Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2396-2402
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138248

闵氏空间中矩阵广义逆的研究

祝小雪[1]，熊　飞[2*]

[1]湖北师范大学数学与统计学院，湖北　黄石
[2]江西师范大学数学与统计学院，江西　南昌

收稿日期：2023年7月9日；录用日期：2023年8月10日；发布日期：2023年8月17日

摘　要

本文介绍了闵氏空间中矩阵广义逆的概念，总结推广了其性质及表征，并基于矩阵的广义逆理论给出了Bjerhammar定理、Zlobec公式等在闵氏空间中的形式，获得了闵氏空间中矩阵广义逆的一些新刻画。

关键词

闵氏空间，闵氏逆，Zlobec公式

Research on Generalized Inverse of Matrix in Minkowski Space

Xiaoxue Zhu[1], Fei Xiong[2*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei
[2]School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: Jul. 9th, 2023; accepted: Aug. 10th, 2023; published: Aug. 17th, 2023

Abstract

In this paper, we introduce the concept of generalized inverse of matrix in Minkowski space, generalize its properties and characterization, and give the forms of Bjerhammar theorem and Zlobec formula in Minkowski space based on the generalized inverse theory of matrix, obtain some new characterizations of generalized inverse of matrix in Minkowski space.

Keywords

Minkowski Space, Minkowski Inverse, Zlobec Formula

*通讯作者。

文章引用: 祝小雪, 熊飞. 闵氏空间中矩阵广义逆的研究[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2396-2402.
DOI: 10.12677/pm.2023.138248

1. 引言

广义逆这个概念最早由 Fredholm 在 1903 年研究积分算子时提出。1904 年，Hilbert 在讨论广义格林函数时含蓄地提出微分算子广义逆，随后引起很多不同领域的学者研究。1920 年，Moore 在美国数学学会会刊发表了任意矩阵的广义逆，但由于形式抽象人们难以理解和应用，导致研究广义逆的热度降低，在接下来的 30 年里都没有较大发现。

直到 1955 年 Penrose 在[1]中给出了众所周知的 Moore-Penrose 逆的经典刻画：令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则存在唯一的矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 满足下面四个方程

$$(1)\ \ AXA = A;\ (2)\ \ XAX = X;\ (3)\ \ (AX)^{*} = AX;\ (4)\ \ (XA)^{*} = XA$$

记 $X = A^{\dagger}$，称为矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆，这个刻画使得广义逆在计量学、最优化理论、系统论及数理统计等领域得到了广泛的应用，从而很大程度促进了其发展。

本文的闵氏空间最早由 Minkowski 在 1907 年提出，它是由一个比较特殊的时间维和三个空间维组成的。它与传统的四维空间最大的差别在于，闵氏空间中有一维为“类空间”(具有一些光学性质)，而这一维从数学角度保证了四维时空的间隔是不变的。形式上，闵氏空间是一个非退化并对称双线性的四维实向量空间，可以用对称双线形式表示为 $(+,-,-,-)$，它也可以记作 $\mathbb{R}^{1,3}$。闵氏空间中的度量矩阵是 $Diag(1,-I_3)$。

1996 年，Renardy 在研究极光偏振现象时在[2]中给出了闵氏空间中矩阵奇异值分解的充要条件：

(1) $A^{\dagger}A$ 的奇异值为非负的实数；(2) $A^{\dagger}A$ 可对角化；(3) $A^{\dagger}A$ 与 A 的零空间相同。

2000 年，印度学者 Meenakshi 在文[3]中引入了复矩阵广义逆在闵氏空间中的概念，并且得到了闵氏空间中的广义逆(本文简称闵氏逆)存在的充要条件。后面 2016 年 Al-Zhour 和 Kılıçman 在文[4]、[5]中给出了加权闵氏逆，还构建了一些加权闵氏逆的性质，并得到了一些复数域上加权 Moore-Penrose 逆经典的性质在闵氏空间中并不成立的例子。2019 年王宏兴在文献[6]中给出了闵氏空间中的 m-core 逆，并且研究了其性质、表征、偏序及应用。2021 年王宏兴在文献[7]中定义了闵氏空间中的 m-core-EP 逆，研究了其的性质和一些充要条件，并且给出了一些矩阵的 m-core-EP 分解，以及应用其分解给出了 m-core-EP 序和它的一些性质。

