Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2325-2329
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138240

Hans汉斯

旋转矩阵群对应的李代数$so(n)$的型心与拟型心

韩泽晟，王　敏，郑克礼*

东北林业大学数学系，黑龙江 哈尔滨

收稿日期：2023年7月3日；录用日期：2023年8月4日；发布日期：2023年8月11日

摘　要

本文主要研究了刚体运动中旋转矩阵群对应的李代数$so(n)$的型心与拟型心。先应用解线性方程组的方法，计算出了3维李代数$so(3)$的型心与拟型心。接下来把$so(3)$的结论推广到$so(n)$中。最终，完全确定了$so(n)$型心与拟型心的矩阵表示。

关键词

李代数，型心，拟型心，矩阵表示

Centroids and Quasi-Centroids of Lie Algebra $so(n)$ Corresponding to Rotation Matrix Group

Zesheng Han, Min Wang, Keli Zheng*

Department of Mathematics, Northeast Forestry University, Harbin Heilongjiang

Received: Jul. 3rd, 2023; accepted: Aug. 4th, 2023; published: Aug. 11th, 2023

Abstract

This paper mainly studies the centroids and quasi-centroids of the Lie algebra $so(n)$ corresponding to the Rotation matrix group in rigid motion. Firstly, the centroids and quasi-centroids of

*通讯作者。

文章引用：韩泽晟，王敏，郑克礼．旋转矩阵群对应的李代数$so(n)$的型心与拟型心[J]．理论数学，2023，13(8): 2325-2329. DOI: 10.12677/pm.2023.138240

the 3-dimensional Lie algebra $so(3)$ are calculated by using the method of solving system of linear equations. Next, the conclusion of $so(3)$ is extended to $so(n)$. Finally, the matrix representation of $so(n)$ centroids and quasi-centroids is completely determined.

Keywords

Liealgebra, Centroid, Quasi-Centroid, Matrix Representation

1. 引言

李群是一个古老的数学抽象对象，其在机器人学中关于刚体运动方面的研究中也日益发挥了重要的作用[1]。但李群结构高度抽象难以被理解，故可用指数和对数映射将李代数和李群相互转化，李代数是一个线性空间，相比于李群要更容易理解。李代数的型心与拟型心是结构理论的重要概念，其结构在某种程度上刻画了李代数的结构，对李代数的研究有重要意义。文献[2]中 Leger 和 Lucks 对李代数的广义导子、导子、型心、拟型心等概念进行了清晰的描述，并找到了这些概念之间的关系，将他们统一了起来。文献[3]通过计算给出 Poisson-3-Lie 代数的广义导子 $GDer(L)$、拟导子 $QDer(L)$、型心 $C(L)$、拟型心 $QC(L)$ 及中心导子代数 $ZDer(L)$ 的一些基本性质，并给出拟型心是李代数的充要条件。文献[4]给出了 3-李代数的广义导子、拟导子、拟型心的定义，研究了他们之间的结构关系，并对具有极大对角环面的 3-李代数的拟导子和拟型心结构进行了系统的研究。文献[5]主要研究 3-李代数的结构，给出了 3-李代数的广义导子，拟导子和拟型心的定义。对它们之间的关系及拟导子和拟型心的结构进行了研究。文献[6]给出李 color 三系的型心的定义，利用李 color 三系与李 color 代数的关系，得到李 color 三系的型心的一些结果。特别地，确定了单李 color 三系的型心。型心与拟型心具体的矩阵表示可以使型心、拟型心的结构更加清晰。文献[7]主要研究了复数域上的特殊线性李超代数 $sl(m,n)$ 的型心与拟型心，其中 $m+n=4$。应用解线性方程组的方法，完全确定了这些李超代数型心和拟型心的矩阵表示。文献[8]讨论一般线性李超代数一类子代数 $gl(1,2)$ 的型心与拟型心，应用解方程组的方法完全确定此类李超代数的型心和拟型心的矩阵表示。

由型心和拟型心的定义可知他们都是线性空间上的线性变换，因此通过找到 $so(3)$ 一组标准基，应用 $so(3)$ 本身的李乘运算并根据型心与拟型心的定义列出线性方程组，再通过系数比较法得到矩阵中的元素，最后用代数表达式写出矩阵的简化表示，并推广到 $so(n)$ 中。刚体运动中的旋转是机器人领域研究的重点，本文求得刚体中旋转矩阵群对应李代数的型心与拟型心的矩阵表示，可使后续对刚体运动中旋转的研究更加方便。

