

# 基于有限时间的移动机器人轨迹跟踪控制方法

刘志民

上海出版印刷高等专科学校基础教学部, 上海

收稿日期: 2023年6月27日; 录用日期: 2023年7月28日; 发布日期: 2023年8月7日

## 摘要

本文提出了一种新的移动机器人轨迹跟踪控制方法。为了精确跟踪预定轨迹, 采用有限时间控制策略将移动机器人的误差动力学分为两个子系统。首先, 为一阶系统设计了角速度的全局有限时间控制律, 以稳定移动机器人的角度误差。然后, 设计了有限时间前向速度滑模控制律, 所设计的控制系统具有全局稳定性。此外, 利用李雅普诺夫控制理论分析了整个闭环系统的全局一致稳定性。最后, 将所提出的控制算法应用于移动机器人, 仿真结果表明了良好的收敛性和性能。

## 关键词

有限时间, 移动机器人, 轨迹跟踪

# Trajectory Tracking Control Method of Mobile Robot Based on Finite Time

Zhimin Liu

Basic Teaching Department, Shanghai Publishing and Printing College, Shanghai

Received: Jun. 27<sup>th</sup>, 2023; accepted: Jul. 28<sup>th</sup>, 2023; published: Aug. 7<sup>th</sup>, 2023

## Abstract

This paper presents a new method of trajectory tracking control for mobile robots. In order to accurately track the predetermined trajectory, the finite time control strategy is used to divide the error dynamics of the mobile robot into two subsystems. Firstly, a global finite-time control law of angular velocity is designed for the first-order system to stabilize the angular error of the mobile robot. Then, a finite time forward velocity sliding mode control law is designed, and the designed control system has global stability. In addition, the global uniform stability of the whole closed-loop

system is analyzed by using Lyapunov control theory. Finally, the proposed control algorithm is applied to the mobile robot, and the simulation results show good convergence and performance.

## Keywords

Finite-Time, Mobile Robot, Trajectory Tracking

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在过去的二十年中, 移动机器人已广泛应用于各种工业过程。移动机器人的关键挑战之一是控制系统, 它被称为一类典型的非完整系统[1] [2]。移动机器人控制系统设计中的一个重要方向是轨迹跟踪。移动机器人是一个耦合的非线性系统, 它不能满足 Brockett 的必要条件[2], 使传统的设计方法难以达到控制目标。近年来, 非完整移动机器人的跟踪控制问题越来越受到关注。Wang Yaonan 等人[3]通过使用相应误差模型的泰勒线性化提出了跟踪控制律。为扩展在笛卡尔空间中的轨迹跟踪问题, Urakubo T 等[4]提出了平滑控制律, 该控制律在任何初始条件下都可实现指数稳定性, 从而可提高算法的收敛速度。Morin P 等人利用链式结构提出了一种时变反馈控制方法[5]。为了进一步研究跟踪问题, 科研工作者已经做了大量的研究工作。滑动模式控制策略提出了滑模面的控制方法[6], 文[7]中考虑了具有有界干扰情况下的滑模控制问题。文[8] [9]中引入了平滑时变反馈控制律, 保证了控制系统的全局指数收敛。通过将级联设计和反推方法相结合, [10]中设计了一种跟踪控制器。考虑了输入转矩饱和和外部干扰的情况, 这是一种新的自适应控制方案。

这些控制方法的广泛应用促进了跟踪控制的发展。但上述大多数文献所用方法只考虑了渐近稳定性, 这意味着它们在无限时间内才能实现了收敛。此外, 渐近稳定性可能不会产生高精度的快速收敛性能。事实上, 对于实际的移动机器人来说, 在有限的时间达到目标更为理想。

