Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2248-2259
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138231

非自治强阻尼波方程的时间依赖拉回吸引子

张 平

西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州

收稿日期：2023年6月27日；录用日期：2023年7月28日；发布日期：2023年8月7日

摘 要

利用压缩函数的方法，证明了非自治强阻尼波方程对应过程的渐近紧性，从而得到该系统的时间依赖拉回吸引子的存在性。

关键词

时间依赖拉回吸引子，非自治波方程，强阻尼

Time-Dependent Pullback Attractors of the Non-Autonomous Strongly-Damped Wave Equation

Ping Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: Jun. 27^{th}, 2023; accepted: Jul. 28^{th}, 2023; published: Aug. 7^{th}, 2023

Abstract

In this paper, we prove the asymptotic compactness of processes associated with the non-autonomous strongly-damped wave equation by using the method of contractive

文章引用: 张平. 非自治强阻尼波方程的时间依赖拉回吸引子[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2248-2259.
DOI: 10.12677/pm.2023.138231

function, then, existence of time-dependent pullback attractor of non-autonomous dynamical systems is obtained.

Keywords

Time-Dependent Pullback Attractors, Non-Autonomous Wave Equation, Strong Damping

1. 引言

本文研究下面的非自治波方程:

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt} - \triangle u_t + u_t - \triangle u + f(u) = h(x,t), & x \in \Omega,\ t > \tau, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \\ u(x,\tau) = u_0(x),\ \ u_t(x,\tau) = v_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N(N \geq 3)$ 是一个有界光滑区域, $\varepsilon = \varepsilon(t)$ 是关于 t 的函数. ε, 非线性项 f 和 h 分别满足:

(1) 函数 $\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ 单调递减并满足

$$\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = 0, \tag{1.2}$$

特别地, 存在常数$L > 0$, 使得

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}[|\varepsilon(t)| + |\varepsilon^{'}(t)|] \leq L. \tag{1.3}$$

(2) 非线性项 $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ 且满足以下条件:

$$|f^{'}(s)| \leq c(1 + |s|^{\frac{2}{N-2}}), \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq c|s_1 - s_2|[1 + |s_1|^{\frac{2}{N-2}} + |s_2|^{\frac{2}{N-2}}], \quad \forall s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$2F(u) \geq -(1-\mu)u^2 - c, \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.6}$$

$$2f(u)u \geq 2F(u) - (1-\mu)u^2 - c, \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{1.7}$$

其中$F(u)=\int_0^u f(s)ds, 0<\mu<1, c>0$是常数.

(3) 外力项 $h(x,\cdot)\in L^2_{loc}(\mathbb{R};L^2(\Omega))$ 且有

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\sigma s}\|h(s)\|^2_{L^2}ds<\infty, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

其中 $\sigma>0$, 将在后面的估计中确定.

波方程可以描述物理学中的波, 如声波, 光波和水波. 它起源于声学, 电磁学和流体力学等领城中. 单纯的波方程, 并不能更好地阐释一个物理现象, 所以通常会赋予初始条件, 边界条件等, 使其成为一个初值问题, 边值问题或者初-边值问题. 强阻尼波方程主要应用于模拟粘弹性材料的振动. 许多学者对强阻尼波方程进行了详细的研究, 见文献 [1–4]等. 当方程 (1.1) 中的 $\varepsilon(t)\equiv 1$, 弱阻尼项系数是关于空间变量 x 的函数时, 文献 [1]证明了该方程吸引子的存在性. 文献 [5]中, 作者根据前人的工作(见文献 [6–8]以及他们的参考文献), 得到了拉回吸引子的存在性定理并证明了方程 $u_{tt}+\eta u_t-\triangle u+f(u)=g(x,t)$ 拉回吸引子的存在性. 本文将在上述文章的启发下, 将利用文献 [9]中关于 $\mathfrak{D}-$ 渐近紧的概念来考虑非自治强阻尼波方程(1.1)的拉回吸引子, 并且根据文献 [5]中的压缩函数方法证明拉回 $\mathfrak{D}-$渐近紧.