但闵氏逆本身的研究，只有 2002 年 Meenakshi 和 Krishnaswamy 在[8]中讨论了闵氏空间值域对称矩阵求和性质，以及 2006 年在[9]中研究了闵氏空间中的分块矩阵的广义逆及相关性质。本文主要基于文[3]的理论和广义逆理论，总结出了闵氏逆的相关性质，并给出了几种等价表示闵氏逆的方法，如有名的 Bjerhammar 定理及 Zlobec 公式等在闵氏空间中的形式，这些刻画闵氏逆的特征可以提供计算闵氏逆的一些途径，也可以为后续读者的研究提供一些方法上的思路。

2. 预备知识

下面给出广义逆矩阵的一些基本符号、概念及引理。

2.1. 专用符号注释表

为了方便读者阅读，我们定义本文的符号如下：

$\mathbb{C}^{m\times n}$　$m\times n$ 复矩阵的集合

$\mathbb{C}_r^{m\times n}$　秩为 r 的 $m\times n$ 复矩阵的集合

A^{-1}　矩阵 A 的逆矩阵

A^*　矩阵 A 的共轭转置

$rk(A)$　矩阵 A 的秩

$\mathcal{R}(A)$　矩阵 A 的值域

$\mathcal{N}(A)$　矩阵 A 的核

I_n　n 阶单位阵

$A^\sim$　闵氏空间中矩阵 A 的共轭转置

$A^\dagger$　矩阵 A 的 Moore-Penrose 逆

$A^{\mathfrak{M}}$　矩阵 A 的闵氏逆

G　闵氏空间中的度量矩阵

2.2. 基本概念和引理

闵氏空间是一个 n 维复向量空间，本文用 $\mathcal{M}$ (在 $\mathbb{C}^n$ 中带有闵氏内积 $(\alpha,\beta)=\langle\alpha,G\beta\rangle$，其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为通常酉内积来表示)，度量矩阵 $G=Diag(1,-I_{n-1})$。显然我们有 $G^*=G$ 和 $G^2=I_n$。

本文研究的是 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，我们将 $A^\sim$ 记作矩阵 A 的闵氏伴随(也叫闵氏共轭转置)，定义 $A^\sim=G_2A^*G_1$，其中 G_1 是 m 阶闵氏空间中的度量矩阵，G_2 是 n 阶闵氏空间中的度量矩阵，A^* 是矩阵 A 的共轭转置。还有若 $A^\sim=A$ 称 A 是 $\mathcal{M}$ 对称的，若 $A^\sim A=I$ 则称为 A 在闵氏空间中正交。

引理 2.2.1 [3]在闵氏空间中，令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则称唯一的矩阵 $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 为矩阵 A 的闵氏逆，当且仅当 X 满足以下四个条件(也记作 $X\in A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$)：

$$(1)\ \ AXA=A,\ (2)\ \ XAX=X,\ (3^{\mathfrak{M}})\ \ (AX)^\sim=AX,\ (4^{\mathfrak{M}})\ \ (XA)^\sim=XA,$$

我们记 $X=A^{\mathfrak{M}}$。

注　当矩阵 X 满足(1)和($3^{\mathfrak{M}}$)时，我们称 X 为矩阵 A 的 $\{1,3^{\mathfrak{M}}\}$ -逆，记为：

$A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}=\{X\mid AXA=A,(AX)^\sim=AX\}$，特别地我们把矩阵 A 的 $\{1\}$ -逆记作 A^-。

引理 2.2.2 [3]在闵氏空间中，令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，则 $A^{\mathfrak{M}}$ 存在且唯一当且仅当 $rk(A)=rk(AA^\sim)=rk(A^\sim A)$。

引理 2.2.3 ([10], p. 128)令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$X\in A\{1\}$，则 $X\in A\{1,2\}$ 当且仅当 $rk(X)=rk(A)$。

引理 2.2.4 ([10], p. 133)令 $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$，$U\in\mathbb{C}^{n\times p}$，$V\in\mathbb{C}^{q\times m}$，$X=U(VAU)^-V$，则有：

(a)　$X\in A\{1\}$ 当且仅当 $rk(VAU)=r$；

(b)　$X\in A\{2\}$，$\mathcal{R}(X)=\mathcal{R}(U)$ 当且仅当 $rk(VAU)=rk(U)$。

3. 主要结论

3.1. 闵氏空间中广义逆的性质

下列性质均在闵氏空间中，且要满足 $A^{\mathfrak{M}}$ 存在且唯一，即 $rk(A)=rk(AA^\sim)=rk(A^\sim A)$。这些性质的证明有的已经在其他文章中提及过，有的证明并不困难。

