Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2485-2498
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139255

不含4-圈和6-圈平面图的最优列表$L(2,1)$-标号

杨明月

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2023年7月28日；录用日期：2023年8月30日；发布日期：2023年9月8日

摘　要

列表$L(2,1)$-标号是一个重要的可以应用到信道分配问题中的优化问题，k-$L(2,1)$-标号是指对于一个平面图G满足映射$\varphi:V(G)\to\{0,1,\cdots,k\}$，使得若$d(u,v)=1$，则$|\varphi(u)-\varphi(v)|\geq 2$；若$d(u,v)=2$，则$|\varphi(u)-\varphi(v)|\geq 1$，其中$d(u,v)$是图中点$u$和点$v$之间的距离。记$\lambda_{(2,1)}^{l}(G)=\min\{k|G\text{有一列}k\text{-}L(2,1)\text{-标号}\}$是列表$L(2,1)$-标号数。在2018年，Zhu and Bu等人在全局最优化杂志中得出这样一个结论：对于不含4-圈和6-圈的平面图G有$\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\leq\max\{\Delta+15,29\}$。本文改进了这个结论的上界$\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\leq\max\{\Delta+12,24\}$。

关键词

列表L(2,1)-标号，平面图，圈

Optimal List $L(2,1)$-Labelling without 4-Cycles and 6-Cycles of Planar Graphs

Mingyue Yang

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: Jul. 28th, 2023; accepted: Aug. 30th, 2023; published: Sep. 8th, 2023

Abstract

The list $L(2,1)$-labelling can be applied to channel assignment problems which is an important optimization issue. The k-$L(2,1)$-labelling is a mapping $\varphi:V(G)\to\{0,1,\cdots,k\}$ of a graph G, such that $|\varphi(u)-\varphi(v)|\geq 2$ if $d(u,v)=1$ and $|\varphi(u)-\varphi(v)|\geq 1$ if $d(u,v)=2$, where $d(u,v)$ is the distance

文章引用: 杨明月. 不含 4-圈和 6-圈平面图的最优列表 $L(2,1)$-标号[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2485-2498.
DOI: 10.12677/pm.2023.139255

between the vertex u and the vertex v in the graph. Denote $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)=\min\{k|G \text{ has a list } k\text{-}L(2,1)\text{-labelling}\}$ be the list L(2,1)-labelling number. In 2018, Zhu and Bu *et al.* demonstrated the result that $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\le\max\{\Delta+15,29\}$ for the planar graph G without 4-cycles and 6-cycles. In this paper we improve the upper bound of this result to $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\le\max\{\Delta+12,24\}$.

Keywords

List L(2,1)-Labelling, Planar Graph, Cycles

1. 引言

本文只考虑简单图，有限图和无向图。如果图 G 是平面图，则它的边只在端点处相交并能在一个平面上表示出来。

平面图的 L(2,1)-标号源于无线电发射机的信道分配问题。在 1991 年，Roberts [1]提出了最优信道分配问题，即给无线电发射机分配频率，使接近的无线电发射机不受干扰并且使用的频率数量最小。随后，Griggs 和 Yeh [2]给出了 L(2,1)-标号的定义。在无线网络中，将无线电发射机视为图中的一个顶点，其中每个顶点都有自己的信道列表，然后从列表中选择一个，使得距离为 2 的顶点有不同的选择，相邻的顶点选择的信道至少相距 2 个信道。

k-L(2,1)-标号是指一个平面图满足映射 $\varphi:V(G)\to\{0,1,\cdots,k\}$，使得对任意点 u 和 v，若 $d(u,v)=1$，则 $|\varphi(u)-\varphi(v)|\ge 2$ 且若 $d(u,v)=2$，则 $|\varphi(u)-\varphi(v)|\ge 1$，其中 $d(u,v)$ 是图中点 u 和点 v 之间的距离。记 $\lambda_{(2,1)}(G)=\min\{k|\text{有一个}k\text{-}L(2,1)\text{-标号}\}$ 是图 G 的 L(2,1)-标号数。

若图 G 中的每个顶点 v 都有一个可容许标号集 $L(v)$ 且它可以选择其中一个元素作为它的标号，则称 L 为一个列表配置。设 $|L(v)|$ 是集合 $L(v)$ 的元素个数。若 $|L(v)|\ge k$，则称 L 是 k-列表配置。对于一个(k + 1)-列表配置 L，若图 G 有一个 k-L(2,1)-标号，则称图 G 有一个列表 L(2,1)-标号(简记为 L-L(2,1)-标号)。设 $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)=\min\{k|\text{有一个}L\text{-}L(2,1)\text{-标号}\}$ 为图 G 的 L-L(2,1)-标号数。

图的列表 L(2,1)-标号一直是一个研究热点。在 1992 年，Griggs 和 Yeh [2]证明了 $\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta^2+2\Delta$ 并提出了下面的猜想。

猜想 1 对于任意一个 $\Delta\ge 2$ 的平面图 G，$\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta^2$。

目前，此猜想还没有被完全解决。但下面的结果已被证明。在 1996 年，Chang 和 Kuo [3]证明了对于平面图 G，有 $\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta^2+\Delta$。在 2008 年，Gon\c{c}alves [4]改进了上面的结果并证明了 $\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta^2+\Delta-2$。Zhu 和 Lv 等人[5]证明了若平面图 G 不含 4-圈，5-圈，则有 $\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta+12$。Zhu 和 Hou 等人[6]证明了若平面图 G 不含 4-圈，则有 $\lambda_{(2,1)}(G)\le\Delta+19$。Zhou 和 Sun [7]证明了若平面图 G 不含 3-圈，相交 4-圈，则有 $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\le\Delta+12$。Zhu 和 Bu 等人[8]证明了若平面图 G 不含 4-圈，6-圈，则有 $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\le\max\{\Delta+15,29\}$。其他相关的结论可见参考文献[8]。本文我们证明了下面的定理。