本文余下内容安排如下. 第2节介绍预备知识. 第3节主要讨论方程 (1.1) 拉回吸引子的存在性.

2. 预备知识

记 $A=-\triangle$, 它是 $L^2(\Omega)$ 上正的, 自伴的且有紧逆的算子. 设 λ_1 是它的第一特征值. 记空间 $V=H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, 赋予范数

$$\| w \|_V=(\| u \|^2_{H_0^1(\Omega)}+\| \partial_t u \|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall w=(u,\partial_t u)\in V. \tag{2.1}$$

下面的 $Sobolev$ 嵌入成立,

$$H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall q\in[1,\frac{2N}{N-2}],$$

若这个嵌入是紧的当且仅当 $q\in[1,\frac{2N}{N-2})$.

定理 2.1. [8] 令 (θ,ϕ) 为 $Q\times X$ 上的非自治动力系统, 假设集合族 $\mathfrak{D}=\{D_q\}_{q\in Q}$ 为 ϕ 的拉回吸收集且 ϕ 是拉回 $\mathfrak{D}-$渐近紧的, 则 ϕ 拥有拉回吸引子 $\mathfrak{A}=\{A_q\}_{q\in Q}$ 且

$$A_q=\bigcap_{t\geq 0}\overline{\bigcap_{s\leq t}\phi(s,\theta_{-s(q)},D_{\theta_{-s(q)}})}, \quad q\in Q. \tag{2.2}$$

定理 2.2. [8] 令 (θ,ϕ) 为 $Q\times X$ 上的非自治动力系统, 假设集合族 $\mathfrak{D}=\{D_q\}_{q\in Q}$ 与 $\widetilde{\mathfrak{D}}=\{\widetilde{D}_q\}_{q\in Q}$ 满足对任意的 $q\in Q$, 存在一个 $t_q=t(q,\mathfrak{D},\widetilde{\mathfrak{D}})\geq 0$, 使得

$$\phi(t,\theta_{-t(q)},D_{\theta_{-t(q)}})\subset\widetilde{D}_q, \quad \forall t\geq t_q, \tag{2.3}$$

假设对任意的 $\epsilon>0$, $q\in Q$, 并且存在一个 $t=t(\epsilon,\widetilde{\mathfrak{D}},q)\geq 0$ 与定义在 $\widetilde{D}_{-\theta_{t(q)}}\times\widetilde{D}_{\theta_{-t(q)}}$ 上的压缩函

数 $\Phi_{t,q}(\cdot,\cdot)$, 使得对任意的 $x,y\in \widetilde{D}_{\theta_{-t(q)}}$, 有

$$\|\phi(t,\theta_{-t(q)},x)-\phi(t,\theta_{-t(q)},y)\|_X\leq \epsilon+\Phi_{t,q}(x,y). \tag{2.4}$$

则 ϕ 在 X 上是拉回 $\mathfrak{D}$−渐近紧的.

3. 拉回吸引子的存在性

对于问题 (1.1) 解 u 的存在性, 可通过标准的 *Galerkin* 方法得到, 证明从略.

定理 3.1. 假设条件 (1.2) − (1.8) 成立, 则在区间 $[\tau,t], t\geq\tau$ 上, 对任意初值 $u_0\in H_0^1, u_1\in L^2$, 问题 (1.1) 存在唯一的弱解 $u\in C([\tau,t);H_0^1(\Omega)), u_t\in C^1([\tau,t);L^2(\Omega))$.

为了书写方便, 记 $y(t)=(u(t),u_t(t))=(u(t),v(t)), y_0=(u_0,v_0)$. 由问题 (1.1), 可以在空间 V 中构造非自治动力系统, 令 $Q=\mathbb{R},\theta_\tau t=\tau+t,\forall t\in\mathbb{R}$, 并且定义

$$\phi(t+s,\tau,y_0)=y(t+\tau;\tau,y_0)=\big(u(t+\tau),v(t+\tau)\big),\quad \tau\in\mathbb{R},\ t\geq 0,\ y_0\in V, \tag{3.1}$$

由问题 (1.1) 的解的存在唯一性, 可知

$$\phi(t+s,\tau,y_0)=\phi(t,s+\tau,\phi(s,\tau,y_0)),\qquad \tau\in\mathbb{R},\ t,s\geq 0,\ y_0\in V.$$

对任意 $\tau\in\mathbb{R},t\geq 0$, (3.1) 定义的映射 $\phi(t,\tau,\cdot):V\to V$ 是连续的 [8]. 因此, (3.1) 定义的映射 ϕ在 V 上是一个连续共圈.

