Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(8), 2307-2312
Published Online August 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.138237

Hans汉斯

贝塔函数在积分计算中的一个应用

魏贺杰[1]，王馨雨[2]

[1]上海立信会计金融学院统计与数学学院，上海
[2]合肥工业大学数学学院，安徽 合肥

收稿日期：2023年6月30日；录用日期：2023年7月31日；发布日期：2023年8月7日

摘 要

对于定积分的计算来说，典型的做法是先求出原函数，再利用牛顿莱布尼茨公式代入上下限进行计算。但对于一些难度较大的定积分计算问题，如果只局限于这种方法，计算过程将会非常的繁杂，甚至计算不出结果。本文借助第一类欧拉积分 – 贝塔函数的对称性和递推公式等性质推导出形如 $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x$ (其中 $m,n\in\mathbb{N}$)的定积分的递推公式和计算公式，从而为这类特殊的定积分计算提供了一种有效的解决方法，大大简化了计算量。

关键词

贝塔函数，积分计算

An Application of Beta Function in Integral Calculation

Hejie Wei[1], Xinyu Wang[2]

[1]Institute of Statistics and Mathematics, Shanghai Lixin University of Accounting and Finance, Shanghai
[2]School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei Anhui

Received: Jun. 30th, 2023; accepted: Jul. 31st, 2023; published: Aug. 7th, 2023

Abstract

For the calculation of definite integrals, the classical method is to find the original function, and then use Newton's Leibniz formula to substitute the upper and lower limits for calculation. However, for some difficult definite integral calculation problems, if it is limited to this method, the calculation process will be very complicated, and even the result cannot be calculated. By using

文章引用: 魏贺杰, 王馨雨. 贝塔函数在积分计算中的一个应用[J]. 理论数学, 2023, 13(8): 2307-2312.
DOI: 10.12677/pm.2023.138237

the properties of Euler integral-beta function, the recursive and calculation formulas are induced for the problem $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x$ (where *m*, *n* are non-negative integers), which provides the effective method of solving some special types of definite integral calculation for us and simplifies the calculation greatly.

Keywords

Beta Function, Integral Calculation

1. 引言

对于难以利用初等函数的性质进行求解的定积分问题，含参量积分作为一种积分工具发挥了重要的作用，而贝塔函数作为含参量积分中的重要特例，自然也为解决积分计算问题带来了极大的便利[1]。在日常的学习过程中，我们经常遇到形如 $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x$ (其中 $m,n\in\mathbb{N}$)的问题。一般情况下，求解这类定积分的常规方法是：结合三角函数之间的关系利用分部积分法求解出原函数，再利用牛顿莱布尼兹公式解决问题[2]。但在实际计算中，这种方法的适度并不高，尤其是当被积函数中的指数 m,n 不断增大时，计算过程将会非常的繁琐。本文利用第一类欧拉积分——贝塔函数的对称性、递推公式等性质得到 $I(m,n)$ 的递推公式和通用计算公式，从而大大地降低了计算量，有效地拓展了计算定积分的新思路。

2. 预备知识

定义 1 [1]第一类欧拉积分 $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 也称为贝塔函数，其中 $p,q>0$.

引理 1 [1]贝塔函数具有对称性： $B(p,q)=B(q,p)$。

引理 2 [1]贝塔函数的其他形式有：

$$B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}x\sin^{2q-1}x\mathrm{d}x. \tag{1}$$

引理 3 [1]贝塔函数的递推公式：

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q). \tag{2}$$

由对称性可推出也有递推公式：

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1). \tag{3}$$

3. 主要结果

为方便起见，记

$$I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x \quad (\text{其中 } m,n\in\mathbb{N}),$$

本节首先利用贝塔函数的相关性质推导出 $I(m,n)$ 的递推公式，然后通过分类讨论参数 m,n 的奇偶性得到 $I(m,n)$ 的计算公式。

结论 1 设 m,n 为非负整数，则

$$I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}, & m,n\text{不全是偶数};\\ \dfrac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & m,n\text{都是偶数}.\end{cases}\tag{4}$$

证结合(1)和(2)可知，

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}x\sin^{2q-1}x\mathrm{d}x=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q).$$

在上式中，令 $2p-1=m$， $2q-1=n$ ，则有

$$2I(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=\frac{\frac{m-1}{2}}{\frac{m+1}{2}+\frac{n+1}{2}-1}B\left(\frac{m-1}{2},\frac{n+1}{2}\right)=\frac{m-1}{m+n}B\left(\frac{m-1}{2},\frac{n+1}{2}\right).$$

又由(1)知，

$$B\left(\frac{m-1}{2},\frac{n+1}{2}\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-2}x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=2I(m-2,n).$$