定理 1 若平面图 G 不含 4-圈和 6-圈，则有 $\lambda_{(2,1)}^{l}(G)\le\max\{\Delta+12,24\}$。

此定理与 Zhu 和 Bu [8]等人的结果相比，上界至少下降了 3。与国内外研究动态相比，此定理具有很强的可行性，在短圈限制条件下，$\Delta+12$ 已经是一个比较小的上界了。

2. 一些概念和符号的说明

在平面图 G 中，我们用 $V(G)$，$E(G)$ 和 $F(G)$ 分别表示顶点集，边集，面集。它们可分别缩写为 V，E，F。我们用 $d(v)$ 表示顶点 v 的度数，用 $d(f)$ 表示面 f 的度数。此外，最大度和最小度分别用 $\Delta(G)$，$\delta(G)$ 表示(分别简写为Δ和 δ)。顶点 v 是一个 k-点，k^+-点和 k^--点这分别意味着 $d(v)=k$，$d(v)\geq k$ 和 $d(v)\leq k$。面 f 是一个 k-面，k^+-面和 k^--面，这分别意味着 $d(f)=k$，$d(f)\geq k$ 和 $d(f)\leq k$。顶点 v 的 k-邻点是指点 v 有一个度为 k 的邻点。设 $n_k(v)$ 为顶点 v 的 k-邻点的个数。我们用 $d(u,v)$ 表示顶点 u 和顶点 v 之间的距离。若两个 4-圈有一个公共点，则称它们相交。

我们用 $t(v)$ 表示与点 v 关联 3-面的数量。若点 v 在 3-面中，则称它为三角点，否则为非三角点。若 $d(v)=k$ 且 v 是一个三角点，则称 v 是一个三角 k-点，否则他是一个非三角 k-点。设[uvw]-面是一个顶点分别为 u，v，w 的 3-面。设[x,y,z]-面是有 $d(u)=x$，$d(v)=y$，$d(w)=z$ 的[uvw]-面。在 7^+-面中，若三角 4-点与非三角 2-点相邻，则称它为坏 4-点。若 $d(v)=k$，则 v 的邻点按顺时针方向分别表示为 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 且点 v 邻点的度数分别为 $x_1,x_2,\cdots,x_k$。设 $x_{k-1}\leq x_k$，其中 $k\geq 2$ 且 v_{k-1} 和 v_k 同为三角点或非三角点。若 $x_1=3$，则设 x_{11}，x_{12} 别为点 v_1 除点 v 之外其余邻点的度数。

设 $d(v)=3$ 和 $x_1=3$，若 $x_2\geq 6$ 且 $x_3\geq 10$，则点 v 称为强 3-点，否则称为弱 3-点。

3. 主要结果的证明

在本节中，我们主要利用反证法和权转移规则给出证明过程。定义 $|F(v)|$ 为点 v 上的禁用标号数。假设图 G 是不满足定理的最小反例，设 $\max\{\Delta+12,24\}=a$。对于不含 4-圈和 6-圈的图 G，我们有 $\lambda^l_{(2,1)}(G)>a$。为了便于证明，我们先给出图 G 的一些结构性质。在图 G 的结构特性证明过程中，我们通过删除图 G 的某条边或某个点可得到子图 H。由于图 G 的最小性，H 有满足定理的 φ'。我们通过将 φ' 扩展到 G 的 L-$L(2,1)$-标号 φ，得到矛盾，其中 $L=a+1$。

引理 1 [8]平面图 G 是连通的且 $\delta(G)\geq 2$。

引理 2 [8] G 不含相邻的 2-点。

引理 3 如果 $f=[uvw]$ 是一个 $d(v)=2$ 的 3-面，则 $d(u)+d(v)\leq\Delta+9$。

证明 假设 $d(u)+d(v)\leq\Delta+9$。我们知 $H=G-v$ 有一个 L-$L(2,1)$-标号。因为 $F(v)\leq d(u)+d(w)-4+6\leq\Delta+11$，$|L(v)|-|F(v)|=2$。所以可以选择剩余两个数中的其中一个对图 G 中的点 v 进行重新标号，这样得出了矛盾。

引理 4 对于 $d(v)=3$ 的点 v。

1) 如果 $x_1=2$，则要么 $v_2v_3\notin E$，$x_2\geq 4$ 和 $x_3\geq 10$，要么 $v_2v_3\in E$，$x_2\geq 9$ 和 $x_3\geq 9$。

2) 如果 $x_1=3$，则 $x_2\geq 6$ 和 $x_3\geq 10$，或 $x_{11}\geq 6$ 和 $x_{12}\geq 10$。对于 $v_2v_3\in E$，若 $x_1=3$，则 $x_2\geq 6$ 和 $x_3\geq 10$，或 $x_{11}\geq 6$ 和 $x_{12}\geq 10$。

证明 1) 假设 $x_2\leq 3$ （$v_2v_3\in E$，$x_2\leq 8$）。我们知 $H=G-v_1$ 有一个 L-$L(2,1)$-标号。删除 v 本身的标号。因为 $F(v)\leq 1+3-1+3+\Delta-1+3=\Delta+8$ （$v_2v_3\in E$，$F(v)\leq 1+8-2+3+\Delta-2+3=\Delta+11$），$F(v_1)\leq\Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，v_1 依次重新标号，矛盾。