定理 3.2 假设条件 (1.2) − (1.8) 成立, 则问题 (1.1) 关于 θ 的共圈 ϕ 在 V 中存在拉回吸收集 $\mathfrak{D}=\{D_q\}_{q\in Q}$ 和满足 (2.3) 的有界集族 $\widetilde{\mathfrak{D}}=\{\widetilde{D}_q\}_{q\in Q}$.

证明 将方程 (1.1) 与 $q=u_t+\delta u$ 在 L^2 上做内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\varepsilon(t)\|q\|^2+\|\nabla u\|^2\big)+2\delta(\nabla u_t,\nabla u)-\varepsilon^{'}(t)\|q\|^2+2(1-\delta\varepsilon(t))\|q\|^2-2\delta(1-\delta\varepsilon(t))(u,q)\\&+2\|\nabla q\|_2+2\delta(1-\delta)\|\nabla u\|^2+2(f(u),q)=2(h,q),\end{aligned} \tag{3.2}$$

令 $0<\delta<\min\{\frac{1}{2L},\frac{\lambda_1}{2\lambda_1L-4}\}$, 并由 *Höder, Young*与*Poincaré* 不等式, 可知

$$\begin{aligned}&2\delta(\nabla u_t,\nabla u)-\varepsilon^{'}(t)\|q\|^2+2(1-\delta\varepsilon(t))\|q\|^2-2\delta(1-\delta\varepsilon(t))(u,q)\\&\quad+2\|\nabla q\|_2+2\delta(1-\delta)\|\nabla u\|^2-2(h,q)\\&=2\delta(\nabla u_t,\nabla u)-\varepsilon^{'}(t)\|q\|^2+2(1-\delta\varepsilon(t))\|q\|^2-2\delta(1-\delta\varepsilon(t))(u,q)\\&\quad+2\|\nabla u_t\|^2+4\delta(\nabla u,\nabla u_t)+2\delta^2\|\nabla u\|^2+2\delta(1-\delta)\|\nabla u\|^2-2(h,q)\\&\geq 2(1-\delta\varepsilon(t))\|q\|^2-2\delta(u,q)+2\delta\|\nabla u\|^2-2(h,q)\\&\geq(2-2\delta\varepsilon(t))\|q\|^2+\frac{3\delta}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{2\delta}{\lambda_1}\|q\|^2\\&\geq(\frac{1}{2}-2\delta\varepsilon(t)-\frac{2\delta}{\lambda_1})\|q\|^2+\frac{3}{2}\delta\|\nabla u\|^2-\|h\|^2+\frac{1}{2}\|q\|^2\\&\geq\delta\varepsilon(t)\|q\|^2+\frac{3}{2}\delta\|\nabla u\|^2-\|h\|^2+\frac{1}{2}\|q\|^2,\end{aligned} \tag{3.3}$$

再结合 (1.7), 有

$$\begin{aligned}2(f(u),q)&=2(f(u),u_t)+2\delta(f(u),u)\\&\geq 2\frac{d}{dt}(F(u),1)+2\delta(F(u),1)-\delta(1-\mu)\|\nabla u\|^2-\delta c,\end{aligned}\tag{3.4}$$

结合 (3.2), (3.3)和(3.4), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2+2(F(u),1)\big)+\sigma\big(\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2+2(F(u),1)+\frac{1}{2}\|q\|^2\big)\\&\leq\|h\|^2+\delta c,\end{aligned}\tag{3.5}$$