定理 3.1 对任意 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，闵氏逆 $A^{\mathfrak{M}}$ 具有下列性质：

(1) $\left(A^{\mathfrak{M}}\right)^{\mathfrak{M}}=A$；

(2) $\left(A^{\sim}\right)^{\mathfrak{M}}=\left(A^{\mathfrak{M}}\right)^{\sim}$；

(3) $\left(AA^{\sim}\right)^{\mathfrak{M}}=\left(A^{\mathfrak{M}}\right)^{\sim}A^{\mathfrak{M}}$；

(4) $A^{\mathfrak{M}}=\left(A^{\sim}A\right)^{\mathfrak{M}}A^{\sim}$ 特别地，如果 A 是满秩矩阵，$rk(A)=n$ 当且仅当 $A^{\mathfrak{M}}=\left(A^{\sim}A\right)^{-1}A^{\sim}$，$A^{\mathfrak{M}}A=I_n$。$rk(A)=m$ 当且仅当 $A^{\mathfrak{M}}=A^{\sim}\left(AA^{\sim}\right)^{-1}$，$AA^{\mathfrak{M}}=I_n$；

(5) $(\lambda A)^{\mathfrak{M}}=\lambda^{\dagger}A^{\mathfrak{M}}$，其中 $\lambda\in\mathbb{C}$，$\lambda^{\dagger}=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ 0, & \lambda=0\end{cases}$；

(6) $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}\left(AA^{\mathfrak{M}}\right)=\mathcal{R}\left(AA^{\sim}\right)$；

(7) $\mathcal{R}\left(A^{\mathfrak{M}}\right)=\mathcal{R}\left(A^{\mathfrak{M}}A\right)=\mathcal{R}\left(A^{\sim}A\right)=\mathcal{R}\left(A^{\sim}\right)$；

(8) $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}\left(A^{\mathfrak{M}}A\right)=\mathcal{N}\left(A^{\sim}A\right)$；

(9) $\mathcal{N}\left(A^{\mathfrak{M}}\right)=\mathcal{N}\left(AA^{\mathfrak{M}}\right)=\mathcal{N}\left(AA^{\sim}\right)=\mathcal{N}\left(A^{\sim}\right)$；

(10) $rk(A)=m-rk\left(I_m-AA^{\mathfrak{M}}\right)=n-rk\left(I_n-A^{\mathfrak{M}}A\right)$；

(11) $(UAV)^{\mathfrak{M}}=V^{\sim}A^{\mathfrak{M}}U^{\sim}$，这里 U,V 分别为 m,n 阶的酉矩阵。

注 显然 A^{-1} 的诸多性质 $A^{\mathfrak{M}}$ 已经不再具备。比如特殊的情况当 A 为方阵时，一般的说有：

(1) $(AB)^{\mathfrak{M}}\neq B^{\mathfrak{M}}A^{\mathfrak{M}}$

(2) $AA^{\mathfrak{M}}\neq A^{\mathfrak{M}}A$

(3) 当 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$k\geq 2$ 时，则 $\left(A^k\right)^{\mathfrak{M}}\neq\left(A^{\mathfrak{M}}\right)^k$

(4) A 和 $A^{\mathfrak{M}}$ 的所有特征值(除零特征值)，并不是互为倒数的。

3.2. 闵氏空间中广义逆的特征

下面定理的证明过程中所使用的符号均假设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$A^{\sim}=G_2A^{*}G_1$，其中 G_1 是 m 阶闵氏空间中的度量矩阵，G_2 是 n 阶闵氏空间中的度量矩阵，A^{*} 是矩阵 A 的共轭转置。

文献[3]中 Meenakshi 通过满秩矩阵的分解定理得到了闵氏逆的一种表示形式，本文在这里罗列出来。

众所周知的列满秩矩阵分解，若 $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$，$r>0$ 则存在列满秩矩阵 $B\in\mathbb{C}_r^{m\times r}$ 和列满秩矩阵 $C\in\mathbb{C}_r^{r\times n}$ 使得 $A=BC$。在闵氏空间也有：

定理 3.2.1 令 $A\in\mathbb{C}_r^{m\times n}$，$r>0$ 有满秩分解 $r>0$，若 $A^{\mathfrak{M}}$ 存在，则有 $A^{\mathfrak{M}}=G_2C^{*}\left(CG_2C^{*}\right)^{-1}\left(B^{*}G_1B\right)^{-1}B^{*}G_1$。