于是

$$2I(m,n)=2\cdot\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n).$$

因此，我们得到递推公式

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n).\tag{5}$$

同理，结合(1)和(3)可得

$$I(m,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2).\tag{6}$$

结合(5)和(6)，我们得到 $I(m,n)$ 的递推公式如下：

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\frac{n-1}{m+n}I(m,n-2).$$

接下来通过对 m 和 n 的奇偶性进行分类(共四类)讨论来推导出 $I(m,n)$ 的通项公式。

(i) 当 m,n 都是偶数时，反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(5)可得

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\cdots=\frac{(m-1)(m-3)\cdots1}{(m+n)(m+n-2)\cdots(n+2)}I(0,n).\tag{7}$$

反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(6)可得

$$I(0,n)=\frac{n-1}{n}I(0,n-2)=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots1}{n(n-2)\cdots2}I(0,0).$$

将上式代入(7)式有

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}I(0,0).$$

又由 $I(0,0)=\frac{\pi}{2}$ 可知，当 m 与 n 都是偶数时，

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

(ii) 当 m 是偶数，n 是奇数时，反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(6)可得

$$I(0,n)=\frac{n-1}{n}I(0,n-2)=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}I(0,1).$$

由于 m 是偶数，所以(7)式仍成立。将其代入(7)式有

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}I(0,1).$$

又由 $I(0,1)=1$ 可知，当 m 是偶数，n 是奇数时，

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}.$$

(iii) 当 m 是奇数，n 是偶数时，反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(5)可得

$$I(m,n)=\frac{m-1}{m+n}I(m-2,n)=\cdots=\frac{(m-1)(m-3)\cdots 1}{(m+n)(m+n-2)\cdots(n+3)}I(1,n). \tag{8}$$

反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(6)可得

$$I(1,n)=\frac{n-1}{n+1}I(1,n-2)=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{(n+1)(n-1)\cdots 3}I(1,0).$$

将上式代入(8)式有

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}I(1,0).$$

又由 $I(1,0)=1$ 可知，当 m 是奇数，n 是偶数时，

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}.$$

(iv) 当 m,n 都是奇数时，反复应用 $I(m,n)$ 的递推公式(6)可得

$$I(1,n)=\frac{n-1}{n+1}I(1,n-2)=\cdots=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{(n+1)(n-1)\cdots 4}I(1,1).$$

由于 m 是奇数，所以(8)式仍成立。将其代入(8)式有

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}\cdot 2\cdot I(1,1).$$

由 $I(1,1)=\dfrac{1}{2}$ 可知，当 m 与 n 都是奇数时，

$$I(m,n)=\frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!}.$$

综合上述**(i)~(iv)**的结果即可得到(4)式。 □

接下来我们通过一个具体的例子来体会公式(4)的简便之处。

例 1、计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\sin^3 x\mathrm{d}x$.

解：通常情况下，使用一般的积分计算方法时，我们可以求解出原函数并且利用牛顿莱布尼兹公式：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\sin^3 x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\sin^2 x\cdot\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)\cdot\sin x\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\sin x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x\cdot\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\mathrm{d}(\cos x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^8 x\mathrm{d}(\cos x)\\&=\frac{2}{63}.\end{aligned}$$

上述求解方法的计算过程比较复杂，不难想象当被积函数的指数再稍微增加一点，计算将更加的繁琐。文献[3]先将其转化为贝塔函数，然后利用贝塔函数和伽马函数之间的关系逐渐递推计算得出。但是如果通过我们上述总结的(4)式(对应于 $m=6,n=3$)则可轻松的计算出结果：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\cdot\sin^3 x\mathrm{d}x=I(6,3)=\frac{5!!\times 2!!}{9!!}=\frac{2}{63}.$$

将结论 1 进行拓展推广，不难得到被积函数 $\cos^m x\cdot\sin^n x$ 在 $[0,\pi]$ 和 $[0,2\pi]$ 上的定积分的求解公式。

推论 1 对于任意的非负整数 m 与 n，则

$$J(m,n)=\int_0^{\pi}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m\text{为奇数};\\ 2I(m,n), & m\text{为偶数}.\end{cases}$$

推论 2 对于任意的非负整数 m 与 n，则

$$K(m,n)=\int_0^{2\pi}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m,n\text{不全为偶数};\\ 4I(m,n), & m,n\text{都为偶数}.\end{cases}$$

证利用三角函数的奇偶性与对称性即可得到推论 1 和推论 2，这里不再详述具体推导过程。

4. 结论

本文借助贝塔函数的性质给出了形如 $I(m,n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\cdot\sin^n x\mathrm{d}x$ (其中 $m,n\in\mathbb{N}$)的一类定积分的递推公式和通用的计算公式，并且对此公式进行了拓展，得到被积函数在积分区域 $[0,\pi]$ 和 $[0,2\pi]$ 上的定积分的求解公式，为这类特殊的定积分的计算提供了高效的解决方法。本文的研究结果只适用于自然数，对于任意的整数推导这类定积分的计算公式将是一个新的研究方向。

致　谢

作者非常感谢相关文献对本文的启发以及审稿专家提出的宝贵意见。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(1197118)；上海市级一流专业建设点项目。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析(下册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 205-207.

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 206-208.

[3] 田兵. 欧拉积分在求解定积分中的应用[J]. 阴山学刊(自然科学版), 2009, 23(3): 22-24.