**Pure Mathematics** 理论数学, 2023, 13(7), 1932-1937
Published Online July 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.137198

Hans汉斯

# 关于对数凹函数的随机单纯形体积不等式

**屈梦迪**

重庆工商大学，数学与统计学院，重庆

收稿日期：2023年6月4日；录用日期：2023年7月7日；发布日期：2023年7月14日

## 摘　要

过去，关于凸体的随机单纯形体积不等式已经被证明，当$1 \le k < n$时，等号成立的充要条件是凸体$K$是单位球；$k = n$时，等号成立的充要条件是凸体$K$是中心在原点的椭球。该文证明了对数凹函数的随机单纯形体积不等式，当$1 \le k < n$时，等号成立的充要条件是函数$f$与它的对称递减重排$f^{\star}$相等；当$k = n$时，等号成立的充要条件是$f(x) = f^{\star}(Ax)$，$A \in SL(n)$。

## 关键词

对称递减重排，Steiner对称，对数凹函数

# The Volume Inequality of Random Simplices of Log-Concave Functions

**Mengdi Qu**

School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing

Received: Jun. 4th, 2023; accepted: Jul. 7th, 2023; published: Jul. 14th, 2023

## Abstract

**In the past, the volume inequality of random simplex on convex bodies has been proved, when $1 \le k < n$, the necessary and sufficient conditions for the equality sign to hold are that the convex body $K$ is the unit sphere; when $k = n$, the necessary and sufficient conditions for the equality sign to hold are that the convex body $K$ is an ellipsoid with its center at the origin. In this paper, we prove the volume inequality of random simplices of log-concave functions, when $1 \le k < n$, the necessary and sufficient conditions for the equality sign to hold are that the function $f$ is equal to its symmetric decreasing rearrangement $f^{\star}$; when $k = n$, the necessary and sufficient conditions for the equality sign to hold are that $f(x) = f^{\star}(Ax)$, $A \in SL(n)$.**

文章引用: 屈梦迪. 关于对数凹函数的随机单纯形体积不等式[J]. 理论数学, 2023, 13(7): 1932-1937.
DOI: 10.12677/pm.2023.137198

**Keywords**

**Symmetric Decreasing Rearrangement, Steiner Symmetrization, Log-Concave Functions**



## 1. 引言

令 $P_0,P_1,\cdots,P_k$，$1\le k<n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 $k+1$ 个点，这些点的凸包称为单纯形[1]。用 $\upsilon(P_0,P_1,\cdots,P_k)$ 表示它的 $k$ 维体积。令 $P_i:=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})$，则

$$\upsilon(P_0,P_1,\cdots,P_k)=\frac{1}{k!}\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\begin{vmatrix}1 & x_{0i_1} & \cdots & x_{0i_k}\\ 1 & x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_{ki_1} & \cdots & x_{ki_k}\end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

令 $P_0$ 是原点 $o$，可得

$$\upsilon(o,P_1,\cdots,P_k)=\frac{1}{k!}\left(\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\begin{vmatrix}x_{0i_1} & \cdots & x_{0i_k}\\ x_{1i_1} & \cdots & x_{1i_k}\\ \vdots & & \vdots\\ x_{ki_1} & \cdots & x_{ki_k}\end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

令 $\phi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是严格单调的，关于凸体的随机单纯形体积不等式[2]：

$$J(K)\ge J(B)$$

当 $1\le k<n$ 时，等号成立的充要条件是 $K=B$；当 $k=n$ 时，等号成立的充要条件是 $K$ 是椭球。其中

$$J(K):=\int_{P_i\in K}\phi\big(\upsilon(P_0,P_1,\cdots,P_k)\big)\mathrm{d}P_0\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_k.$$

