(x)\right|^a+c^*T^a\langle x\rangle^{-\alpha\beta}\right)\left|\int_0^t\frac{N_2-N_1}{2c(v)}\mathrm{d}s\right|\end{aligned}$$

由分部积分：

$$\int_0^t\frac{R_t-S_t}{2c(v)}\mathrm{d}s=\frac{R-S}{2c(v)}-\frac{R_0-S_0}{2c(v)}+\int_0^t\frac{(R-S)c_uv_t}{2c^2(v)}\mathrm{d}s\le\frac{R-S}{2c(v)}-\frac{R_0-S_0}{2c(v)}+c^\circ\int_0^t\frac{\langle x\rangle^{-2\beta+\alpha}}{v^a}\mathrm{d}s$$

由(1.10)和(3.21)式我们有：

$$\left|\int_0^t c_uu_t\mathrm{d}s\right|\le\int_0^t\left|c_uu_t\right|\mathrm{d}s\le c^*\int_0^t\left|u^{a-1}\langle x\rangle^{-\beta}\right|\mathrm{d}s\le c^*T\langle x\rangle^{-\beta}$$

$$c(u_0)-c^*T\langle x\rangle^{-\beta}\le c(u)\le c(u_0)+c^*T\langle x\rangle^{-\beta}$$

若 T 足够小时，则有：

$$1\le\frac{c(u)}{c(v_0)}\le 2 \tag{3.25}$$

同理我们可以得到：

$$1\le\frac{u}{v_0}\le 2 \tag{3.26}$$

由以上我们知道：

$$\left(|u_0(x)|^a+c^*T^a\langle x\rangle^{-\alpha\beta}\right)\left|\int_0^t\frac{R_t-S_t}{2c(v)}\mathrm{d}s\right|\le c^*\langle x\rangle^{-\beta}$$

$$\left(|u_0(x)|^a+c^*T^a\langle x\rangle^{-\alpha\beta}\right)\left|\int_0^t\frac{N_2-N_1}{2c(v)}\mathrm{d}s\right|\le c^*\langle x\rangle^{-\beta}$$

综合以上计算可以得到：

$$c(u)|u_x|\le A_2\langle x\rangle^{-\beta} \tag{3.27}$$

由此我们可以得到：$(u,R,S)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$。在证明的最后我们来说明 (u,R,S) 是满足利普希资连续的。首先对于 u，对于任意的 $t_1,t_2\in[0,T]$，$x_1,x_2\in R$，在 $\beta\ge a\alpha$ 的条件下有：

$$|u(t,x)-u(t,y)|\le\left|\int_y^x|u_x(t,z)|\mathrm{d}z\right|\le c^*\int_y^x\left|\langle z\rangle^{a\alpha-\beta}\right|\mathrm{d}z\le c^*|x-y|$$

所以我们可以得到：

$$|u(t_1,x_1)-u(t_2,x_2)|\le c^*\left(|x_1-x_2|+|t_1-t_2|\right) \tag{3.28}$$

通过(3.18)、(3.19)和(3.20)得：

$$|R(t,x)-R(s,y)|+|(S(t,x)-S(s,y))|\le 2(A_4+A_5)(|x-y|+|t-s|) \tag{3.29}$$

命题 3.2 在命题 3.1 的假设下，Φ 在 L^∞ 范数空间下是压缩映射，所以在 $T>0$ 且足够小的情况下，存在常数 $c\in(0,1)$，使得 Φ 满足下列方程：

$$\|u_1-u_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|R_1-R_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|S_1-S_2\|_{L_T^\infty L^\infty}\le c^*\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar R_1-\bar R_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar S_1-\bar S_2\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)$$

这里 $(u_j,R_j,S_j)=\Phi(v_j,\bar R_j,\bar S_j)$，$j=1,2$。

证明：令 $\tilde u=u_1-u_2$，$\tilde R=R_1-R_2$，$\tilde S=S_1-S_2$，由(3.7)式，我们有：

$$\tilde R_t-c(v_1)\tilde R_x=N_1(v_1,\bar R_1,\bar S_1)-N_1(v_2,\bar R_2,\bar S_2)+L(v_1,\bar R_1,\bar S_1)-L(v_2,\bar R_2,\bar S_2)+(c(v_1)-c(v_2))R_{2x}$$