本文结构如下：第一部分是预备知识，介绍了本文用到的一些基本概念及符号，第二部分为本文的主体部分，分别讨论了 $so(3)$ 及 $so(n)$ 的型心与拟型心的矩阵表示。

2. 预备知识

定义 2.1 [9]设 F 是特征为 0 的域，L 是 F 上的线性空间。如果 L 上有一个运算：$L\times L\to L$，

$(x,y)\to[x,y]$，满足以下条件，则称 L 是一个李代数。

(1) $[x,x]=0$，$\forall x\in L$。

(2) 雅可比恒等式：$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$，$\forall x,y,z\in L$。

其中，条件(1)含有反对称性 $[x,y]=-[y,x]$，$\forall x,y\in L$ 的意思。且李括号 $[x,y]$ 具有双线 $[ax+by,cz+dw]=ac[x,z]+cb[y,z]+ad[x,w]+bd[y,w]$。

定义 2.2 设 L 为李代数，则称

$$\Gamma(L)=\{\phi\in End(L)\,|\,\phi[x,y]=[\phi(x),y]=[x,\phi(y)],\forall x,y\in L\}$$

为 L 的型心，称

$$Q\Gamma(L)=\{\phi\in End(L)\,|\,[\phi(x),y]=[x,\phi(y)],\forall x,y\in L\}$$

为 L 的拟型心。

3. 李代数 $so(3)$ 型心与拟型心的矩阵表示

由李代数 $so(3)$ 的定义可验证 $e_{32}-e_{23},e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12}$ 为李代数 $so(3)$ 的一组基，其中 e_{ij} 表示第 i 行第 j 列的元素为 1，其余位置 0 的方阵。

若 f 是 $so(3)$ 上的线性变换，则可设在基 $e_{32}-e_{23},e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12}$ 上的矩阵表示式如下：

$$f(e_{32}-e_{23},e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12})=(e_{32}-e_{23},e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12})\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}\end{pmatrix}$$

当 f 分别为型心与拟型心时，由元素 k_{ij} 组成的矩阵即分别是型心与拟型心在此组基下的矩阵表示形式。

定理 3.1 若 f 为拟型心，则 f 在 $so(3)$ 的标准基下的矩阵为 $\lambda I_{3\times3}$，其中 λ 为任意数。

证明：令 $e_{32}-e_{23},e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12}$ 为李代数 $so(3)$ 的标准基且设这组基在 f 作用下的像为：

$$f(e_{32}-e_{23})=k_{11}(e_{32}-e_{23})+k_{21}(e_{13}-e_{31})+k_{31}(e_{21}-e_{12})$$

$$f(e_{13}-e_{31})=k_{12}(e_{32}-e_{23})+k_{22}(e_{13}-e_{31})+k_{32}(e_{21}-e_{12})$$

$$f(e_{21}-e_{12})=k_{13}(e_{32}-e_{23})+k_{23}(e_{13}-e_{31})+k_{33}(e_{21}-e_{12})$$

根据拟型心的定义分别用 $so(3)$ 的标准基替代定义中的 x,y 进行运算。

当 $x=e_{13}-e_{31}$，$y=e_{21}-e_{12}$ 时，$f(e_{13}-e_{31})$ 与 $e_{21}-e_{12}$ 的情况为：

$$\begin{aligned}[f(e_{13}-e_{31}),e_{21}-e_{12}]&=[f(e_{13}-e_{31})](e_{21}-e_{12})-(e_{13}-e_{31})[f(e_{21}-e_{12})]\\&=k_{22}e_{32}-k_{12}e_{13}-k_{22}e_{23}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[e_{13}-e_{31},f(e_{21}-e_{12})]&=(e_{13}-e_{31})[f(e_{21}-e_{12})]-[f(e_{13}-e_{31})](e_{21}-e_{12})\\&=k_{13}e_{12}+k_{33}e_{32}-k_{13}e_{21}-k_{33}e_{23}\end{aligned}$$

由拟型心定义知：$[f(e_{13}-e_{31}),e_{21}-e_{12}]=[e_{13}-e_{31},f(e_{21}-e_{12})]$，比较系数可知：$k_{13}=k_{12}=0$，$k_{22}=k_{33}$。

依据上述方法对每个基进行运算，同理可得：$k_{12}=k_{13}=k_{21}=k_{23}=k_{31}=k_{32}=0$ $k_{11}=k_{22}=k_{33}=\lambda$，即 f 在 $so(3)$ 标准基下的矩阵为 $\lambda I_{3\times3}$，其中 λ 为任意数。