下面给出本文主要的几个主要定理。

定理 3.2.2 是著名的 Bjerhammar 定理在闵氏空间的形式，它相对引理 2.2.1 来说，就是用了另一种不同的等价形式刻画了闵氏逆的后面 3 个条件。

定理 3.2.2 令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$X\in\mathbb{C}^{n\times m}$，则 $X=A^{\mathfrak{M}}$ 当且仅当存在 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足条件 $AXA=A$，$X=A^{\sim}U=(UA)^{\sim}$，$X=VA^{\sim}=(AV)^{\sim}$ 且 U,V 是 $\mathcal{M}$ 对称的。

证明 $(\Leftarrow)$由 $X=A^{\sim}U$ 可得 $\mathcal{R}(XA)\subset\mathcal{R}(X)\subset\mathcal{R}\left(A^{\sim}\right)$，

再由 $rk(A)=rk(AXA)\leq rk(XA)\leq rk(A)$ 得 $rk(A)=rk(XA)=rk\left(A^{\sim}\right)$

则 $\mathcal{R}(XA)=\mathcal{R}(X)=\mathcal{R}\left(A^{\sim}\right)$，故 $rk(X)=rk\left(A^{\sim}\right)=rk(A)$，根据条件 $AXA=A$ 和引理 2.2.3

得 $X\in A\{1,2\}$，下验证 $X\in A\left\{3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\right\}$

$(3^{\mathfrak{M}})$ $(AX)^{\sim}=G_1(AX)^{*}G_1=G_1\left(A^{\sim}\right)^{*}V^{*}A^{*}G_1=G_1G_1AG_2V^{*}A^{*}G_1=A(AV)^{\sim}=AX$

($4^{\mathfrak{M}}$) $(XA)^{\sim}=G_2(XA)^{*}G_2=G_2A^{*}U^{*}\left(A^{\sim}\right)^{*}G_2=G_2A^{*}U^{*}\left(G_2A^{*}G_1\right)^{*}G_2=(UA)^{\sim}A=XA$

综合得 $X\in A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 即有 $X=A^{\mathfrak{M}}$ 成立。

($\Rightarrow$)当 $X=A^{\mathfrak{M}}$　$X=XAX=(XA)^{\sim}X=G_2(XA)^{*}G_2X=G_2A^{*}G_1G_1X^{*}G_2X=A^{\sim}\left(X^{\sim}X\right)$ 时，

令 $U=X^{\sim}X$ 是 $\mathcal{M}$ 对称的，有 $X=A^{\sim}U$ 且有 $G_1U=U^{*}G_1$，通过左乘 G_2A^{*} 得 $A^{\sim}U=(UA)^{\sim}=X$ 成立。

同理当 $X=XAX=X(AX)^{\sim}=XG_1(AX)^{*}G_1=XG_1X^{*}G_2G_2A^{*}G_1=\left(XX^{\sim}\right)A^{\sim}$ 时，

令 $V=XX^{\sim}$ 是 $\mathcal{M}$ 对称的，有 $X=VA^{\sim}$ 且有 $VG_2=G_2V^{*}$，通过右乘 $A^{*}G_1$ 得 $VA^{\sim}=(AV)^{\sim}=X$ 成立。□

定理 3.3.3 是 Zlobec 公式在闵氏空间中的形式，它告诉了我们，对于一类满足特殊条件的矩阵，计算其的闵氏逆可以通过这种更简便的方式，我们也给出一个算例加以验证。

定理 3.3.3 令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，若 $rk(A)=rk\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)$，且矩阵 $A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}$ 和 $\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}$ 是 $\mathcal{M}$ 对称的，则 $A^{\mathfrak{M}}=A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}$。

证明 由引理 2.2.4 可得 $rk(A)=rk\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)=rk\left(A^{\sim}\right)$ 等价于 $A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\in A\{1,2\}$，

下验证是否还有 $A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\in A\{3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 成立。

由 $A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}$ 和 $\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}$ 是 $\mathcal{M}$ 对称的，可以得到：

$A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}=\left(A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}\right)^{\sim}$ 和 $\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}=\left(\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\right)^{\sim}$