由特征方法：

$$\begin{aligned}\tilde R(t,x)=&\int_0^t\left(N_1(v_1,\bar R_1,\bar S_1)-N_2(v_2,\bar R_2,\bar S_2)\right)\mathrm{d}s\\&+\int_0^t\left(L(v_1,\bar R_1,\bar S_1)-L(v_2,\bar R_2,\bar S_2)\right)\mathrm{d}s+\int_0^t\left(c(v_1)-c(v_2)\right)\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.30}$$

其中我们取 $G(v)=\dfrac{F(v)}{2c(v)}$ 由(1.7) (1.9)和(3.1)可以得到：

$$\begin{aligned}\left|G(v_1)-G(v_2)\right| &\le \int_0^1\left|G'\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)\right|\mathrm{d}\theta\left|v_1-v_2\right|\\ &\le \int_0^1\left|c^*\left(\frac{1}{\theta v_1+(1-\theta)v_2}\right)\right|\mathrm{d}\theta\left|v_1-v_2\right|\\ &\le c^*\langle x\rangle^{\alpha}\left|v_1-v_2\right|\end{aligned}$$

对于(3.30)的第一部分可以得到：

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t\left(L\left(v_1,\bar{R}_1,\bar{S}_1\right)-L\left(v_2,\bar{R}_2,\bar{S}_2\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\ &=\left|\int_0^t\frac{F(v_1)\left(\bar{R}_1-\bar{S}_1\right)}{2c(v_1)}-\frac{F(v_2)\left(\bar{R}_2-\bar{S}_2\right)}{2c(v_2)}\mathrm{d}s\right|\\ &\le\left|\int_0^t G(v_1)\left(\bar{R}_1-\bar{S}_1-\bar{R}_2+\bar{S}_2\right)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_0^t\left(G(v_1)-G(v_2)\right)\left(\bar{R}_2-\bar{S}_2\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\le c^*T\left(\left\|v_1-v_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}+\left\|\bar{R}_1-\bar{R}_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}+\left\|\bar{S}_1-\bar{S}_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)\end{aligned}\tag{3.31}$$

取 $E(v)=\dfrac{c'(v)}{4c(v)}$ 由(1.10) (1.11)和(3.1)可以得到：

$$\begin{aligned}\left|E(v_1)-E(v_2)\right| &\le \int_0^1\left|E'\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)\right|\left|v_1-v_2\right|\mathrm{d}\theta\\ &\le \int_0^1\frac{1}{\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)^2}\left|v_1-v_2\right|\mathrm{d}\theta\\ &\le c^*T\langle x\rangle^{2\alpha}\left|v_1-v_2\right|\end{aligned}$$

对于(3.30)的第二部分则有：

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t\left(N_1\left(v_1,\bar{R}_1,\bar{S}_1\right)-N_2\left(v_2,\bar{R}_2,\bar{S}_2\right)\right)\mathrm{d}s\right|\\ &=\left|\int_0^t\frac{c'(v_1)\left(\bar{R}_1^2-\bar{S}_1^2\right)}{4c(v_1)}-\frac{c'(v_2)\left(\bar{R}_2^2-\bar{S}_2^2\right)}{4c(v_2)}\mathrm{d}s\right|\\ &\le\left|\int_0^t E(v_1)\left(\bar{R}_1^2-\bar{S}_1^2-\bar{R}_2^2+\bar{S}_2^2\right)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_0^1\left(E(v_1)-E(v_2)\right)\left(\bar{R}_2^2-\bar{S}_2^2\right)\mathrm{d}s\right|\\ &\le c^*T\left(\left\|v_1-v_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}+\left\|\bar{R}_1-\bar{R}_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}+\left\|\bar{S}_1-\bar{S}_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)\end{aligned}\tag{3.32}$$