有限时间跟踪控制方法[11]是一种快速控制技术, 可在有限时间内使控制量收敛。[12]中给出了非完整系统的全局有限时间跟踪控制器。J. Wang, Y. Shou, X. Liu 等人[13] [14] [15]证明了基于有限时间 Lyapunov 稳定性的全局有限时间镇定定理。文[16]中, 有限时间控制技术用于飞行姿态控制。然而, 迄今为止, 移动机器人的有限时间跟踪控制问题研究还不够深入[17] [18] [19] [20]。为了克服这些困难, 在本文中, 我们采用有限时间控制策略将移动机器人的误差动力学分为两个子系统。首先, 为一阶系统设计角速度的全局有限时间控制律, 以稳定移动机器人的角度误差。然后, 设计了有限时间前向速度滑模控制律, 所设计的控制系统具有全局稳定性。通过结合有限时间控制技术和滑动模式与滑模控制方法相比, 我们提高了滑模控制方法收敛速度的有效性。

## 2. 问题描述

本文所考虑的移动机器人由三个轮子组成。移动机器人前部的两个驱动轮由两个独立的电机驱动。另一个轮子是移动机器人后部的从动轮(见图 1)。设  $D$  和  $r$  分别表示轮轴的长度和驱动轮的半径。速度  $V_L$  和  $V_R$  分别表示左轮和右轮的速度。控制变量  $v$  和  $\omega$  表示正向移动机器人的速度和角速度, 其可以描述为

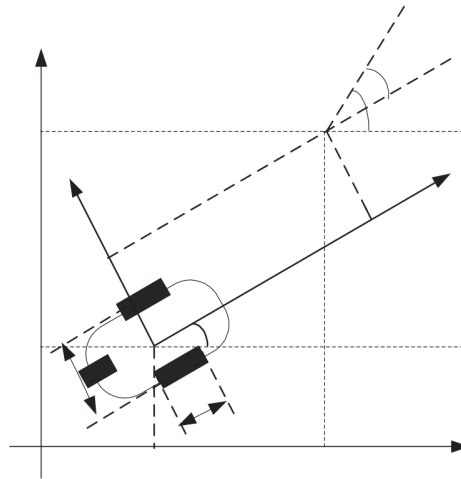


Figure 1. Schematic diagram of mobile robot tracking  
图 1. 移动机器人跟踪示意图

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{D} & \frac{1}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_L \\ v_R \end{pmatrix} \quad (1)$$

移动机器人在 X-Y 平面上的运动学模型如下所示:

$$\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u \quad (2)$$

其中  $q = [x, y, \theta]^T$  表示移动机器人质量中心的姿态坐标。 $(x, y)$  定义为笛卡尔坐标,  $\theta$  是航向方向和  $x$  轴之间的方位角。控制输入  $u$  为

$$u = [v, \omega]^T$$

假设不存在滑移效应, 移动机器人的运动学模型满足非完整约束。对于上述假设下的移动机器人, 非完整约束方程可以表示为

$$\dot{x} \sin \theta = \dot{y} \cos \theta$$

跟踪控制问题的目的是设计前向速度  $v$  和角速度  $w$  的规律, 使得移动机器人跟踪参考轨迹。在图 1 中, 状态向量  $q_d = [x_d, y_d, \theta_e]^T$  表示参考姿势, 并且状态向量  $q = [x, y, \theta]^T$  表示实际姿势。状态向量  $q_e = [x_e, y_e, \theta_e]^T$  定义为姿态误差

根据几何关系, 有效的全局坐标变换描述如下

$$q_e = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

通过取方程(3)的导数, 可以获得系统的误差动态:

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= y_e \omega - v + v_d \cos \theta_e \\ \dot{y}_e &= -x_e \omega + v_d \sin \theta_e \\ \dot{\theta}_e &= \omega_d - \omega \end{aligned} \quad (4)$$

在本文中，移动机器人的轨迹跟踪问题是设计一种时变状态反馈律的形式

$$\omega = \omega(t, x_e, y_e, \theta_e), v = v(t, x_e, y_e, \theta_e)$$

使得三个状态误差  $x_e, y_e$  和  $\theta_e$  在有限时间内收敛到零。

### 3. 跟踪控制策略设计

**定理：**考虑系统(4)，存在控制律(5)，使得系统(4)是全局一致稳定的。

$$\begin{cases} \omega = \omega_d + \theta_e + \beta_1 \theta_e^{m_1/n_1} \\ v = v_d + \omega_d y_e + k_0 \omega_d x_e \text{sign}(\omega_d) + \alpha s + \beta_2 s^{m_2/n_2} \end{cases} \quad (5)$$