记

$$E(t)=\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2+2(F(u),1)+c,\tag{3.6}$$

根据条件 (1.2) – (1.7) 并且由 *Poincaré* 不等式和嵌入定理, 可得

$$E(t)\geq\mu\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2\geq\mu(\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2)\geq\mu(\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2),\tag{3.7}$$

且

$$\begin{aligned}E(t)&\leq\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|q\|^2+2\int_\Omega(1+|u|^{\frac{N}{N-2}})udx+c\\&\leq(1+\frac{2\delta^2L}{\lambda_1})\|\nabla u\|^2+2\varepsilon(t)\|u_t\|^2+C\|\nabla u\|^{\frac{2N-2}{N-2}}+C\\&\leq\mu_1(\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^{\frac{2N-2}{N-2}})+C,\end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $\mu_1=\max\{1+\frac{2\delta^2L}{\lambda_1},2,C\}$, 则 (3.4) 可记为

$$\frac{d}{dt}E(t)+\sigma E(t)+\frac{1}{2}\|q\|^2\leq\|h\|^2+\delta c,$$

由上式可得

$$\frac{d}{dt}(e^{\sigma t}E(t))+\frac{1}{2}e^{\sigma t}\|q\|^2\leq e^{\sigma t}\|h\|^2+2\delta ce^{\sigma t},$$

对上式从 $t-\tau$ 到 t 上积分, 有

$$\begin{aligned}&e^{\sigma t}E(t)+\frac{1}{2}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|q\|^2ds\\&\leq e^{\sigma(t-\tau)}E(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|h(s)\|^2ds+\frac{2\delta c}{\sigma}(e^{\sigma t}-e^{\sigma(t-\tau)}),\end{aligned}\tag{3.9}$$

合并 (3.7), (3.8)和(3.9) , 有

$$\begin{aligned}&\|\nabla u\|^2+\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\frac{1}{2\mu}e^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|q\|^2ds\\ \leq &C_1(\|\nabla u_0\|^2+\varepsilon(t-\tau)\|u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^{\frac{2N-2}{N-2}})\\ &+C_2e^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|h(s)\|^2ds+C_3(1-e^{-\sigma\tau})+C,\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中 $C_1=\frac{\mu_1}{\mu},C_2=\frac{1}{\mu},C_3=\frac{2\delta c}{\mu\sigma}$.

因此, 对 $\forall y_0\in D_{t-\tau},t\in\mathbb{R}$和$\tau>0$, 有

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau,t-\tau,y_0)\|_V^2\leq &C_1(\|\nabla u_0\|^2+\varepsilon(t-\tau)\|u_1\|^2+\|\nabla u_0\|^{\frac{2N-2}{N-2}})\\ &+C_2e^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|h(s)\|^2ds+C.\end{aligned}\tag{3.11}$$

设

$$\mathcal{R}_t^2=2C_2e^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|h(s)\|^2ds+2C<\infty,\tag{3.12}$$

结合 (1.8) 可知, 问题 (1.1) 关于 θ 的共圈 ϕ 在 V 中存在拉回吸收集

$$D_t=\{y\in V:\|y\|_V^2\leq\mathcal{R}_t\}.\tag{3.13}$$

由 (3.11) 可知, 集合族 $\mathfrak{D}=\{D_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 为 V 中的拉回吸收有界集族.

选取 $\widetilde{\sigma}$,使得

$$\frac{\sigma(N-1)}{N-2}<\widetilde{\sigma}<\sigma,\tag{3.14}$$

则 (3.11) 对 $\widetilde{\sigma}$ 仍成立.