2) 假设 $x_2\leq 5$ 和 $x_{11}\leq 5$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-$L(2,1)$-标号。删除 v，v_1 本身的标号。因为 $F(v)\leq 2+5-1+3+\Delta-1+3=\Delta+11$，$F(v_1)\leq 2+5-1+3+\Delta-1+3=\Delta+11$，所以可以对 G 中的 v 和 v_1 分别进行重新标号，矛盾。对于 $v_2v_3\in E$，假设 $x_2\leq 5$ 和 $x_{11}\leq 5$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-$L(2,1)$-标号。

删除 v 和 v_1 本身的标号。因为 $F(v)\le 2+5-2+3+\Delta-2+3=\Delta+9$，$F(v_1)\le 2+\Delta+5-2+6=\Delta+11$。我们能对 G 中的 v，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

引理 5 G 无[3,3,7⁻]-面。

证明假设 $f=[uvw]$ 是一个 3-面，其中 $d(u)=3$，$d(v)=3$ 且 $d(w)\le 7$。我们知 $H=G-uv$ 有一个 L-L(2.1)-标号。删除 u 和 v 本身的标号。因为 $F(u)\le\Delta-1+3+7-2+3+1=\Delta+11$，$F(v)\le\Delta-1+3+1+7-2+3=\Delta+11$，所以我们能用剩下的两个数分别对 u 和 v 进行重新标号，矛盾。

引理 6 假设 $d(v)=4$，则下面结论成立。

1) 如果 $x_1=x_2=2$，则要么 $v_3v_4\notin E$，$x_3\ge 4$ 和 $x_4\ge 10$，要么 $v_3v_4\in E$，$x_3\ge 8$ 和 $x_4\ge 9$。

2) 如果 $x_1=2$，$x_2=x_3=3$，则 $x_4\ge 10$。如果 $x_1=2$，$x_2=3$ 和 $x_3=4$，则 $x_4\ge 8$。

3) 如果 $x_1=x_2=x_3=3$，则 $x_4\ge 8$。

4) 对 $v_3v_4\in E$。如果 $x_1=2$，$x_2=3$，则 G 没有[3,4,4⁺]-面。其中若 $4\le x_3\le 7$，则 $x_4\ge 10$。

5) 对 $v_3v_4\in E$。如果 $x_1=2$，$4\le x_2\le 7$，则 $x_3+x_4\ge 13$。

6) 对 $v_3v_4\in E$。如果 $x_1=x_2=3$，则 $x_3+x_4\ge 13$。如果 $x_1=3$，$4\le x_2\le 7$ 和 $x_3=3$，则 $x_4\ge 5$。

7) 对 $v_1v_2\in E$，$v_3v_4\in E$。如果 $x_1=x_2=3$，则 $x_2\ge 5$ 且 $x_4\ge 5$。如果 $x_1=3$，$4\le x_2\le 6$ 和 $4\le x_3\le 6$，则 $x_4\ge 8$。

证明 1) 假设 $x_3\le 3$（$v_3v_4\in E$，$x_3\le 7$）。我们知 $H=G-v_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v，v_2 上本身的标号。因为 $F(v)\le 2+3-1+3+\Delta-1+3=\Delta+9$（$v_3v_4\in E$，$F(v)\le 2+7-2+3+\Delta-2+3=\Delta+11$），$F(v_2)\le\Delta+4$，$F(v_1)\le\Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，v_2，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

2) 假设 $x_4\le 9$（$x_4\le 7$）。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 1+(3-1+3)\times 2+9-1+3=22$（$F(v)\le 1+3-1+3+4-1+3+7-1+3=21$），$F(v_1)\le\Delta-1+3+3=\Delta+5$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

3) 假设 $x_4\le 7$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 1+(3-1+3)\times 2+7-1+3=20$，$F(v_1)\le\Delta-1+3+3=\Delta+5$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

4) 假设 G 有一个[3,4,4⁺]面，其中 $d(v)=4$，$x_3=3$ 和 $x_4\ge 4$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 2+3-1+3+\Delta-2+3=\Delta+8$，$F(v_1)\le\Delta-1+3+3=\Delta+5$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

假设 $x_4\le 9$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 1+3-1+3+7-2+3+9-2+3=24$，$F(v_1)\le\Delta-1+3+3=\Delta+5$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

5) 假设 $x_3+x_4\le 12$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 1+7-1+3+12-4+6=24$，$F(v_1)\le\Delta-1+3+3=\Delta+5$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

6) 假设 $x_3+x_4\le 12$。我们知 $H=G-v$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 上本身的标号。因为 $F(v)\le(3-1+3)\times 2+12-4+6=24$。所以可以对 G 中的 v 依次进行重新标号，矛盾。

7) 假设 $x_4\le 4$。我们知 $H=G-vv_3$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_3 上本身的标号。因为 $F(v)\le 3-1+3+7-1+3+1+4-2+3=20$，$F(v_3)\le\Delta-1+3+4-2+3+2=\Delta+9$。所以可以对 G 中的 v 和 v_3 依次进行重新标号，矛盾。

8) 假设 $x_2\le 5$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v)\le 1+4-2+3+3-2+3+\Delta-2+3=\Delta+11$，$F(v_1)\le\Delta-1+3+4-2+3+2=\Delta+9$。所以可以对 G 中的

v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

9) 假设 $x_4 \le 7$。我们知 $H = G - vv_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v) \le 1+6-2+3+6-2+3+7-2+3 = 23$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+6-2+3+2 = \Delta+11$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

引理 7 假设 $d(v)=5$，则下列结论成立。

1) 如果 $x_1 = x_2 = x_3 = 2$，则要么 $v_4v_5 \notin E$ 且 $x_4 + x_5 \ge 15$，要么 $v_4v_5 \in E$，$x_4 \ge 7$ 且 $x_5 \ge 9$。

2) 如果 $x_1 = x_2 = 2$，$x_3 = 3$，则要么 $v_4v_5 \notin E$ 且 $x_4 + x_5 \ge 11$，要么 $v_4v_5 \in E$ 且 $x_4 + x_5 \ge 13$。