取李雅普诺夫函数

$$V = \frac{1}{2} x_e^2 + \frac{1}{2} y_e^2$$

然后我们沿着子系统(30)和(31)计算(42)的时间导数，我们得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{x}_e x_e + \dot{y}_e y_e \\ &= (\omega_d y_e - v + v_d) x_e - \omega_d x_e y_e \\ &= -k_0 \omega_d x_e \text{sign}(\omega_d) x_e - \omega_d x_e y_e \\ &= -k_0 x_e^2 \omega_d \text{sign}(\omega_d) - k_0 y_e^2 \omega_d \text{sign}(\omega_d) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

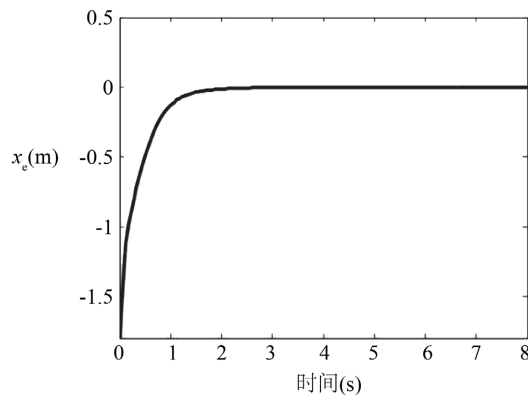
故该系统为全局渐近稳定。

### 4. 仿真

为了证明所提出的控制律的有效性，我们用(4)所描述的运动微分误差模型，进行了仿真，以  $v_d(t)=1, \omega_d(t)=1$  为期望速度，期望位置如下

$$\begin{cases} x_d(t) = 1.5 \sin(t/5) \\ y_d(t) = 1.5 \cos(t/5) \\ \theta_d(t) = \omega_d t = t \end{cases}$$