令 $y_0\in D_{t-\tau}$, 则有

$$\|\phi(\tau,t-\tau,y_0)\|_V^2\leq C_1e^{-\widetilde{\sigma}\tau}(\mathcal{R}_{t-\tau}^2+\mathcal{R}_{t-\tau}^{\frac{2N-2}{N-2}})+C_2e^{-\sigma t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\sigma s}\|h(s)\|^2ds+C.\tag{3.15}$$

由 (3.12)和(3.14) 可知

$$\lim_{\tau\to\infty}e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\mathcal{R}_{t-\tau}^2=0,\ \lim_{\tau\to\infty}e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\mathcal{R}_{t-\tau}^{\frac{2N-2}{N-2}}=0,\tag{3.16}$$

结合 (3.14)和(3.15) , 令

$$\widetilde{\mathcal{R}}_t^2=2C_2e^{-\widetilde{\sigma}t}\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}s}\|h(s)\|^2ds+2C,\tag{3.17}$$

与

$$\widetilde{D}_t=\{y\in V:\|y\|_V^2\leq\widetilde{\mathcal{R}}_t\}.\tag{3.18}$$

则集合族 $\widetilde{\mathfrak{D}}=\{\widetilde{D}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足 (2.3), 定理得证.

定理 3.3 假设条件 (1.2) – (1.8) 成立, 则由 (3.1) 定义的非自治动力系统 (θ,ϕ) 在 V 中存在唯一的时间依赖拉回吸引子 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

证明 对任意 $t\in\mathbb{R}$, 令 $y_i=(u_i(t),u_{i_t}(t))(i=1,2)$ 是 (1.1) 关于初值 $y_0^i=(u_0^i,v_0^i)\in\widetilde{D}_{t-\tau}\times\widetilde{D}_{t-\tau}$ 的解, 其中 $\tau>0$, 令 $w(t)=u_1(t)-u_2(t)$, 则 w 关于初始条件 $(w(\tau),w_t(\tau))=(u_0^1,v_0^1)-(u_0^2,v_0^2)$ 满足

$$\varepsilon(t)w_{tt}-\triangle w_t+w_t-\triangle w=f(u_2)-f(u_1). \tag{3.19}$$

令

$$E_w(t)=\frac{1}{2}(\|\nabla w\|^2+\varepsilon(t)\|w_t\|^2).$$

将 (3.19) 与 $e^{\widetilde{\sigma}t}w_t$ 在 L^2 中做内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t))-\frac{1}{2}e^{\widetilde{\sigma}t}\varepsilon^{'}(t)\|w_t\|^2+e^{\widetilde{\sigma}t}\|\nabla w_t\|^2+e^{\widetilde{\sigma}t}\|w_t\|^2\\=&\widetilde{\sigma}e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)+e^{\widetilde{\sigma}t}(f(u_2)-f(u_1),w_t),\end{aligned} \tag{3.20}$$

对 (3.20) 在 $[s,t]$ 上积分, 且由 $\varepsilon(t)$ 的单调递减性, 有

$$\begin{aligned}&e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)-e^{\widetilde{\sigma}s}E_w(s)+\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi\\\leq&\widetilde{\sigma}\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}E_w(\xi)d\xi+\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi,\end{aligned} \tag{3.21}$$

再对 (3.21) 关于 s 在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\tau e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)-\int_{t-\tau}^t e^{\widetilde{\sigma}s}E_w(s)ds+\int_{t-\tau}^t\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi ds\\\leq&\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau}^t\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}E_w(\xi)d\xi ds+\int_{t-\tau}^t\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi ds,\end{aligned} \tag{3.22}$$

类似地, 将 (3.19) 与 $e^{\widetilde{\sigma}t}w$ 在 L^2 中做内积, 可得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w))+e^{\widetilde{\sigma}t}(\nabla w_t,\nabla w)+e^{\widetilde{\sigma}t}\|\nabla w\|^2\\=&(\varepsilon^{'}(t)-1)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)+\widetilde{\sigma}\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)-\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}\|w_t\|^2+e^{\widetilde{\sigma}t}(f(u_2)-f(u_1),w),\end{aligned} \tag{3.23}$$

对 (3.23) 在 $[s,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)-\varepsilon(s)e^{\widetilde{\sigma}s}(w_t,w)+\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|\nabla w\|^2d\xi\\\leq&\widetilde{\sigma}\int_s^t\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi-\int_s^t\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi+\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi,\end{aligned} \tag{3.24}$$