3) 如果 $x_1 = 2$，$x_2 = x_3 = x_4 = 3$。则要么 $v_4v_5 \notin E$ 且 $x_5 \ge 4$，或 $v_4v_5 \in E$ 且 $x_5 \ge 8$。

4) 对 $v_4v_5 \in E$。如果 $x_1 = x_2 = 2$，$4 \le x_3 \le 7$ 和 $x_4 = 3$，则 $x_5 \ge 8$。

5) 如果 $v_2v_3 \in E$，$v_4v_5 \in E$，$x_1 = 2$ 和 $x_2 = x_4 = 3$，则 $x_3 \ge 8$ 或 $x_5 \ge 8$。

证明 1) 假设 $x_4 + x_5 \le 14$（$v_4v_5 \in E$，$x_4 \le 6$）。我们知 $H = G - v_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v，v_2 和 v_3 上本身的标号。因为 $F(v) \le 3+14-2+6 = 21$（$v_4v_5 \in E$，$F(v) \le 3+6-2+3+\Delta-2+3 = \Delta+11$），$F(v_2) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$，$F(v_3) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，v_2，v_3 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

2) 假设 $x_4 + x_5 \le 10$（$v_4v_5 \in E$，$x_4 + x_5 \le 12$）。我们知 $H = G - v_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v 和 v_2 上本身的标号。因为 $F(v) \le 2+3-1+3+10-2+6 = 21$（$v_4v_5 \in E$，$F(v) \le 2+3-1+3+12-4+6 = 21$），$F(v_2) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$。所以可以对 G 中的 v，v_2 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

3) 假设 $x_5 \le 3$（$v_4v_5 \in E$，$x_5 \le 7$）。我们知 $H = G - vv_1$ 有一个 $L\text{-}L$(2，1)-标号。删除 v 和 v_1 上本身的标号。因为 $F(v) \le 1+(3-1+3)\times 4 = 21$（$v_4v_5 \in E$，$F(v) \le 1+(3-1+3)\times 2+3-2+3+7-2+3 = 23$），$F(v_1) \le \Delta-1+3+4 = \Delta+6$。所以可以对 G 中的 v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

4) 假设 $x_5 \le 7$。我们知 $H = G - vv_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v，v_1 和 v_2 上本身的标号。因为 $F(v) \le 2+7-1+3+3-2+3+7-2+3 = 23$，$F(v_2) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$。所以可以对 G 中的 v，v_2 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

5) 假设 $x_3 \le 7$ 和 $x_5 \le 7$。我们知 $H = G - vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v，v_1，v_2 和 v_3 上本身的标号。因为 $F(v_2) \le \Delta-1+3+7-2+3+1 = \Delta+11$，$F(v_3) \le \Delta-1+3+7-2+3+1 = \Delta+11$，$F(v) \le 3+(7-2+3)\times 2 = 19$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$。所以可以对 G 中的 v_2，v_3，v 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

引理 8 假设 $d(v)=6$，则下列结论成立。

1) 如果 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，则要么 $v_5v_6 \notin E$，$x_5 \ge 4$ 且 $x_6 \ge 4$，要么 $v_5v_6 \in E$，$x_5 \ge 4$ 且 $x_6 \ge 8$。

2) 如果 $x_1 = x_2 = x_3 = 2$，$x_4 = 3$，则要么 $v_5v_6 \notin E$ 且 $x_5 + x_6 \ge 7$，要么 $v_5v_6 \in E$ 且 $x_5 + x_6 \ge 11$。

证明 1) 假设 $x_5 \le 3$（$v_5v_6 \in E$，$x_5 \le 3$）。我们知 $H = G - v_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v，v_2，v_3 和 v_4 上本身的标号。因为 $F(v) \le 4+3-1+3+\Delta-1+3 = \Delta+11$（$v_5v_6 \in E$，$F(v) \le 4+3-1+3+\Delta-1+3 = \Delta+11$），$F(v_2) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$，$F(v_3) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$，$F(v_4) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+2 = \Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，v_2，v_3，v_4 和 v_1 依次进行重新标号，矛盾。

2) 假设 $x_5 + x_6 \le 6$（$v_5v_6 \in E$，$x_5 + x_6 \le 10$）。我们知 $H = G - vv_1$ 有一个 $L\text{-}L(2,1)$-标号。删除 v，v_1，v_2 和 v_3 上本身的标号。因为 $F(v) \le 3+3-1+3+6-2+6 = 18$（$v_5v_6 \in E$，$F(v) \le 3+3-1+3+10-4+6 = 20$），$F(v_3) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$，$F(v_2) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$，$F(v_1) \le \Delta-1+3+3 = \Delta+5$。所以可以对 G 中的 v，v_3，v_2，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

引理 9 假设 $d(v)=7$，则下列结论成立。

如果 $x_1=x_2=\cdots=x_5=2$，则要么 $v_6v_7\notin E$，$x_6+x_7\geq 7$，要么 $v_6v_7\in E$，$x_6\geq 4$ 且 $x_7\geq 4$。

证明 假设 $x_6+x_7\leq 6$（$v_6v_7\in E$，$x_6\leq 3$）。我们知 $H=G-v_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v，v_2，…，v_5 上本身的标号。因为 $F(v)\leq 5+6-2+6=15$（$v_6v_7\in E$，$F(v)\leq 5+3-2+3+\Delta-2+3=\Delta+10$），$F(v_2)\leq\Delta-1+3+2=\Delta+4$，…，$F(v_5)\leq\Delta-1+3+2=\Delta+4$，$F(v_1)\leq\Delta-1+3+2=\Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，$v_{1=2}$，…，v_5，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