接下来定义对数凹函数的随机单纯形体积不等式，令 $\phi:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^n$ 是严格单调的，$f:\mathbb{R}^n\to[0,h]$ 是对数凹函数以及 $[f]_t=\{x\in\mathbb{R}^n:f(x)\ge t\}$ 是 $f$ 的水平集[3]。定义下面这个积分

$$J_o([f]_t):=\int_{P_i\in[f]_t}\phi\big(\upsilon(o,P_1,\cdots,P_k)\big)\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_k, \tag{3}$$

其中 $\mathrm{d}P_i$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的体积微元，$o$ 是原点。因此就得到

$$J_o(f)=\int_0^h J_o([f]_t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

定义积分

$$J([f]_t):=\int_{P_i\in[f]_t}\phi\big(\upsilon(P_0,P_1,\cdots,P_k)\big)\mathrm{d}P_0\mathrm{d}P_1\cdots\mathrm{d}P_k, \tag{5}$$

$$J(f)=\int_0^h J([f]_t)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

本文主要证明以下定理：

**定理 1** 令 $f:\mathbb{R}^n \to [0,h]$ 是对数凹函数，则 $[f]_t$，$t\in[0,h]$ 是凸体。$f^\star$ 是 $f$ 的对称递减重排[4]，则

$$J_o(f) \ge J_o(f^\star),$$

如果 $\phi$ 是严格递增的。如果 $\phi$ 是严格递减的，则这个不等式的逆向成立。当 $1\le k<n$ 时，当且仅当 $f=f^\star$ 时，等号成立。当 $k=n$，等号成立的充要条件是 $f(x)=f^\star(Ax)$，$A\in SL(n)$。

**定理 2** 令 $f:\mathbb{R}^n \to [0,h]$ 是对数凹函数，则 $[f]_t$，$t\in[0,h]$ 是凸体。$f^\star$ 是 $f$ 的对称递减重排，则

$$J(f) \ge J(f^\star),$$

如果 $\phi$ 是严格递增的。如果 $\phi$ 是严格递减的，则这个不等式的逆向成立。当 $1\le k<n$ 时，当且仅当 $f=f^\star$ 时，等号成立。当 $k=n$，等号成立的充要条件是 $f(x)=f^\star(Ax)$，$A\in SL(n)$。

## 2. 预备知识

定义 $n$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$，令 $K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸体。令 $u$ 是单位向量，$u^\perp$ 是 $u$ 的正交补空间，把 $K$ 上的所有与 $u$ 平行的弦平移，使得这些弦的中点落在 $u^\perp$ 上，所得到的凸体就是 $K$ 关于 $u$ 的 Steiner 对称化 $S_uK$ [5]。经过一次 Steiner 对称，凸体 $K$ 的体积不变，即 $V(S_uK)=V(K)$。凸体 $K$ 经过一系列的 Steiner 对称，在 Hausdorff 度量下收敛到一个与 $K$ 同体积的、中心在原点的球。

当一个非负函数的对数为凹函数时，这个函数称为对数凹函数[6]。定义对数凹函数

$$f := \mathrm{e}^{-\varphi(x)},$$

其中 $\varphi(x):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 是凸的且 $x\in\mathbb{R}^n$。显然 $\log f=-\varphi(x)$。

定义对数凹函数的水平集

$$[f]_t := \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\ge t\},$$

那么 $[f]_t$ 是凸的。

令 $\chi_A(x)$ 是 $A\subset\mathbb{R}^n$ 的特征函数，

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & 若\ x\in A, \\ 0 & 若\ x\in\mathbb{R}^n\setminus A. \end{cases}$$

对于 $f:\mathbb{R}^n\to(0,+\infty)$，我们通过对 $f$ 的水平集做 Steiner 对称化来定义关于 $f$ 的对称递减重排 $f^\star$，即

$$f^\star(x) := \int_0^{+\infty} \chi_{[f]_t^\star}(x)\,\mathrm{d}t,$$

其中 $[f]_t^\star$ 是中心在原点的与 $[f]_t$ 同体积的球[7]。

定义函数 $f$ 关于 $u$ 的 Steiner 对称 $S_uf$ [8]：

$$S_uf(x) := \int_0^{\infty} \chi_{S_u[f]_t}(x)\,\mathrm{d}t.$$

由一连续序列 $u_i$ 生成的 Steiner 对称 $f_i=s_{u_i}\cdots s_{u_1}f$，$f_i$ 在 $L_1$ 度量下收敛到 $f^\star$。