再对 (3.24) 关于 s 在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\tau\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)-\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(s)e^{\widetilde{\sigma}s}(w_t,w)ds+\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|\nabla w\|^2d\xi ds\\ \leq&\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi ds-\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi ds\\ &+\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds,\end{aligned}\tag{3.25}$$

将 (3.25) 代入 (3.22), 有

$$\begin{aligned}&\tau e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)-\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}s}E_w(s)ds+\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi ds\\ \leq&\frac{\widetilde{\sigma}}{2}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(s)e^{\widetilde{\sigma}s}(w_t,w)ds-\frac{\widetilde{\sigma}\tau}{2}\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)\\ &+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi ds+\frac{\widetilde{\sigma}}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds\\ &+\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi ds,\end{aligned}\tag{3.26}$$

对 (3.23) 在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)-\varepsilon(t-\tau)e^{\widetilde{\sigma}(t-\tau)}(w_{t,w})+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|\nabla w\|^2d\xi\\ \leq&\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi-\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi,\end{aligned}\tag{3.27}$$

将 (3.27) 代入 (3.26), 有

$$\begin{aligned}&\tau e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}s}E_w(s)ds\\ \leq&\varepsilon(t-\tau)e^{\widetilde{\sigma}(t-\tau)}(w_t,w)-(1+\frac{\widetilde{\sigma}\tau}{2})\varepsilon(t)e^{\widetilde{\sigma}t}(w_t,w)\\ &+\frac{3\widetilde{\sigma}}{2}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)ds\\ &+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}\xi}(w_t,w)d\xi ds+\frac{\widetilde{\sigma}}{2}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds\\ &+\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi ds.\end{aligned}\tag{3.28}$$

另一方面, 对 (3.20) 在 $[t-\tau,t]$ 上积分, 有

$$\begin{aligned}&e^{\widetilde{\sigma}t}E_w(t)-e^{\widetilde{\sigma}(t-\tau)}E_w(t-\tau)+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w_t\|^2d\xi\\ \leq&\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}E_w(\xi)d\xi+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}s}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi,\end{aligned}\tag{3.29}$$

将 (3.28) 和 (3.29) 合并, 得

$$\begin{aligned}
&E_w(t)\\
\leq&\frac{1}{\widetilde{\sigma}\tau}e^{-\widetilde{\sigma}\tau}E_w(t-\tau)-\frac{1}{\widetilde{\sigma}\tau}E_w(t)+\frac{1}{\widetilde{\sigma}\tau}\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi\\
&+\frac{1}{\tau}\varepsilon(t-\tau)e^{\widetilde{\sigma}\tau}(w_t(t-\tau),w(t-\tau))-(\frac{1}{\tau}+\frac{\widetilde{\sigma}}{2})\varepsilon(t)(w_t(t),w(t))\\
&+\frac{3\widetilde{\sigma}}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(w_t,w)d\xi+\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi\\
&+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(w_t,w)d\xi ds+\frac{\widetilde{\sigma}}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds\\
&+\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi ds.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

下面估计 (3.30) 的右边某些项, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{3\widetilde{\sigma}}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(w_t,w)d\xi\\
\leq&\frac{3\widetilde{\sigma}}{4\tau}(\varepsilon(t)\|w\|^2-e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\varepsilon(t-\tau)\|w\|^2-\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon^{'}(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi\\
&-\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi)\\
\leq&\frac{3\widetilde{\sigma}}{4\tau}L(\|w\|^2+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(w_t,w)d\xi ds\\
\leq&\frac{\widetilde{\sigma}^2}{4\tau}(\tau\varepsilon(t)\|w(t)\|^2-\int_{t-\tau}^{t}\varepsilon(\xi)e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi\\
&+\tau L\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi-\widetilde{\sigma}\tau\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|w\|^2d\xi)\\
\leq&\frac{\widetilde{\sigma}^2}{4}L(\|w(t)\|^2+\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi),
\end{aligned}$$