仿真结果如图 2~6 所示。



**Figure 2.** Lateral error versus time  
**图 2.** 横向误差随时间变化

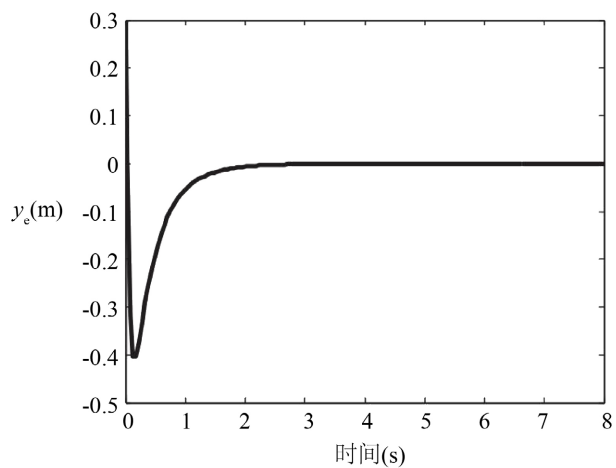


Figure 3. Longitudinal error over time  
图 3. 纵向误差随时间变化

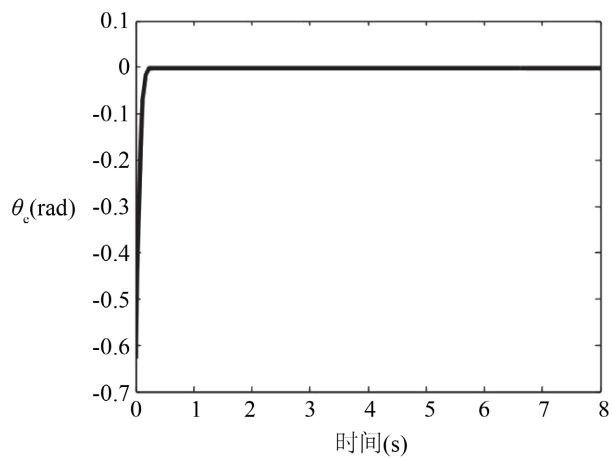


Figure 4. Angle error versus time  
图 4. 角度误差随时间变化

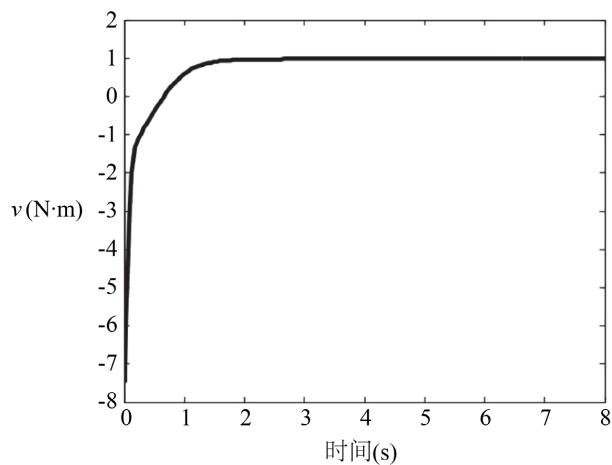
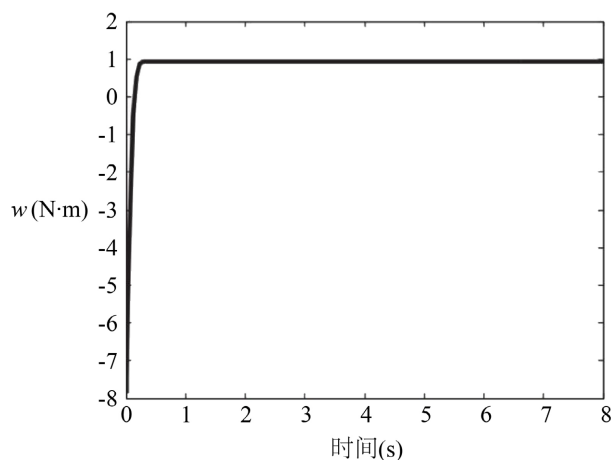


Figure 5. Control input versus time  
图 5. 控制输入  $v$  随时间变化



**Figure 6.** Control input versus time  
**图 6.** 控制输入  $w$  随时间变化

## 5. 结论

在本研究中，提出了一种新的控制方法来实现非完整移动机器人的轨迹跟踪控制机器人。采用级联设计将移动机器人的误差模型分为两个子系统。对于一阶为了稳定角误差，本文开发了一种有限时间控制律。放宽严格限制针对移动机器人所需的角速度，采用有限时间滑模控制设计了机器人的控制律二阶子系统的前向速度，这提高了收敛速度并克服了滑模控制系统。分析了所开发控制方法的稳定性，并给出了一些充分条件：鉴于最后，仿真结果验证了该控制方法的可行性。与一般的有限时间控制方法相比，所提出的控制方法可以获得更快的收敛速度。

## 参考文献

- [1] Tayebi, A., Tadjine, M. and Rachid, A. (2001) Invariant Manifold Approach for the Stabilization of Nonholonomic Chained Systems: Application to a Mobile Robot. *Nonlinear Dynamics*, **24**, 167-181.
- [2] Sankaranarayanan, V. and Mahindrakar, A.D. (2009) Switched Control of a Nonholonomic Mobile Robot. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 2319-2327. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2008.06.002>
- [3] Wang, Y., Miao, Z., Zhong, H. and Pan, Q. (2015) Simultaneous Stabilization and Tracking of Nonholonomic Mobile Robots: A Lyapunov-Based Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **23**, 1440-1450. <https://doi.org/10.1109/TCST.2014.2375812>
- [4] Urakubo, T. (2015) Feedback Stabilization of a Nonholonomic System with Potential Fields Application to a Two-Wheeled Mobile Robot among Obstacles. *Nonlinear Dynamics*, **81**, 1475-1487. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2082-5>
- [5] Morin, P. and Samson, C. (2001) A Characterization of the Lie Algebra Rank Condition by Transverse Periodic Functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **40**, 1227-1249. <https://doi.org/10.1137/S0363012900366054>
- [6] Fierro, R. and Lewis, F.L. (1997) Control of a Nonholonomic Mobile Robot: Backstepping Kinematics into Dynamics. *Robotic System*, **14**, 149-163. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-4563\(199703\)14:3<149::AID-ROB1>3.0.CO;2-R](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-4563(199703)14:3<149::AID-ROB1>3.0.CO;2-R)
- [7] Tanner, H.G. and Kyriakopoulos, K.J. (2002) Discontinuous Backstepping for Stabilization of Nonholonomic Mobile Robots. *Proceedings of 19th IEEE International Conference on Robotics Automation*, Washington DC, 11-15 May 2002, 3948-3953. <https://doi.org/10.1109/TRA.2004.825470>
- [8] Do, K.D., Jiang, Z.P. and Pan, J. (2004) A Global Output-Feedback Controller for Simultaneous Tracking and Stabilization of Unicycle-Type Mobile Robots. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **20**, 589-594.
- [9] Yan, Z., Yang, H. and Zhang, W. (2022) Robust Nonlinear Model Predictive Control of a Bionic Underwater Robot with External Disturbances. *Ocean Engineering*, **263**, Article ID: 111310. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.111310>
- [10] Zhu, Y.K., Qiao, J.Z. and Guo, L. (2019) Adaptive Sliding Mode Disturbance Observer-Based Composite Control with