## 3. 定理证明

**引理 1** [9] **Anderson's 不等式** 令 $K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个关于原点对称的凸体，令 $H$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个偶的、非负的、单峰可积的函数，则对于 $y\in\mathbb{R}^n$，有

$$\int_K H(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{y+K} H(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

**引理 2** [2] 令 $K$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个关于原点对称的凸体，令 $I$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个偶的、可积的函数并且 $I$ 的水平集 $\left\{x\in\mathbb{R}^n : I(x)\le r\right\}$ 对所有 $r\in\mathbb{R}$ 是凸的。则对于 $y\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\int_K I(x)\mathrm{d}x \le \int_{y+K} I(x)\mathrm{d}x . \tag{8}$$

若 $I$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个偶的、可积的函数使得 $\left\{x\in\mathbb{R}^n : I(x)\ge r\right\}$ 对所有 $r\in\mathbb{R}$ 是凸的，则这个不等式的逆向成立。

**证** 令 $N>0$，

$$I_N(x) := \min\left\{I(x), N\right\},$$

因此函数 $N-I_N(x)$ 是非负的，且它的水平集是凸的。

由引理 1 可得，对于 $y\in\mathbb{R}^n$，

$$\int_K \left(N-I_N(x)\right)\mathrm{d}x \ge \int_{y+K}\left(N-I_N(x)\right)\mathrm{d}x$$

成立。因此

$$\int_K I_N(x)\mathrm{d}x \le \int_{y+K} I_N(x)\mathrm{d}x .$$

当 $N\to\infty$ 时得到(8)式。若 $\left\{x\in\mathbb{R}^n : I(x)\ge r\right\}$ 对所有 $r\in\mathbb{R}^n$ 是凸的，则对于 $N>0$，令

$$I_{-N}(x) := \max\left\{I(x), -N\right\},$$

那么函数 $I_{-N}+N$ 是非负的，且它的水平集是凸的。和上面的证明类似，对于 $y\in\mathbb{R}^n$ 有

$$\int_K \left(I_{-N}(x)+N\right)\mathrm{d}x \ge \int_{y+K}\left(I_{-N}(x)+N\right)\mathrm{d}x .$$

当 $N\to\infty$ 得

$$\int_K I(x)\mathrm{d}x \ge \int_{y+K} I(x)\mathrm{d}x . \qquad \square$$

**定理 1 的证明** 假设 $\phi$ 是严格增的，首先证明对于在任意方向 $u$ 上的 Steiner 对称 $S_u$，有

$$J_o\left(s_u[f]_t\right) \le J_o\left([f]_t\right) \tag{9}$$

成立。选择 $\mathbb{R}^n$ 中的一个坐标系使得 $u$ 是 $x_n$ 轴。对于 $P_i\in[f]_t$，令 $P_i := \left(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}\right)$，定义 $P_i$ 在 $[f]_t \mid u^\perp$ 上的投影 $P_i'$。穿过 $P_i'$ 且平行于 $u$ 的直线，与 $[f]_t$ 相交的部分是线段，线段的长度记为 $l_i$，线段的中点记为 $\left(P_i', y_i\right)$。则 $P_i\in[f]_t$ 就等价于 $P_i'\in[f]_t \mid u^\perp$ 且 $y_i-\frac{l_i}{2}\le x_{in}\le y_i+\frac{l_i}{2}$。令 $z := \left(x_{1n}, \cdots, x_{kn}\right)$，$\mathrm{d}z := \mathrm{d}x_{1n}\cdots\mathrm{d}x_{kn}$。令 $C := \left[-\frac{l_1}{2}, \frac{l_1}{2}\right]\times\cdots\times\left[-\frac{l_k}{2}, \frac{l_k}{2}\right]$，$y := \left(y_1, \cdots, y_k\right)$，那么条件 $y_i-\frac{l_i}{2}\le x_{in}\le y_i+\frac{l_i}{2}$ 也可以写作 $z\in y+C$。令

$$g\left(P_1', \cdots, P_k', z\right) := \phi\left(\upsilon\left(o, P_1, \cdots, P_k\right)\right),$$

