

关于牛顿一元整系数多项式一次因式寻找法的证明

杨欣童

清华大学科学史系, 北京

收稿日期: 2023年6月30日; 录用日期: 2023年8月1日; 发布日期: 2023年8月9日

摘要

著名数学家牛顿在其数学专著《广义算术》中提出的一元整系数多项式一次因式寻找法简洁新颖, 曾受到了莱布尼兹、约翰·伯努利和赫尔曼等多位数学家高度重视。后人对牛顿的这种方法有多种解释, 但未见有证明。本文对这种方法进行深入分析, 借助现代符号给出了一种严格证明。

关键词

牛顿, 代数, 多项式, 一次因式, 《广义算术》

A Proof of Newton's Method for Finding the First Degree Factor of Monovariate Polynomials with Integer Coefficients

Xintong Yang

Department of the History of Science, Tsinghua University, Beijing

Received: Jun. 30th, 2023; accepted: Aug. 1st, 2023; published: Aug. 9th, 2023

Abstract

The famous mathematician Newton proposed a simple and novel method for finding the first-degree factor of a polynomial with integer coefficients in his mathematical monograph *Arithmetica Universalis*, which has been highly valued by mathematicians such as Leibniz, John Bernoulli, and Hermann. There are various explanations for Newton's method, but no proof has been found. This article conducts an in-depth analysis of this method and provides rigorous proof using mod-

ern symbols.

Keywords

Newton, Algebra, Polynomials, First Degree Factors, *Arithmetica Universalis*

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为历史上最伟大的数学家，牛顿(Isaac Newton, 1643~1727)不仅对于微积分有重要贡献[1] [2] [3] [4]，而且在代数学方面和几何学也做出了重大贡献[5]-[12]。1707年，牛顿出版了一部名为《广义算术》(Arithmetica Universalis)的代数学专著，其中包含了丰富的代数学知识，例如代数基本运算、多项式的因式分解法、根式化简和一元方程的求解法，等等[5] [13] [14]。其中，牛顿提出了一种求多项式一次因式方法，这种方法不仅易于操作，而且适用于所有系数为整数的一元多项式，是一种帮助求解整系数方程非常有用的方法。牛顿的方法在当时引起了著名数学家莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)的高度关注。不过，莱布尼兹并似乎不怎么理解牛顿的这种方法[15] [16]。1708年，莱布尼兹分别写信向约翰·伯努利(Johann Bernoulli, 1667~1748)和赫尔曼(Jakob Hermann, 1678~1733)求助，很可惜，伯努利和赫尔曼也没有给出清楚的证明[17] [18]。此后迄今，也未见有相关证明公开发表。然而，对牛顿求一元多项式一次因子方法的证明无疑有助于后人对牛顿数学思想和方法的进一步理解和研究，无疑有助于人们对于牛顿科学的全面了解。故本文拟对牛顿一元整系数多项式一次因式寻找法做一证明，以求教于各位方家。

2. 牛顿寻找一元整系数多项式的一次因子的方法

牛顿在《广义算术》中给出的寻找一元整系数多项式的一次因子的方法是通过若干具体例子给出的。纵观这三个例子，其方法可总结为以下步骤[19]：

第一步，将多项式按照其中字母的次幂从高到底进行排列；

第二步，用 0 在中间的一个降序整数数列分别替换这个字母，如 3, 2, 0, -1, -2。并求出相应的值；

第三步，将得到的数值和其因子放在一起，同时将因子的符号也列出来，包括正的和负的。

第四步，在上述因子中找出与 3, 2, 1, 0, -1, -2 顺序相同或者相反的因子列，从高到低列出来。要求，因子列之间的公差必须能够整除原多项式最高次项的系数。

第五步，找出上面因子列中与前面的 0 是相对应的数，以此为分子；

第六步，以上述分子除以因子列公差的相反数而得到的数为常数，做成一次式，此即为原多项式的可能的一次因式；

第七步，通过多项式除法，确定出真正的一次因式。

比如求多项式 $x^3 - x^2 - 10x + 6$ 的一次因式。

因为其已经按照字母 x 的幂从高到低排列出来，所以直接从第二步开始。

用 1, 0, -1 替换其中的 x 。这样得到三个数值, 即-4, 6, +14。将这些数分别写出来, 如图 1 所示。并在其右侧写出与 1, 0, -1, 在其左侧分别写出这三个数的所有因子。

$$\begin{array}{r|l} 1 & 4 | 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -4 \\ 0 & 6 | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -6 \\ -1 & 14 | 1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -7 \cdot -14 \end{array} \begin{array}{l} +4 \cdot \\ +3 \cdot \\ +2 \cdot \end{array}$$