引理 10 假设 $d(v)=8$，则下列结论成立。

如果 $x_1=x_2=\cdots=x_7=2$，则 $x_8\geq 6$。如果 $x_1=x_2=\cdots=x_6=2$ 且 $v_7v_8\in E$，则 $x_7+x_8\geq 13$。

证明 假设 $x_8\leq 5$。我们知 $H=G-v_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v，v_2，…，v_7 上本身的标号。因为 $F(v)\leq 7+5-1+3=14$，$F(v_2)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$，…，$F(v_7)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$，$F(v_1)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$。所以可以对 G 中的 v，v_2，…，v_7，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

假设 $x_7+x_8\leq 12$。我们知 $H=G-vv_1$ 有一个 L-L(2,1)-标号。删除 v，v_1，…，v_6 上本身的标号。因为 $F(v)\leq 6+12-4+6=20$，$F(v_1)\leq\Delta-1+3+2=\Delta+4$，…，$F(v_6)\leq\Delta-1+3+2=\Delta+4$。所以可以对 G 中的 v，v_1，…，v_6 依次进行重新标号，矛盾。

引理 11 假设 $d(v)=9$，则下列结论成立。

如果 $x_1=x_2=\cdots=x_8=2$，则 $x_9\geq 3$。

证明 假设 $x_9\leq 2$。我们知 $H=G-v_1$ 有一个 L-L(2.1)-标号。删除 v，v_2，…，v_8 上本身的标号。因为 $F(v)\leq 8+2-1+3=12$，$F(v_2)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$，…，$F(v_8)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$，$F(v_1)\leq\Delta-1+3+1=\Delta+3$。所以可以对 G 中的 v，v_2，…，v_8，v_1 依次进行重新标号，矛盾。

4. 定理的证明

设 G 是连通图，则由欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 和公式 $\sum_{v\in V}d(v)=\sum_{f\in F}d(f)=2|E|$ 知：

$$\sum_{v\in V}\left(\frac{3}{2}d(v)-5\right)+\sum_{f\in F}\left(d(f)-5\right)=-10。$$

设 $w(v)=\frac{3}{2}d(v)-5$，$w(f)=d(f)-5$。其中对于 $x\in V\cup F$，令 $w(x)$ 为初始权函数。基于上面的结构特性选择恰当的权转移规则去重新分配这些权值，从而得到一个新的权值。记 $w'(x)$ 为最后一次权转移后的权函数，其中 $x\in V\cup F$。在完成权转移过程之后，权值的和是不会发生变化的。

然而，我们对于所有的 $x\in V\cup F$，得到的 $w'(x)$ 是一个非负数。于是就产生了下面的矛盾。

$$0\leq\sum_{x\in V\cup F}w'(x)=\sum_{x\in V\cup F}w(x)=-10<0。$$

进而证明上述极小反例不存在，从而证明定理 1 是成立的。

下面给出具体的权转移规则。

$R1$ 每个 7^+-面给它相邻的 3-面 $\frac{1}{6}$。

$R2$ 每个 3-面从它关联的每个点得 $\frac{1}{2}$。

$R3$ 每个非三角 2-点从它相邻的 3^+-点得 1。每个三角 2-点从它相邻的 10^+-点得 $\frac{5}{4}$。

$R4.1$ 对于 $uv\in E$，设 v 是一个非三角 3-点。若 $4\leq d(u)\leq 9$，则点 u 给点 v 转 $\frac{1}{2}$。若 $d(u)\geq 10$，则点 u 给点 v 转 1。

$R4.2$ 对于三角 3-点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面。表 1 说明了点 u 给点 v 转权的各个情况。

Table 1. Triangular 3-vertex v
表 1. 三角 3-点 v

$d(u)$	4~7		8^+	9^+	10^+
$d(w)$	4~9	10^+	3^+	9^+	6^+
$\tau(u \to v)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1

$R4.3$ 强 3-点给它相邻的弱 3-点转 $\frac{1}{2}$。

$R5.1$ 对于 $uv \in E$，设 v 是一个非三角 4-点。若 $8 \le d(u) \le 9$，则点 u 给点 v 转 $\frac{1}{2}$。若 $d(u) \ge 10$，则点 u 给点 v 转 1。

$R5.2$ 对于三角 4-点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面。表 2 说明了点 u 给点 v 转权的各个情况。

Table 2. Triangular 4-vertex v
表 2. 三角 4-点 v

$d(u)$	5~7	7		8^+	9^+	10^+	
$d(w)$	3	6	7	3^+	8^+	4	3 或 5~7
$\tau(u \to v)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	1

$R6.1$ 对于 $uv \in E$，设 v 是一个非三角 5-点。若 $8 \le d(u) \le 11$，则点 u 给点 v 转 $\frac{1}{2}$。若 $d(u) \ge 12$，则点 u 给点 v 转 1。

$R6.2$ 对于三角 5-点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面。表 3 说明了点 u 给点 v 转权的各个情况。

Table 3. Triangular 5-vertex v
表 3. 三角 5-点 v

$d(u)$	7		8^+	9^+	10^+
$d(w)$	6	7	3^+	7^+	3
$\tau(u \to v)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	1

$R7$ 对于三角 6-点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面。表 4 说明了点 u 给点 v 转权的各个情况。

Table 4. Triangular 6-vertex
表 4. 三角 6-点 v

$d(u)$	7^+	8^+
$d(w)$	7^+	3^+
$\tau(u \to v)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$R8$ 7^+-面给他相邻的坏 4-点转 $\frac{1}{4}$。

接下来我们验证：对 $\forall x \in V \cup F$，$w'(x) \ge 0$。首先验证所有的面，$w'(f) \ge 0$，$f \in F$。