从而有，

$$(3^{\mathfrak{M}})\quad \begin{aligned}\left(AA^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\right)^{\sim}&=\left(A\left(A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}\right)^{\sim}A^{\sim}\right)^{\sim}=\left(AG_2\left(A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}\right)^{*}G_2G_2A^{*}G_1\right)^{\sim}\\&=G_1G_1\left(AA^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}\right)G_2A^{*}G_1=AA^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\end{aligned}$$

$$(4^{\mathfrak{M}})\quad \begin{aligned}\left(A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}A\right)^{\sim}&=\left(A^{\sim}\left(\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\right)^{\sim}A\right)^{\sim}=\left(G_2A^{*}G_1G_1\left(\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}\right)^{*}G_1A\right)^{\sim}\\&=G_2A^{*}G_1\left(\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}A\right)G_2G_2=A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}A\end{aligned}$$

综合得 $X\in A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 即有 $X=A^{\mathfrak{M}}$ 成立。□

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$。

计算得

$$A^{\sim}=G_2A^{*}G_1=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad A^{\sim}AA^{\sim}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

满足 $rk(A)=rk\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)=2$，且有

$$(A^{\sim}AA^{\sim})^{-}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad \left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

即满足矩阵 $A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}$ 和 $\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}$ 是 $\mathcal{M}$ 对称的，从而由定理 3.3.3 可得闵氏逆

$$A^{\mathfrak{M}}=A^{\sim}\left(A^{\sim}AA^{\sim}\right)^{-}A^{\sim}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

代入验证符合引理 2.2.1 的定义。

为了方便后续定理的证明，下面先给出了一个关于闵氏伴随的引理。

引理 3.3.4 令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$， $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 则：

(a) $X\in A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}$ 当且仅当 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$；

(b) $X\in A\{1,4^{\mathfrak{M}}\}$ 当且仅当 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$；

(c) $X\in A\{1,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 当且仅当 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$， $XAA^{\sim}=A^{\sim}$。

证明 (a) ($\Rightarrow$) $A^{\sim}AX=A^{\sim}(AX)^{\sim}=G_2A^*G_1G_1(AX)^*G_1=G_2(AXA)^*G_1=(AXA)^{\sim}=A^{\sim}$

($\Leftarrow$)由 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$ 我们等式两边同时取闵氏空间中的共轭转置，有：

$A=(A^{\sim}AX)^{\sim}=G_1(G_2A^*G_1AX)^*G_2=G_1X^*A^*G_1A=(AX)^{\sim}A$ 再右乘 X 得 $AX=(AX)^{\sim}AX$，

再由 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$ 同时左乘 $X^{\sim}$ 得 $(AX)^{\sim}=(AX)^{\sim}AX=AX$ 代入上式可得 $A=(AX)^{\sim}A=AXA$。

同理，(b) ($\Rightarrow$) $XAA^{\sim}=(XA)^{\sim}A^{\sim}=G_2(XA)^*G_2G_2A^*G_1=G_2(AXA)^*G_1=(AXA)^{\sim}=A^{\sim}$

($\Leftarrow$) 由 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$ 我们等式两边同时取闵氏空间中的共轭转置，有：

$A=(XAA^{\sim})^{\sim}=G_1(XAG_2A^*G_1)^*G_2=AG_2A^*X^*G_1=A(XA)^{\sim}$ 左乘 X 得 $XA=XA(XA)^{\sim}$，

再由 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$ 同时右乘 $X^{\sim}$ 得 $(XA)^{\sim}=XA(XA)^{\sim}=XA$ 代入上式有 $A=A(XA)^{\sim}=AXA$。

综合(a)和(b)可得(c)成立。 □

由上述引理 3.3.4 容易得到下面的定理 3.3.5，它也是闵氏逆的一种刻画。

定理 3.3.5 令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$， $X\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 则，

(a) $X=A^{\mathfrak{M}}$ 当且仅当 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$ 且 $X^{\sim}XA=X^{\sim}$；

(b) $X=A^{\mathfrak{M}}$ 当且仅当 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$ 且 $AXX^{\sim}=X^{\sim}$。

证明(a)由引理 3.3.4 可知 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$ 等价于 $X\in A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}$，且 $X^{\sim}XA=X^{\sim}$ 等价于 $X\in A\{2,4^{\mathfrak{M}}\}$ 从而可得 $X=A^{\mathfrak{M}}$ 当且仅当 $A^{\sim}AX=A^{\sim}$ 且 $X^{\sim}XA=X^{\sim}$。