Figure 1. The first example of finding first degree factors

图 1. 求一次因式列式一

因为原多项式最高次项 x^3 的系数仅能被单位 1 和-1 整除, 因此, 在众多因子中找间隔为 1 和-1 的数列。

每一行中选出一个数字, 可以找到 4, 3, 2 和-4, -3, -2 两个因子序列。

在这两个序列中, 找与前面替换数 1, 0, -1 中 0 对应的数, 得到 3 和-3。

用得到 3 和-3 分别除以其所在因子列公差相反数, 均得到 3。这就得到一个可能的一次因式 $x+3$ 。

以 $x+3$ 为因子去除原多项式, 得到的商是 $x^2 - 4x + 2$, 所以 $x+3$ 是原多项式的一个一次因式。

再比如求多项式 $6y^4 - y^3 - 21y^2 + 3y + 20$ 一次因式。

也是直接从第二步开始即可。用 2, 1, 0, -1, -2 替换其中的字母 y , 得到 30, 7, 20, 31, 34 三个数字。

将这 5 个数的因子都列出来, 像图 1 那样, 则得到如图 2 样子的列式:

$$\begin{array}{r|l} 2 & 30 | 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -3 \cdot -5 \cdot -6 \cdot -10 \cdot -15 \cdot -30 \\ 1 & 7 | 1 \cdot 7 \cdot -1 \cdot -7 \\ 0 & 20 | 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -10 \cdot -20 \\ -1 & 31 | 1 \cdot 3 \cdot -1 \cdot -3 \\ -2 & 34 | 1 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 34 \cdot -1 \cdot -2 \cdot -17 \cdot -34 \end{array} \begin{array}{l} +10 \cdot -10 \\ +7 \cdot -7 \\ +4 \cdot -4 \\ +1 \cdot -1 \\ -2 \cdot 2 \end{array}$$

Figure 2. The second example of finding first degree factors

图 2. 求一次因式列式二

在图 2 中的因子中找等差的因子列, 且其公差必须是 6 的因子。可以发现 10, 7, 4, 1, -2 和-10, -7, -4, -1, 2 这两个数列满足条件。

在两个数列中找出与前面替换数 2, 1, 0, -1, -2 中 0 对应的数, 得到 4 和-4。

用这两个数, 分别除以自己所在等差数列公差的相反数, 都得到 $\frac{4}{3}$, 这样就得到一个一次二项式 $y + \frac{4}{3}$, 或 $3y + 4$ 。

用 $y + \frac{4}{3}$, 或 $3y + 4$ 去除原多项式, 得结果为 $2y^3 - 3y^2 - 3y + 5$ 。所以, $y + \frac{4}{3}$, 或 $3y + 4$ 是原多项式的一个一次因式。

再比如求多项式 $24a^5 - 50a^4 + 49a^3 - 140a^2 + 64a + 30$ 的一次因式。

利用上述步骤得到的列式如图 3 所示(为了简洁, 省略了相应的负数因子)。

由此看出, 与替换数 0 对应的有三个数分别是-1, -5, -5。

让它们分别除以各自因子数列公差的相反数即 2, 4, 6, 得到三个一次因式 $a - \frac{1}{2}$, $a - \frac{5}{4}$, $a - \frac{5}{6}$ 。

2	42	1·2·3·6·7·14·21·42	+3·+3·+7·
1	23	1·23·	+1·-1·+1·
0	30	1·2·3·5·6·10·15·30	-1·-5·-5·
-1	297	1·3·9·11·27·33·99·297	-3·-9·-11·

Figure 3. The third example of finding first degree factors

图 3. 求一次因式列式三

用上述三个一次式去除原多项式，发现 $a - \frac{5}{6}$ ，即 $6a - 5$ 可以整除原多项式，得到的商为 $4a^4 - 5a^3 + 4aa - 20a - 6$ 。其余两个一次式不能，所以 $a - \frac{5}{6}$ 或 $6a - 5$ 是原多项式的一个一次因式。