如果 $d(f)=3$，$w(f)=3-5=-2$。因为平面图 G 不含 4-圈和 6-圈，所以 3-面必与 7^+-面相邻。

由 $R1$，$R2$ 知：$w'(f) \ge -2+\frac{1}{6}\times 3+\frac{1}{2}\times 3=0$。

如果 $d(f)=5$，则 $w'(f)=w(f)=d(f)-5=0$。

对于 $d(f)=7$ 的面 f。若 7^+-面不关联坏 4-点，则 7^+-面至多关联 $d(f)$ 个 3-面。由 $R1$ 得，$w'(f) \ge d(f)-5-\frac{1}{6}d(f)=\frac{5}{6}d(f)>0$。若 7^+-面关联坏 4-点。我们使 7^+-面关联最多的坏 4-点和邻最多的 3-面，即在 7^+-面中非三角 2-点的邻点都是坏 4-点且 7^+-面中剩余的边都与 3-面相邻。设 n_{3f} 为与 7^+-面相邻的 3-面的数量且 n_{bad} 为与 7^+-面关联的坏 4-点的数量。由引理 2，我们得到了下列的关系，$d(f)=n_{3f}+n_{bad}$。因为坏 4-点可以包含 7^+-面上的 3 个点，与 7^+-面相邻的 3-面可以与 7^+-面上的 2 个非三角 2-点相邻。所以我们得到 $n_{bad}=\left\lfloor \frac{d(f)}{3} \right\rfloor \times 2$。由 $R1$，$R8$ 得，

$$w'(f) \ge d(f)-5-\frac{1}{6}\left[d(f)-n_{bad}\right]-\frac{1}{4}n_{bad}=\left\lceil \frac{7}{9}d(f) \right\rceil-5>0。$$

然后验证所有的点，$w'(v) \ge 0$，其中 $v \in V$。由引理 1 知，$\delta(G) \ge 2$，因此我们考虑 2^+-点。

1) $d(v)=2$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 2-5=-2$。若点 v 是一个非三角点，则由引理 2，点 v 与 2 个 3^+-点相邻。由 $R3$ 得，$w'(v) \ge -2+1\times 2=0$。若点 v 是一个三角点，则由引理 3，点 v 与 2 个 10^+-点相邻。

由 $R3$ 得，$w'(v) \ge -2-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\times 2=0$。

2) $d(v)=3$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 3-5=-\frac{1}{2}$。由引理 4 知，$n_2(v) \le 1$。

$t(v)=0$，设 $x_1 \le x_2 \le x_3$。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$，则由引理 4(1)知，$x_2 \ge 4$ 和 $x_3 \ge 10$。由 $R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=0$。如果 $n_2(v)=0$，设 $x_1=3$。若 $x_2 \le 5$ 或 $x_3 \le 9$，则由引理 4(2)知，$x_{11} \ge 6$ 和 $x_{12} \ge 10$。所以 v 是一个弱 3-点，和 v_1 是一个强 3-点。由 $R4.3$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_2 \ge 6$ 和 $x_3 \ge 10$，则 v 是一个强 3-点。由 $R4.1$，$R4.3$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}>0$。

设 $x_3 \ge x_2 \ge x_1 \ge 4$，由 $R4.1$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 3=1>0$。

$t(v)=1$，设 $v_2v_3 \in E$ 和 $x_2 \le x_3$。由引理 3 知，v_2 和 v_3 不是 2-点。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$，则由引理 4(1)知 $x_2 \ge 9$ 和 $x_3 \ge 9$。由 $R2$，$R3$，$R4.2$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}+1\times 2=0$。如果 $n_2(v)=0$，设 $x_1=3$。若 $x_2 \le 5$ 或 $x_3 \le 9$，则由引理 4(2)知，$x_{11} \ge 6$ 和 $x_{12} \ge 10$。因此 v 是一个弱 3-点和 v_1 是一个强 3-点。如果 $x_2=3$，则由引理 5 知，$x_3 \ge 8$。由 $R2$，$R4.2$，$R4.3$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_3 \ge x_2 \ge 4$，则由 $R2$，$R4.2$，$R4.3$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2=0$。如果 $x_2 \ge 6$ 和 $x_3 \ge 10$，则 v 是一个强 3-点。由 $R2$，$R4.2$，$R4.3$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$。设 $x_1 \ge 4$。如果 $x_2=3$，则由引理 5 知，$x_3 \ge 8$。由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_3 \ge x_2 \ge 4$，则由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$ 得，$w'(v) \ge -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times 2=0$。

3) $d(v)=4$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 4-5=1$。由引理 6 知，$n_2(v)\le 2$。

$t(v)=0$，$x_1\le x_2\le x_3\le x_4$。如果 $n_2(v)=2$，设 $x_1=x_2=2$，则由引理 6(1)知，$x_3\ge 4$ 和 $x_4\ge 10$。由 $R3$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-1\times 2+1=0$。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$ 和 $x_2=x_3=3$，则由引理 6(2)知，$x_4\ge 10$。由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}\times 2+1=0$。设 $x_2=3$，$x_3=4$，则由引理 6(2)知，$x_4\ge 8$。由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。设 $x_4\ge x_3\ge x_2\ge 4$，由 $R3$ 得，$w'(v)\ge 1-1=0$。如果 $n_2(v)=0$，设 $x_1=x_2=x_3=3$，则由引理 6(3)知，$x_4\ge 8$。由 $R4.1$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}=0$。设 $x_2\ge x_1\ge 3$ 和 $x_4\ge x_3\ge 4$，由 $R4.1$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}\times 2=0$。