对于(3.30)的第三部分，由 $\langle x\rangle^{\gamma}R_x$ 的有界性可知：

$$\int_0^t\left|\left(c(v_1)-c(v_2)\right)R_{2x}\right|\mathrm{d}s\le\int_0^1\left|c_v\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)\right|\mathrm{d}\theta\left|v_1-v_2\right|$$

当 $a\ge 1$ 有 $\left|c_v\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)\right|\le c^*\langle x\rangle^{-\gamma}$，
当 $a\le 1$ 有 $\left|c_v\left(\theta v_1+(1-\theta)v_2\right)\right|\le c^*\langle x\rangle^{-(1-a)\alpha-\gamma}\le c^*\langle x\rangle^{-\gamma}$。
即得：

$$\int_0^t\left|\left(c(v_1)-c(v_2)\right)R_{2x}\right|\mathrm{d}s\le c^*\left\|v_1-v_2\right\|_{L_T^\infty L^\infty}\tag{3.33}$$

因此当 T 足够小，我们可以得到：

$$\|\tilde{R}\|_{L_T^\infty L^\infty} \le c^*\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{R}_1-\bar{R}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{S}_1-\bar{S}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)$$

$$\|\tilde{S}\|_{L_T^\infty L^\infty} \le c^*\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{R}_1-\bar{R}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{S}_1-\bar{S}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)$$

由(3.8)式可以得到：

$$\|\tilde{u}\|_{L_T^\infty L^\infty} \le \frac{T}{2}\left(\|\tilde{R}\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\tilde{S}\|_{L_T^\infty L^\infty}\right) \le c^*\left(\|v_1-v_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{R}_1-\bar{R}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}+\|\bar{S}_1-\bar{S}_2\|_{L_T^\infty L^\infty}\right)$$

综上所述，当 T 足够小，Φ 在 L^∞ 范数空间下是压缩映射。

下面我们考虑非线性问题的唯一解 (u,R,S) 和特征曲线 $x_\pm(s)=x_\pm(s;t,x)$。

命题 3.3 在命题 3.1 的假设下，若 T 足够小，则唯一存在 $(u,R,S)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$ 和特征曲线 $x_\pm(s)=x_\pm(s;t,x)$ 满足：

$$\begin{cases} R(t,x)=R(0,x_-(0))+\int_0^t N_1(u,R,S)(s,x_-(s))+L(u,R,S)(s,x_-(s))\,\mathrm{d}s \\ S(t,x)=S(0,x_+(0))+\int_0^t N_2(u,R,S)(s,x_+(s))+L(u,\bar{R},\bar{S})(s,x_+(s))\,\mathrm{d}s \end{cases} \tag{3.34}$$

$$u(t,x)=u_0(x)+\int_0^t \frac{R+S}{2}\,\mathrm{d}s \tag{3.35}$$

和

$$x_\pm(s;t,x)=x\pm\int_t^s c\left(u\left(\tau,x_\pm(\tau;t,x)\right)\right)\mathrm{d}\tau \tag{3.36}$$

证明：任意固定 $k\ge 1$，根据命题 3.1 我们可以定义一个序列 $\{u_n,R_n,S_n\}\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$ 使得 $(u_{n+1},R_{n+1},S_{n+1})=\Phi(u_n,R_n,S_n)$，初值为 (u_0,R_0,S_0)。又由命题 3.2 可知 (u_n,R_n,S_n) 在 L^∞ 范数下收敛于不动点 (u,R,S)。然后我们可以定义特征曲线的序列 $\{x_{\pm,n}(;,t,x)\}_{n\in N}$，其中 $x_{\pm,n}(s;t,x)=x\pm\int_t^s c(u_n(\tau;t,x))\mathrm{d}\tau$，通过利普希资连续和 $c(u)$ 的有界性，我们可以发现对于任意 (t,x)，特征曲线都可以唯一的被定义。由于任意 $k\ge 1$ 和引理 2.1 和(2.8)式，我们可以发现 $\{x_{\pm,n}(;,t,x)\}_{n\in N}$ 是一直等度连续和一致有界的。因此由 Arzelá-Ascoli 定理表明存在 $\{x_{\pm,n}(;,t,x)\}_{n\in N}$ 的一个子列 $x_{\pm,n}(\cdot)$ 在 $[0,T]\times[0,T]\times[-k,k]$ 上一致收敛于 $x_\pm(\cdot)$。由(3.28)和(3.29)，当 $n\to\infty$ 有：

$$\left(u_n\left(t,x_{\pm,n}(t)\right),R_n\left(t,x_{\pm,n}(t)\right),S_n\left(t,x_{\pm,n}(t)\right)\right)\to\left(u\left(t,x_{\pm,}(t)\right),R\left(t,x_\pm(t)\right),S\left(t,x_\pm(t)\right)\right) \tag{3.37}$$