那么有

$$J_o\left([f]_t\right) = \int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp, z\in y+C} g\left(P_1', \cdots, P_k', z\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\mathrm{d}z .$$

由(2)式可知，$\upsilon\left(o, P_1, \cdots, P_k\right)$ 是一个关于 $z$ 的偶的凸函数。因为 $\phi$ 是严格增的，$g$ 是一个偶函数且水平集 $\left\{z\in\mathbb{R}^k : g\le r\right\}$ 是凸的。由引理 2 知，

$$\int_{z\in C} g\left(P_1', \cdots, P_k', z\right)\mathrm{d}z \le \int_{z\in y+C} g\left(P_1', \cdots, P_k', z\right)\mathrm{d}z .$$

$$J_o\left(s_u\left([f]_t\right)\right)=\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in y+C} g\left(P_1',\cdots,P_k',z\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\mathrm{d}z\,,$$

即

$$\begin{aligned}J_o\left(s_u\left([f]_t\right)\right)&=\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in C} g\left(P_1',\cdots,P_k',z\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\mathrm{d}z\\&\le\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in y+C} g\left(P_1',\cdots,P_k',z\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\mathrm{d}z\\&=J_o\left([f]_t\right)\end{aligned}$$

不等式(9)成立，再由(4)式可知

$$J_o\left(s_u(f)\right)=\int_0^h J_o\left(s_u[f]_t\right)\mathrm{d}t\le\int_0^h J_o\left([f]_t\right)\mathrm{d}t=J_o(f)\,.$$

通过函数的 Steiner 对称，我们知道通过一序列的 Steiner 对称，$f_i\to f^\star$，就有 $J_o\left(s_u(f)\right)\to J_o\left(f^\star\right)$，因此 $J_o\left(f^\star\right)\le J_o(f)$。 □

**定理 2 的证明** 假设 $\phi$ 是严格增的，首先证明对于在任意方向 $u$ 上的 Steiner 对称 $S_u$，有

$$J\left(s_u[f]_t\right)\le J\left([f]_t\right)\tag{10}$$

成立。选择 $\mathbb{R}^n$ 中的一个坐标系使得 $u$ 是 $x_n$ 轴。对于 $P_i\in[f]_t$，令 $P_i:=\left(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}\right)$，定义 $P_i$ 在 $[f]_t|u^\perp$ 上的投影 $P_i'$。穿过 $P_i'$ 且平行于 $u$ 的直线，与 $[f]_t$ 相交的部分是线段，线段的长度记为 $l_i$，线段的中点记为 $\left(P_i',y_i\right)$。则 $P_i\in[f]_t$ 就等价于 $P_i'\in[f]_t|u^\perp$ 且 $y_i-\frac{l_i}{2}\le x_{in}\le y_i+\frac{l_i}{2}$。令 $z:=\left(x_{1n},\cdots,x_{kn}\right)$，$\mathrm{d}z:=\mathrm{d}x_{1n}\cdots\mathrm{d}x_{kn}$。令 $C:=\left[-\frac{l_1}{2},\frac{l_1}{2}\right]\times\cdots\times\left[-\frac{l_k}{2},\frac{l_k}{2}\right]$，$y:=\left(y_1,\cdots,y_k\right)$，那么条件 $y_i-\frac{l_i}{2}\le x_{in}\le y_i+\frac{l_i}{2}$ 也可以写作 $z\in y+C$。令

$$\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right):=\phi\left(\upsilon\left(P_0,P_1,\cdots,P_k\right)\right),$$