$t(v)=1$，设 $v_3v_4\in E$，$x_1\le x_2$ 和 $x_3\le x_4$。由引理 3 知，v_3 和 v_4 均不是 2-点。如果 $n_2(v)=2$，设 $x_1=x_2=2$，则由引理 6(1)知 $x_3\ge 8$，$x_4\ge 9$。由 $R2$，$R3$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-1\times 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1=0$。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$，则 v 是一个坏 4-点。设 $x_2=3$。由引理 6(4)，$x_4\ge x_3\ge 4$。如果 $x_3=4$，则由引理 6(4)知，$x_4\ge 10$。由 $R2$，$R3$，$R4.1$，$R5.2$，$R8$ 知，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=0$。如果 $5\le x_3\le 7$，则由引理 6(4)知，$x_4\ge 10$。由 $R2$，$R3$，$R4.1$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$。如果 $x_3\ge 8$ 和 $x_4\ge 8$，则由 $R2$，$R3$，$R4.1$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2=0$。设 $4\le x_2\le 7$，则由引理 6(5)知，$x_3+x_4\ge 13$。因此 $(x_3,x_4)\in\{(3,10^+),(4,9^+),(5,8^+),(6,7^+),(7^+,7^+)\}$，由 $R4.2$ 和 $R5.2$ 知，v_3 和 v_4 至少给点 v 转 $\frac{1}{2}$，再由 $R2$，$R3$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。设 $x_2\ge 8$。如果 $x_3=3$，$4\le x_4\le 9$，则由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R5.1$，$R8$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$。如果 $x_3=3$，$x_4\ge 10$，由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R5.1$，$R8$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}>0$。如果 $x_3\ge 4$，$x_4\ge 4$，由 $R2$，$R3$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)=0$，设 $x_1=x_2=3$，则由引理 6(6)知，$x_3+x_4\ge 13$。因此 $(x_3,x_4)\in\{(3,10^+),(4,9^+),(5,8^+),(6,7^+),(7^+,7^+)\}$，由 $R4.2$ 和 $R5.2$ 知，v_3 和 v_4 至少给点 v 转 $\frac{1}{2}$。再由 $R2$，$R4.1$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。设 $x_1=x_3=3$，$4\le x_2\le 7$。由引理 6(6)得 $x_4\ge 5$。如果 $5\le x_4\le 7$，由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$。如果 $x_4\ge 8$，由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。设 $x_1=x_3=3$，$x_2\ge 8$。由引理 5 知，$x_4\ge 4$。由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.1$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。设 $x_1=3$，$x_2\ge 4$，$x_3\ge 4$，$x_4\ge 4$。由 $R2$，$R4.1$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。设 $x_1\ge 4$，$x_2\ge 4$，$x_3\ge 3$。由引理 5 知，$x_4\ge 4$，则由 $R2$，$R4.2$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。

$t(v)=2$，设 $v_1v_2\in E$，$v_3v_4\in E$，$x_1\le x_2$，$x_3\le x_4$ 和 $x_1\le x_3$。由引理 3 知，v_1，v_2，v_3 和 v_4 不是 2-点。如果 $x_1=x_3=3$，则由引理 6(7)知，$x_2\ge 5$ 和 $x_4\ge 5$。如果 $5\le x_2\le 7$ 和 $5\le x_4\le 7$。则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v)\ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4}\times 2=0$。如果 $5\le x_2\le 7$ 和 $x_4\ge 8$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，

$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_2 \ge 8$ 和 $x_4 \ge 8$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{2}\times 2=0$。如果 $x_1=3$，$4 \le x_2 \le 6$，$4 \le x_3 \le 6$，则由引理 6(7)知，$x_4 \ge 8$。由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}>0$。如果 $x_1=3$，$4 \le x_2 \le 6$，$x_4 \ge x_3 \ge 7$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{4}>0$。如果 $x_1=3$，$x_2=7$，$x_4 \ge x_3 \ge 4$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$。如果 $x_1=3$，$x_2 \ge 8$，$x_4 \ge x_3 \ge 4$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果对于所有的 $i \in \{1,2,3,4\}$ 有 $x_i \ge 4$，则由 $R2$ 得，$w'(v) \ge 1-\frac{1}{2}\times 2=0$。

4) $d(v)=5$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 5-5=\frac{5}{2}$。由引理 7 知，$n_2(v) \le 3$。

$t(v)=0$，设 $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_5$。如果 $n_2(v)=3$，设 $x_1=x_2=x_3=2$，则由引理 7(1)知，$x_4+x_5 \ge 15$。因此 $(x_4,x_5) \in \{(3,12^+),(4,11^+),(5,10^+),(6,9^+),(7^+,8^+)\}$，由 $R4.1$ 和 $R6.1$ 得，v_4 和 v_5 至少给点 v 转 $\frac{1}{2}$。再由 $R3$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 3+\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)=2$，设 $x_1=x_2=2$，$x_3=3$，则由引理 7(2)知，$x_4+x_5 \ge 11$。因此 $(x_4,x_5) \in \{(3,8^+),(4,7^+),(5^+,6^+)\}$，由 $R4.1$ 和 $R6.1$ 得，v_4 和 v_5 至少给点 v 转 0。再由 $R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}+0=0$。设对于所有的 $i \in \{3,4,5\}$，有 $x_i \ge 4$。由 $R3$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2=\frac{1}{2}>0$。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$。如果 $x_2=x_3=x_4=3$，则由引理 7(3)知，$x_5 \ge 4$。由 $R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1-\frac{1}{2}\times 3=0$。如果 $n_3(v) \le 2$，由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1-\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}>0$。如果 $n_2(v)=0$，设对于所有的 $i \in \{1,2,3,4,5\}$ 有 $x_i \ge 3$。则由 $R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\times 5=0$。