所以可知(3.34) (3.36)是成立的。下面我们检查 $(u,R,S)\in X_\alpha\times Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$ 是成立的。由(3.37)可知 u,R,S 本身是收敛的，所以(3.1)和(3.4)是显然成立的。因为 u,R,S 是利普希资连续的，所以它们几乎处处可微。根据命题 3.1 的证明，可知仅用 $\left|\langle x\rangle^\beta R\right|$ 和 $\left|\langle x\rangle^\beta S\right|$ 的有界性，即可证明 $u\in X_\alpha$。根据连续归纳法(Tao T. [17])此时我们对(3.34)式关于 x 进行微分得：

$$\begin{aligned} R_x(t,x)=&R_x(0;t,x)\partial_x x_-(0;t,x)+\int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(N_{1u}v_x+N_{1R}R_x+N_{1S}S_x\right)\left(t,x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \\ &+\int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(L_u v_x+L_R R_x+L_S S_x\right)\left(t,x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} S_x(t,x)=&S_x(0;t,x)\partial_x x_-(0;t,x)+\int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(N_{2u}v_x+N_{2R}R_x+N_{2S}S_x\right)\left(t,x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \\ &+\int_0^t \partial_x x_-(s;t,x)\left(L_u v_x+L_R R_x+L_S S_x\right)\left(t,x_-(s;t,x)\right)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.39}$$

根据命题 3.1 同样的方法可证明 $(R,S)\in Y_{\beta,1}\times Y_{\beta,2}$。唯一性根据命题 3.2 同样的方法即可证明。

为了检验(3.35)中 u 是方程(1.1)的解，我们猜想：

$$\begin{cases} u_0' = \dfrac{R_0 - S_0}{2c(u_0)} \\ u_1 = \dfrac{R_0 + S_0}{2} \end{cases} \tag{3.40}$$

命题 3.4 在命题 3.3 的假设下，为我们猜想 $(u_0,u_1)\in C^2\times C_b^1$，并且满足(3.40)式，则在 $[0,T]\times R$ 上 $u\in C^2$ 并且是方程(1.1)的经典解。

证明：根据 R,S 满足利普希资连续，所以它们几乎处处可微，并且满足：

$$\begin{cases} R_t - c(u)R_x = N_1(u,R,S) + L(u,R,S) \\ S_t + c(u)S_x = N_2(u,R,S) + L(u,R,S) \end{cases} \tag{3.41}$$

由(3.40)、(3.41)和 $u_t = \dfrac{R+S}{2}$ 可以得到：

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{R_x + S_x}{2}\mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{N_2 - N_1 + R_t - S_t}{2}\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{N_2 - N_1}{2}\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{R_t - S_t}{2}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{c'(S^2 - R^2)}{4c^2(u)}\mathrm{d}s + \frac{R-S}{2c(u)} - \frac{R-S}{2c(u_0)} + \int_0^t \frac{(R-S)c'u_t}{2c^2(u)}\mathrm{d}s \\ &= -u_0'(x) + \frac{R-S}{2c(u)} \end{aligned}$$

即有：

$$\partial_x u = u_0'(x) + \int_0^t \frac{R_x - S_x}{2}\mathrm{d}s = \frac{R-S}{2c(u)} \tag{3.42}$$

结合(3.35)、(3.41)和(3.43)我们可以得到 u 是方程(1.1)的解。最后应用 Douglis [18]，我们可以得到 R_x 和 S_x 的连续性。根据 R,S 的方程，我们可以得到 R_t 和 S_t 也是连续的，由此我们可以得到 u_{tt},u_{tx},u_{xx} 的连续性。由此我们得到 $u\in C^2([0,T]\times R)$。