3. 牛顿方法的数学语言表示

用数学语言表述上述方法即是：

设有一个整系数多项式 $F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，对这个多项式做如下变换：

(1) 选取一个以 0 为中心的公差为 1 的等差数列： $p, p-1, p-2, \dots, 1, 0, -1, \dots, -p$ ；

(2) 将上述等差数列的值分别带入上述多项式，求其值 $F_n(i)$ ，其中 $-p \leq i \leq p$ ；

(3) 找出每个 $F_n(i)$ 的整数因子 $F_n(i)_j$ ，做成集合 $\{F_n(i)_j \mid j \in Z\}$ ；

(4) 从上述每个集合 $\{F_n(i)_j \mid j \in Z\}$ 各选取一个数值 $m_{i,k}$ ($1 \leq k \leq j$)，按照 i 取值降序的顺序组成等差数列： $m_{p,k_1}, m_{p-1,k_2}, m_{p-3,k_3}, \dots, m_{-p,k_{2p+1}}$ ；

(5) 在上述组成的所有等差数列中，找出公差为 d_t 的等差数列。其中 d_t (t 为整数) 为多项式首项 a_n 的因子；

(6) 在找出的以 d_t 为公差的数列中，取 m_{0,k_0} ，即与公差为 1 的等差数列中与 0 对应的数值的因子，也就是 $F_n(0) = a_0$ 的因子，做成一次式 $(d_t x + m_{0,k_0})$ ，则这个一次式即是原多项式 $F_n(x)$ 潜在的一个因式；

(7) 重复步骤(5)和(6)即可找出所有原多项式 $F_n(x)$ 潜在的一次因式；

(8) 通过检验，最终确定 $F_n(x)$ 真正一次因式。

4. 牛顿方法的证明

引理一：设 $(dx + m)$ 为整系数多项式 $F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 的一个一次因式，则有： $d \mid a_n, m \mid a_0$ 。

证明：因为 $(dx + m)$ 是 $F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 的一次因式，所以，

$$F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = (dx + m)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0)$$

故， $a_n = db_{n-1}, a_0 = mb_0$

所以有： $d \mid a_n, m \mid a_0$

引理二：设有整系数多项式 $F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ，其一次因式为 $(dx + m)$ ，则将以 0 为中心的公差为 1 的等差数列： $p, p-1, p-2, \dots, 1, 0, -1, \dots, -p$ 分别带入多项式，并求其每个相应值 $F_n(i)$ (其中 $-p \leq i \leq p$) 的整数因子 $F_n(i)_j$ 做成集合 $\{F_n(i)_j \mid j \in Z\}$ ，从上述每个集合 $\{F_n(i)_j \mid j \in Z\}$ 各选取一个数值 $m_{i,k}$ ($1 \leq k \leq j$)，按照 i 取值降序的顺序组成等差数列： $m_{p,k_1}, m_{p-1,k_2}, m_{p-3,k_3}, \dots, m_{-p,k_{2p+1}}$ 时，必定能找到以 d 为公差的等差数列。

证明：因为 $(dx+m)$ 是 $F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 的一次因式，所以，

$$F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (dx+m)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0)$$

这样，当将 0 为中心的公差为 1 的等差数列： $p, p-1, p-2, \dots, 1, 0, -1, \dots, -p$ 分别带入多项式时，必有 $(di+m) | F_n(i)$ ，其中 $-p \leq i \leq p$ 。

而当 i 顺序取边 $p, p-1, p-2, \dots, 1, 0, -1, \dots, -p$ 这些值的时候， $di+m$ 是一个公差为 d 的降序等差数列。

所以，在 $F_n(i)$ (其中 $-p \leq i \leq p$) 的整数因子 $F_n(i)_j$ 做成集合 $\{F_n(i)_j | j \in Z\}$ ，按照从每个集合 $\{F_n(i)_j | j \in Z\}$ 选取一个数值的原则，必定能找到一个公差为 d 的降序等差数列。

牛顿求因子方法证明：

证明：由牛顿求因式的过程可以知道，其方法可以分成三个步骤。第一是找出一个公差为首项系数因子的等差数列；第二步是，构造一个一次式，找出潜在因子；第三步是通过整除确定因子。