那么有

$$J\left([f]_t\right)=\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in y+C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}\left(z+P_0'\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\,.$$

由(1)式可知，$\upsilon\left(P_0,P_1,\cdots,P_k\right)$ 是一个关于 $z$ 的偶的凸函数。因为 $\phi$ 是严格增的，$\psi$ 是一个偶函数且水平集 $\left\{z\in\mathbb{R}^k:\psi\le r\right\}$ 是凸的。由引理 2 知，

$$\int_{z\in C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}z\le\int_{z\in y+C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}z\,.$$

$$J\left(s_u\left([f]_t\right)\right)=\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in y+C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}\left(z+P_0'\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\,,$$

即

$$\begin{aligned}J\left(s_u\left([f]_t\right)\right)&=\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}\left(z+P_0'\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\\&\le\int_{P_i'\in[f]_t|u^\perp,z\in y+C}\psi\left(z+P_0',P_1',\cdots,P_k'\right)\mathrm{d}\left(z+P_0'\right)\mathrm{d}P_1'\cdots\mathrm{d}P_k'\\&=J\left([f]_t\right)\end{aligned}$$

不等式(10)成立，再由(6)式可知

$$J\left(s_u(f)\right)=\int_0^h J\left(s_u[f]_t\right)\mathrm{d}t\le\int_0^h J\left([f]_t\right)\mathrm{d}t=J(f)\,.$$

通过函数的 Steiner 对称，我们知道通过一序列的 Steiner 对称，$f_i\to f^\star$，就有 $J\left(s_u(f)\right)\to J\left(f^\star\right)$，

因此 $J(f^\star) \le J(f)$。 □

## 4. 总结

通过对函数做对称递减重排和 Steiner 对称，证明了函数上的随机单纯形体积不等式，当 $1 \le k < n$ 时，等号成立的充要条件是函数 $f$ 与它的对称递减重排 $f^\star$ 相等；当 $k = n$ 时，等号成立的充要条件是 $f(x) = f^\star(Ax)$，$A \in SL(n)$。函数的随机单纯形体积不等式在某种意义下对研究函数几何化有着积极作用。

## 致　谢

在这里诚挚地感谢我的导师蔺友江教授，在写论文的过程中，得到了蔺老师很多指导和帮助。在此向蔺老师致以诚挚的谢意。

## 基金项目

国家自然科学基金(11971080)；重庆市教委基金项目(KJQN202000838)；重庆市自然科学基金项目(cstc2018jcyjAX0790, cstc2020jcyj-msxmX0328)；重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2022-112-72)。

## 参考文献

[1] Klee, V. (1969) What Is the Expected Volume of a Simplex Whose Vertices Are Chosen at Random from a Given Convex Body. *The American Mathematical Monthly*, **76**, 186-188. https://doi.org/10.2307/2316377

[2] Zhang, G. (2020) Convex Geometric Analysis. (Prepint)

[3] Lin, Y. (2017) Affine Orlicz Pólya-Szegö Principle for Log-Concave Functions. *Journal of Functional Analysis*, **273**, 3295-3326. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2017.08.017

[4] Lin, Y. and Leng, G. (2013) The Steiner Symmetrization of Log-Concave Functions and Its Applications. *Journal of Mathematical Inequalities*, **7**, 669-677. https://doi.org/10.7153/jmi-07-61

[5] Gruber, P.M. (2007) Convex and Discrete Geometry. Springer, Berlin.

[6] Ball, K.M. (1988) Logarithmically Concave Functions and Sections of Convex Sets in Rn. *Studia Mathematica*, **88**, 69-84. https://doi.org/10.4064/sm-88-1-69-84

[7] Burchard, A. (2009) A Short Course on Rearrangement Inequalities. http://www.math.utoronto.ca/almut/rearrange.pdf

[8] Fortier, M. (2010) Convergence Results for Rearrangements: Old and New. Thesis, University of Toronto, Toronto.

[9] Schneider, R. (2014) Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781139003858