同理，(b)也由引理 3.3.4 可知 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$ 等价于 $X\in A\{1,4^{\mathfrak{M}}\}$，且 $AXX^{\sim}=X^{\sim}$ 等价于 $X\in A\{2,3^{\mathfrak{M}}\}$

从而可得 $X=A^{\mathfrak{M}}$ 当且仅当 $XAA^{\sim}=A^{\sim}$ 且 $AXX^{\sim}=X^{\sim}$。 □

下面本文研究了闵氏逆的极大类表示问题，首先通过上面的性质定理快速代入验证即可得到的以下集合的表示，令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，我们有：

$$A\{1,4^{\mathfrak{M}}\}=\left\{X_1+Y(I_m-AX_1)\mid X_1\in A\{1,4^{\mathfrak{M}}\},Y\in\mathbb{C}^{n\times m}\right\};$$

$$A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}=\left\{X_2+(I_n-X_2A)Y\mid X_2\in A\{1,3^{\mathfrak{M}}\},Y\in\mathbb{C}^{n\times m}\right\};$$

$$A\{1,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}=\left\{X_3+(I_n-X_3A)Y(I_m-AX_3)\mid X_3\in A\{1,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\},Y\in\mathbb{C}^{n\times m}\right\}$$

定理 3.3.6 给出了 $A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 也就是 $A^{\mathfrak{M}}$ 的表示式。其揭露了 $A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}$、$A\{1,4^{\mathfrak{M}}\}$ 与 $A^{\mathfrak{M}}$ 之间的关系。

定理 3.3.6 令 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，对任意 $X_1\in A\{1,4^{\mathfrak{M}}\}$、 $X_2\in A\{1,3^{\mathfrak{M}}\}$，若 $A^{\mathfrak{M}}$ 存在，则有 $A^{\mathfrak{M}}=X_1AX_2$

证明我们记 $X=X_1AX_2$，我们可以直接代入验证 $X\in A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$ 有：

(1) $AXA=(AX_1A)X_2A=AX_2A=A$

(2) $XAX=X_1(AX_2A)X_1AX_2=X_1(AX_1A)X_2=X_1AX_2=X$

($3^{\mathfrak{M}}$) $AX=AX_1AX_2=AX_2=(AX_2)^{\sim}=(AX_1AX_2)^{\sim}=(AX)^{\sim}$

($4^{\mathfrak{M}}$) $XA=X_1AX_2A=X_1A=(X_1A)^{\sim}=(X_1AX_2A)^{\sim}=(XA)^{\sim}$

综合即证得 $X \in A\{1,2,3^{\mathfrak{M}},4^{\mathfrak{M}}\}$，故 $A^{\mathfrak{M}} = X = X_1AX_2$ □

基金项目

国家自然科学基金(批准号：11861037)。

参考文献

[1] Penrose, R. (1955) A Generalized Inverse for Matrices. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**, 406-413. https://doi.org/10.1017/S0305004100030401

[2] Renardy, M. (1996) Singular Value Decomposition in Minkowski Space. *Linear Algebra and Its Applications*, **236**, 53-58. https://doi.org/10.1016/0024-3795(94)00124-3

[3] Meenakshi, A.R. (2000) Generalized Inverses of Matrices in Minkowski Space. *Proceedings of National Seminar on Algebra and Its Applications*, **1**, 1-14.

[4] Kılıçman, A. and Al Zhour, Z. (2007) The Representation and Approximation for the Weighted Minkowski Inverse in Minkowski Space. *Mathematical and Computer Modelling*, **47**, 363-371. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2007.03.031

[5] Al-Zhour, Z (2015) Extension and Generalization Properties of the Weighted Minkowski Inverse in a Minkowski Space for an Arbitrary Matrix. *Computers and Mathematics with Applications*, **70**, 954-961. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.06.015

[6] Wang, H.X., Li, N. and Liu, X.J. (2021) The m-Core Inverse and Its Applications. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 2491-2509. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1680597

[7] Wang, H.X., Wu, H. and Liu, X.J. (2021) The m-Core-EP Inverse in Minkowski Space. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 2577-2601.

[8] Meenakshi, A.R. and Krishnaswamy, D. (2002) On Sums of Range Symmetric Matrices in Minkowski Space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **25**, 137-148.

[9] Meenakshi, A.R. and Krishnaswamy, D. (2006) Product of Range Symmetric Block Matrices in Minkowski Space. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **29**, 59-68

[10] 何旭初, 孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1990.