- Prescribed Performance of Space Manipulators for Target Capturing. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, **66**, 1973-1983. <https://doi.org/10.1109/TIE.2018.2838065>
- [11] Yang, X., Yan, J., Hua, C. and Guan, X. (2021) Trajectory Tracking Control of Autonomous Underwater Vehicle with Unknown Parameters and External Disturbances. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **51**, 1054-1063. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2894171>
- [12] Wang, H., Tian, Y. and Xu, H. (2022) Neural Adaptive Command Filtered Control for Cooperative Path Following of Multiple Underactuated Autonomous Underwater Vehicles along One Path. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **52**, 2966-2978. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2021.3062077>
- [13] Wang, J., Wang, C., Wei, Y. and Zhang, C. (2020) Neuroadaptive Sliding Mode Formation Control of Autonomous Underwater Vehicles with Uncertain Dynamics. *IEEE Systems Journal*, **14**, 3325-3333. <https://doi.org/10.1109/JSYST.2019.2938315>
- [14] Shou, Y., Xu, B., Zhang, A. and Mei, T. (2021) Virtual Guidance-Based Coordinated Tracking Control of Multi-Autonomous Underwater Vehicles Using Composite Neural Learning. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **32**, 5565-5574. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2021.3057068>
- [15] Liu, X., Zou, Y., Meng, Z. and You, Z. (2020) Coordinated Attitude Synchronization and Tracking Control of Multiple Spacecraft over a Communication Network with a Switching Topology. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **56**, 1148-1162. <https://doi.org/10.1109/TAES.2019.2925512>
- [16] Du, H., Wen, G., Cheng, Y., Lu, W. and Huang, T. (2020) Designing Discrete-Time Sliding Mode Controller with Mismatched Disturbances Compensation. *The IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **16**, 4109-4118. <https://doi.org/10.1109/TII.2019.2957002>
- [17] Quiroz, D. and Cuellar, F. (2019) Design of a Low Cost AUV with Adaptive Backstepping Control System to Monitor the Peruvian Coastline. *Proceedings OCEANS*, Marseille, 17-20 June 2019, 1-6. <https://doi.org/10.1109/OCEANSE.2019.8867249>
- [18] Dai, S.-L., He, S., Wang, M. and Yuan, C. (2019) Adaptive Neural Control of Underactuated Surface Vessels with Prescribed Performance Guarantees. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **30**, 3686-3698. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2018.2876685>
- [19] Chen, W., Wen, C., Hua, S. and Sun, C. (2014) Distributed Cooperative Adaptive Identification and Control for a Group of Continuous-Time Systems with a Cooperative PE Condition via Consensus. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **59**, 91-106. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2278135>
- [20] Wang, Y.-W., Lei, Y., Bian, T. and Guan, Z.-H. (2020) Distributed Control of Nonlinear Multiagent Systems with Unknown and Nonidentical Control Directions via Event-Triggered Communication. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 1820-1832. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2019.2908874>