类似于文献 [8], 通过 (1.5), $H\ddot{o}lder$ 不等式以及嵌入定理, 有

$$\begin{aligned}
&\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds\\
\leq&C_\tau\big(1+(\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(\|\nabla u_2\|^2+\|\nabla u_1\|^2)d\xi)^{\frac{N}{N-2}}\big)^{\frac{1}{2}}(\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2d\xi)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}\tag{3.31}$$

根据解的有界性, 可推出对所有的 $(u_0,v_0)\in\widetilde{D}_{t-\tau}\times\widetilde{D}_{t-\tau}$,

$$(\int_{t-\tau}^{t}e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|\nabla u\|^2d\xi)^{\frac{N}{N-2}}\leq C_{t,\tau}<\infty,\tag{3.32}$$

根据 (3.31)和(3.32), 有

$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w)d\xi ds \le \tau \widetilde{C}_{t,\tau}(\int_{t-\tau}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2 d\xi)\frac{1}{2} < \infty.$$

定义

$$\begin{aligned}
&\Phi_{t,\tau}((u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2))\\
=&\widetilde{C}_{t,\tau}(\frac{1}{\tau}+\frac{\widetilde{\sigma}}{2})(\int_{t-\tau}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2 d\xi)\frac{1}{2}+(\frac{3\widetilde{\sigma}}{4\tau}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2})L\|w(t)\|^2\\
&+(\frac{3\widetilde{\sigma}}{4\tau}+\frac{\widetilde{\sigma}^2}{2})L\int_{t-\tau}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\|w\|^2 d\xi-(\frac{1}{2}+\frac{\widetilde{\sigma}}{2})\varepsilon(t)(w_t(t),w(t))\\
&+\frac{1}{\widetilde{\sigma}\tau}\int_{t-\tau}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi\\
&+\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\int_{s}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}(f(u_2)-f(u_1),w_t)d\xi ds.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

结合 (3.30)和(3.33), 有

$$E_w(t) \le C\tau^{-1}e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\widetilde{\mathcal{R}}_{t-\tau}^2+\Phi_{t,\tau}((u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2)),$$

因为 $\lim_{\tau\to\infty} e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\mathcal{R}_{t-\tau}^2=0$, 所以对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\tau_0=\tau_0(\epsilon,\widetilde{\mathfrak{D}},t)\ge 0$, 使得对任意的 $(u_0^i,v_0^i)\in \widetilde{D}_{t-\tau_0}\times\widetilde{D}_{t-\tau_0}$, 有

$$E_w(t)\le \epsilon+\Phi_{t,\tau}((u_0^1,v_0^1),(u_0^2,v_0^2)).$$

由定理2.1和2.2, 为证明 V 中的时间依赖拉回吸引子存在, 只需证由 (3.33) 定义的 $\Phi_{t,\tau_0}(\cdot,\cdot)$ 为 $\widetilde{D}_{t-\tau_0}\times\widetilde{D}_{t-\tau_0}$ 的压缩函数. 因此, 令 $(u_n(t),u_{n_t}(t))$ 为对应初值 $(u_0^i,v_0^i)\in\widetilde{D}_{t-\tau_0}\times\widetilde{D}_{t-\tau_0}$ 的解. 由于 $\widetilde{D}_{t-\tau_0}$ 为 V 中的有界子集且根据 (3.9), 可知对任意的 $s\in[t-\tau_0,t]$ 有

$$\|(u_n(t),u_{n_t}(t))\|_V \le C_{t,\tau_0}^{'} < \infty. \tag{3.34}$$

不失一般性, 可知

$$u_n \to u \ \text{弱*收敛于} L^\infty(t-\tau_0,t;L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)), \tag{3.35}$$

$$u_{n_t} \to u_t \ \text{弱*收敛于} L^\infty(t-\tau_0,t;L^2(\Omega)), \tag{3.36}$$

$$u_n \to u \ \text{强收敛于} L^2(t-\tau_0,t;L^2(\Omega)), \tag{3.37}$$

$$\text{在} L^2(\Omega)\text{和} L^{\frac{2N-2}{N-2}}(\Omega),\ u_n(t-\tau_0)\to u(t-\tau_0)\text{且} u_n(t)\to u(t), \tag{3.38}$$