定理 3.2 若 f 为型心，则 f 在 $so(3)$ 的标准基下的矩阵为 $\lambda I_{3\times3}$，其中 λ 为任意数。

证明：根据定理 1 及型心的定义分别用 $so(3)$ 的标准基代替定义中的 x,y 进行计算。

当 $x=e_{13}-e_{31}$， $y=e_{21}-e_{12}$ 时：

$$f\left[e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12}\right]=f\left(e_{32}-e_{23}\right)=\lambda\left(e_{32}-e_{23}\right)$$

$$\left[f\left(e_{13}-e_{31}\right),e_{21}-e_{12}\right]=k_{22}e_{32}-k_{12}e_{13}-k_{22}e_{23}$$

又由型心定义

$$f\left[e_{13}-e_{31},e_{21}-e_{12}\right]=\left[f\left(e_{13}-e_{31}\right),e_{21}-e_{12}\right]$$

可得：$k_{22}=\lambda$，$k_{12}=0$ 其它情况同理可得：$k_{11}=k_{22}=k_{33}=\lambda$，其余项全为 0。即 f 在 $so(3)$ 的标准基下的矩阵为 $\lambda I_{3\times 3}$，其中 λ 为任意数。

4. $so(n)$ 型心与拟型心的矩阵表示

由李代数 $so(n)$ 的定义：

当 n 为奇数，可验证

$$\begin{aligned}
&e_{21}-e_{12},e_{32}-e_{23},e_{43}-e_{34},e_{54}-e_{45},\cdots,e_{n,n-1}-e_{n-1,n}\\
&e_{13}-e_{31},e_{24}-e_{42},e_{35}-e_{53},\cdots,e_{n-2,n}-e_{n,n-2}\\
&e_{41}-e_{14},e_{52}-e_{25},\cdots,e_{n,n-3}-e_{n-3,n}\\
&\cdots\\
&e_{1,n}-e_{n,1}
\end{aligned}$$

为 $so(n)$ 的基。

当 n 为偶数，可验证

$$\begin{aligned}
&e_{21}-e_{12},e_{32}-e_{23},e_{43}-e_{34},e_{54}-e_{45},\cdots,e_{n,n-1}-e_{n-1,n}\\
&e_{13}-e_{31},e_{24}-e_{42},e_{35}-e_{53},\cdots,e_{n-2,n}-e_{n,n-2}\\
&e_{41}-e_{14},e_{52}-e_{25},\cdots,e_{n,n-3}-e_{n-3,n}\\
&\cdots\\
&e_{n,1}-e_{1,n}
\end{aligned}$$

为 $so(n)$ 的基。

将李代数 $so(3)$ 型心与拟型心的矩阵表示的证明方法推广到李代数 $so(n)$，得出以下定理。

定理 4.1 李代数 $so(n)$ 的拟型心在其标准基下的矩阵为 $\lambda I_{n\times n}$，其中 λ 为任意数。

定理 4.2 李代数 $so(n)$ 的型心在其标准基下的矩阵为 $\lambda I_{n\times n}$，其中 λ 为任意数。

推论： 李代数 $so(n)$ 的型心与拟型心相同。

基金项目

东北林业大学大学生创新训练项目(DC-2023182)；中央高校基本科研业务费专项资金资助(2572021BC02)。

参考文献

[1] 于靖军, 刘辛军, 丁希仑. 机器人机构学的数学基础[M]. 第 2 版. 北京: 机器工业出版社, 2015.

[2] Leger, G. and Luks, E. (2000) Generalized Derivations of Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **228**, 165-203. https://doi.org/10.1006/jabr.1999.8250

[3] 张爽，王春月，张庆成. Poisson 3-Lie 代数的广义导子[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(6): 1375-1379.

[4] 白瑞蒲，李奇勇，张凯. 3-李代数的广义导子[J]. 数学年刊 A 辑(中文版), 2017, 38(4): 447-460.

[5] 李奇勇. 3-李代数的广义导子[D]: [硕士学位论文]. 保定：河北大学, 2015.

[6] 张健，曹燕. 李 color 三系的型心[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2018, 35(1): 22-25.

[7] 郭睿彤，李柏霄，郑克礼. 4 阶特殊线性李超代数的型心与拟型心[J]. 数学的实践与认识, 2022, 52(7): 233-237.

[8] 张洪娟，李明明，郑克礼. 李超代数 $gl(1,2)$ 型心与拟型心的矩阵表示[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报，2017, 33(1): 1-3.

[9] Erdmann, K. and Wildon, M. (2006) Introduction to Lie Algebras. Springer, London. https://doi.org/10.1007/1-84628-490-2