对于第一步，由引理二可知，在整系数多项式存在一次因式的情况下，必能找到一个以 d 为公差的等差数列。而这个 d ，由引理一可知，必整除原多项式的首项系数 a_n ，也就是 d 是 a_n 的因子。所以，牛顿方法的第一步必能找出一个公差为原多项式首项系数因子的等差数列。

牛顿方法的第二步是，这之后，在上述等差数列中，取 m_{0,k_0} ，即 $F_n(0) = a_0$ 的因子，做成一次式 $(d_r x + m_{0,k_0})$ 。由引理一可以知道， $(d_r x + m_{0,k_0})$ 必是原多项式潜在的一个因式。所以，牛顿方法的第二步必能找出原多项式的潜在一次因式。

牛顿方法的第三步显然一定能确定出真正的一次因式，所以是合理的。

由此，牛顿求因式方法是合理的，必能找出原多项式真正的一次因式。

参考文献

- [1] Frederick, R.V. (1987) Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics. *The College Mathematics Journal*, **18**, 362-389. <https://doi.org/10.1080/07468342.1987.11973060>
- [2] Guicciardini, N. (2004) Isaac Newton and the Publication of His Mathematical Manuscripts. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, **35**, 455-470. <https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2004.06.002>
- [3] Galuzzi, M. (2010) Newton's Attempt to Construct a Unitary View of Mathematics. *Historia Mathematica*, **37**, 535-562. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2010.05.002>
- [4] Whitrow, G.J. (1989) Newton's Role in the History of Mathematics. *Notes and Records of the Royal Society of London*, **43**, 71-92. <https://doi.org/10.1098/rsnr.1989.0006>
- [5] Guicciardini, N. (2009) Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method (No. 4). MIT Press, Cambridge. <https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262013178.001.0001>
- [6] Garrison, J.W. (1987) Newton and the Relation of Mathematics to Natural Philosophy. *Journal of the History of Ideas*, **48**, 609-627. <https://doi.org/10.2307/2709690>
- [7] Kollerstrom, N. (1992) Thomas Simpson and "Newton's Method of Approximation": An Enduring Myth. *The British Journal for the History of Science*, **25**, 347-354. <https://doi.org/10.1017/S0007087400029150>
- [8] Kaplan, A. (2018) Analysis and Demonstration: Wallis and Newton on Mathematical Presentation. *Notes and Records: the Royal Society Journal of the History of Science*, **72**, 447-468. <https://doi.org/10.1098/rsnr.2018.0025>
- [9] Folina, J. (2012) Newton and Hamilton: In Defense of Truth in Algebra. *The Southern Journal of Philosophy*, **50**, 504-527. <https://doi.org/10.1111/j.2041-6962.2012.00131.x>
- [10] 杨欣童. 论牛顿的数学机械化思想[J]. 理论数学, 2023, 13(4): 829-838.
- [11] Yang, X.T. (2023) The Mechanization Thought and Its Characteristics Contained in Newton's Mathematics. *Asian Research Journal of Mathematics*, **19**, 46-57. <https://doi.org/10.9734/arjom/2023/v19i9698>
- [12] Chin, S.A. (2022) Modern Light on Ancient Feud: Robert Hooke and Newton's Graphical Method. *Historia Mathematica*, **60**, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.hm.2021.11.002>

- [13] 杨欣童. 关于牛顿著作《广义算术》形成及其内容与影响的研究[J]. 交叉科学快报, 2023, 7(1): 10-16.
- [14] Pycior, H.M. (1997) *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick*. Cambridge University Press, Cambridge.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511895470>
- [15] Newton, I. and Whiteside, D.T. (2008) *The Mathematical Papers of Isaac Newton (Vol. 5)*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [16] Leibniz, G.W. (1708) Leibniz' Review of the *Arithmetica*. *Acta Eruditorum*, **1708**, 519-526.
- [17] Leibniz, G.W. and Bernoulli, J. (1745) *Virorum Celeberr Gotgul Leibnitii et Johan Bernoullii Commercium Philosophicum Mathematicum (Tomus Secundus)* Maci-michaelis bousquet & Socior, Lausannae & Genevae.
- [18] Leibniz, G.W. (1859) *Leibnizens Mathematische Schriften*. Druck und Verlage, Schmidt.
- [19] Newton, I. (1720) *Universal Arithmetick: A Treatise of Arithmetrcal Composition and Resolution*. J. Senex, W. Taylor, London, 30-100.