现在, 处理 (3.33) 中的每一项,

首先, 由于 (3.37)和(3.38), 可知

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}\xi}\|u_n(\xi)-u_m(\xi)\|^2 d\xi=0, \tag{3.39}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_\Omega (u_{n_t}(t)-u_{m_t}(t))(u_n(t)-u_m(t))dx=0, \tag{3.40}$$

其次, 类似于文献 [8]中定理3.3的证明, 结合 (3.35)和(3.36), 有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega (u_{n_\xi}(t)-u_{m_t}(\xi))(f(u_{n_\xi})-f(u_{m_\xi}))dxd\xi\\
=&\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Big[\int_\Omega F(u_n(t))dx-e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\int_\Omega F(u_n(t-\tau))dx-\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega F(u_n(\xi))dxd\xi\\
&-\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega u_{n_t}(\xi)f(u_m(\xi))dxd\xi-\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega u_{m_t}(\xi)f(u_n(\xi))dxd\xi\\
&+\int_\Omega F(u_m(t))dx-e^{-\widetilde{\sigma}\tau}\int_\Omega F(u_m(t-\tau))dx-\widetilde{\sigma}\int_{t-\tau_0}^{t} e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega F(u_m(\xi))dxd\xi\Big]\\
=&0,
\end{aligned} \tag{3.41}$$

同样的, 有

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\int_{t-\tau_0}^{t}\int_s^t e^{\widetilde{\sigma}(\xi-t)}\int_\Omega (u_{n_t(\xi)-u_{m_t}(\xi)})(f(u_n(\xi))-f(u_m(\xi)))dxd\xi ds=0. \tag{3.42}$$

合并 (3.39) – (3.42), 可知 $\phi_{t,\tau_0}(\cdot,\cdot)$ 是 $\widetilde{D}_{t-\tau_0}\times\widetilde{D}_{t-\tau_0}$ 的压缩函数. 定理得证.

基金项目

国家自然科学基金(11961059)。

参考文献

[1] Belleri, V. and Pata, V. (2001) Attractors for Semilinear Strongly Damped Wave Equation on R^3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **7**, 719-735. https://doi.org/10.3934/dcds.2001.7.719

[2] Li, H. and Zhou, S. (2008) On Non-Autonomous Strongly Damped Wave Equations with a Uniform Attractor and Some Averaging. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 791-802. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.10.051

[3] Kalantarov, V. and Zelik, S. (2009) Finite-Dimensional Attractors for the Quasi-Linear Strongly-Damped Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **247**, 1120-1155. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.04.010

[4] Caraballo, T., Carvalho, A.N., Langa, J.A. and Rivero, F. (2011) A Non-Autonomous Strongly Damped Wave Equation: Existence and Continuity of the Pullback Attractor. *Nonlinear Analysis*, **74**, 2272-2283. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.11.032

[5] Wang, Y. (2008) Pullback Attractors for Nonautonomous Wave Equations with Critical Exponent. *Nonlinear Analysis*, **68**, 365-376. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.002

[6] Crauel, H. and Flandoli, F. (1994) Attractors for Random Dynamical Systems. *Probability Theory and Related Fields*, **100**, 307-341. https://doi.org/10.1007/BF01193705

[7] Kloeden, P.E. and Schmalfuß, B. (1998) Asymptotic Behaviour of Nonautonomous Difference Inclusions. *Systems and Control Letters*, **33**, 275-280. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(97)00107-2

[8] Schmalfuß, B. (2000) Attractors for Non-Autonomous Dynamical Systems. In: Fiedler, B., Gröger, K. and Sprekels, J., Eds., *Equadiff 99*, World Scientific, Singapore, 684-689. https://doi.org/10.1142/9789812792617_0136

[9] Caraballo, T., Łukaszewicz, G. and Real, J. (2006) Pullback Attractors for Asymptotically Compact Nonautonomous Dynamical Systems. *Nonlinear Analysis*, **64**, 484-498. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.03.111