参考文献

[1] Manfrin, R. (1999) Well Posedness in the C^∞ Class for $u_{tt} = a(u)\Delta u$. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **36**, 177-212. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00703-7

[2] Manfrin, R. (1995) A Solvability Result for a Nonlinear Weakly Hyperbolic Equation of Second Order. *Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA*, **2**, 245-264. https://doi.org/10.1007/BF01295313

[3] Manfrin, R. (1996) Local Solvability in C^∞ for Quasi-Linear Weakly Hyperbolic Equations of Second Order. *Communications in Partial Differential Equations*, **21**, 1487-1519. https://doi.org/10.1080/03605309608821236

[4] Ivrii, V. and Petkov, V. (1974) Necessary Conditions for the Cauchy Problem for Non-Strictly Hyperbolic Equations to Be Well Posed. *Russian Mathematical Surveys*, **29**, 1-70. https://doi.org/10.1070/RM1974v029n05ABEH001295

[5] Sugiyama, Y. (2022) Local Solvability for a Quasilinear Wave Equation with the Far Field Degeneracy: 1D Case. *Communications in Mathematical Sciences*, **21**, 219-237. https://doi.org/10.4310/CMS.2023.v21.n1.a10

[6] Hu, Y. and Wang, G. (2018) On the Cauchy Problem for a Nonlinear Variational Wave Equation with Degenerate Initial Data. *Nonlinear Analysis*, **176**, 192-208. https://doi.org/10.1016/j.na.2018.06.013

[7] Oleinik, O. (1970) On the Cauchy Problem for Weakly Hyperboic Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **23**, 569-586. https://doi.org/10.1002/cpa.3160230403

[8] Colombini, F. and Spagnolo, S. (1982) An Example of a Weakly Hyperbolic Cauchy Problem Not Well Posed in C^∞.

Acta Mathematica, **148**, 243-253. https://doi.org/10.1007/BF02392730

[9] Taniguchi, K. and Tozaki, Y. (1980) A Hyperbolic Equation with Double Characteristics Which Has a Solution with Branching Singularities. *Mathematica Japonica*, **25**, 279-300.

[10] Zhang, T. and Zheng, Y. (2016) The Structure of Solutions Near a Sonic Liner in Gas Gynamics via the Prssure Gradient Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **443**, 39-56. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.04.002

[11] Ruzhansky, M. and Yessirkegenov, N. (2020) Very Weak Solutions to Hypoelliptic Wave Equations. *Journal of Differential Equations*, **268**, 2063-2088. https://doi.org/10.1016/j.jde.2019.09.020

[12] Anikin, A.Y., Dobrokhotov, S.Y. and Nazaikinskii, V.E. (2018) Simple Asymptotics for a Generalized Wave Equation with Degenerating Velocity and Their Applications in the Linear Long Wave Run-Up Problem. *Mathematical Notes*, **104**, 471-488. https://doi.org/10.1134/S0001434618090158

[13] Speck, J. (2017) Finite-Time Degeneration of Hyperbolicity without Blowup for Quasilinear Wave Equations. *Analysis & PDE*, **10**, 2001-2030. https://doi.org/10.2140/apde.2017.10.2001

[14] Hu, Y. (2018) On the Existence of Solutions to a One-Dimensional Degenerate Nonlinear Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **265**, 157-176. https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.02.024

[15] Yamada, Y. (1987) Some Nonlinear Degenerate Wave Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **11**, 1155-1168. https://doi.org/10.1016/0362-546X(87)90004-6

[16] Sideris, T.C. (2013) Ordinary Differential Equation and Dynamical Systems. American Mathematical Society, Providence.

[17] Tao, T. (2006) Nolinear Dispersive Equationds: Local and Global Analysis. American Mathematical Society, Providence.

[18] Douglis, A. (1952) Some Existence Theorems for Hyperbolic Systems of Partial Differential Equation in Two Independent Variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **5**, 119-154. https://doi.org/10.1002/cpa.3160050202