$t(v)=1$，设 $v_4v_5 \in E$，$x_1 \le x_2 \le x_3$ 和 $x_4 \le x_5$。由引理 3 知，v_4 和 v_5 均不是 2-点。如果 $n_2(v)=3$，设 $x_1=x_2=x_3=2$，则由引理 7(1)知，$x_4 \ge 7$ 和 $x_5 \ge 9$。由 $R2$，$R3$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 3-\frac{1}{2}+1=0$。如果 $n_2(v)=2$，设 $x_1=x_2=2$。如果 $x_3=3$，则由引理 7(2)知，$x_4+x_5 \ge 13$。因此 $(x_4,x_5) \in \{(3,10^+),(4,9^+),(5,8^+),(6,7^+),(7^+,7^+)\}$，由 $R6.2$，v_4 和 v_5 至少给点 v 转 $\frac{1}{2}$。则由 $R2$，$R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $4 \le x_3 \le 7$ 和 $x_4=3$，则由引理 7(4)知，$x_5 \ge 8$。由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_3 \ge 8$，$x_4=3$，则由引理 5 知，$x_5 \ge 4$。如果 $x_5=4$，由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$。如果 $x_5 \ge 5$，由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R6.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。如果 $x_i \ge 4$，其中 $i \in \{3,4,5\}$，由 $R2$，$R3$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1\times 2-\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)=1$，设 $x_1=2$。如果 $x_2=x_3=3$ 和 $x_4=3$，则由引理 7(3)知，$x_5 \ge 8$。由 $R2$，$R3$，$R4.1$，$R4.2$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1-\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$。如果 $x_2=3$，$x_3 \ge 4$ 和 $x_4=3$，则由引理 5 知，$x_5 \ge 4$。如果 $x_5=4$，由 $R2$，$R3$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$。如果 $x_5 \ge 5$，由 $R2$，$R3$，$R4.1$，

$R4.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。如果 $x_2 \ge 3$，$x_3 \ge 3$，$x_5 \ge x_4 \ge 4$，由 $R2$，$R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} = 0$。如果 $n_2(v) = 0$，设 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 3$，则由引理 5 知，$x_5 \ge 4$。如果 $x_5 = 4$，由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$。如果 $x_5 \ge 5$，由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。如果 $x_3 \ge x_2 \ge x_1 \ge 3$，$x_5 \ge x_4 \ge 4$，则由 $R2$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \times 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$。

$t(v) = 2$，设 $v_2v_3 \in E$，$v_4v_5 \in E$，$x_2 \le x_3$，$x_4 \le x_5$ 和 $x_2 \le x_4$。由引理 3 知，v_2，v_3，v_4 和 v_5 均不是 2-点。设 $x_1 = 2$。如果 $x_2 = x_4 = 3$，则由引理 5 知，$x_3 \ge 4$ 和 $x_5 \ge 4$；由引理 7(5)知，$x_3 \ge 8$ 或者 $x_5 \ge 8$。如果 $x_3 = 4$，则 $x_5 \ge 8$。由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$。如果 $5 \le x_3 \le 7$，则 $x_5 \ge 8$。由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} > 0$。如果 $x_3 \ge 8$，则由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R6.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$。如果 $x_2 = 3$，$x_i \ge 4$，其中 $i \in \{3,4,5\}$，则由 $R2$，$R3$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} = 0$。如果 $x_i \ge 4$，其中 $i \in \{2,3,4,5\}$，则由 $R2$，$R3$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - 1 - \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} > 0$。设 $x_1 \ge 3$。如果 $x_2 = x_4 = 3$，则由引理 5 知，$x_3 \ge 4$ 和 $x_5 \ge 4$。由 $R2$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。如果 $x_i \ge 4$，其中 $i \in \{2,3,4,5\}$，则由 $R2$，$R4.1$，$R5.2$ 得，$w'(v) \ge \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2 = 1 > 0$。

5) $d(v) = 6$，$w(v) = \frac{3}{2} \times 6 - 5 = 4$，由引理 8 知，$n_2(v) \le 4$。

$t(v) = 0$，$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_6$。如果 $n_2(v) = 4$，设 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，则由引理 8(1)知，$x_5 \ge 4$ 和 $x_6 \ge 4$。由 $R3$ 知，$w'(v) \ge 4 - 1 \times 4 = 0$。如果 $n_2(v) = 3$，设 $x_1 = x_2 = x_3 = 2$，$x_4 = 3$，则由引理 8(2)知，$x_5 + x_6 \ge 7$。因此 $x_5 \ge 3$ 和 $x_6 \ge 4$。由 $R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge 4 - 1 \times 3 - \frac{1}{2} \times 2 = 0$。如果 $n_2(v) \le 2$，由 $R3$，$R4.1$ 得，$w'(v) \ge 4 - 1 \times 2 - \frac{1}{2} \times 4 = 0$。

断言 A：对于 $d(v) = 6$ 的点 v，设 $f = [uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面，则 $\tau(v \to \{u, w, f\}) \le 1$。

由引理 3 知，u 和 w 均不是 2-点。如果 $d(u) = 3$，则由引理 5 知，$d(w) \ge 4$。如果 $d(w) = 4$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$ 得，$\tau(v \to \{u, w, f\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$。如果 $d(w) \ge 5$，则由 $R2$，$R4.2$，$R6.2$，$R7$ 得，$\tau(v \to \{u, w, f\}) = \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1$。如果 $d(u) \ge 4$，$d(w) \ge 4$，则由 $R2$，$R5.2$，$R6.2$ 得，$\tau(v \to \{u, w, f\}) = 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$。

$t(v) = 1$，设 $v_5v_6 \in E$，$x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ 和 $x_5 \le x_6$。由引理 3 知，v_5 和 v_6 均不是 2-点。如果 $n_2(v) = 4$，设 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$，则由引理 8(1)知，$x_5 \ge 4$ 和 $x_6 \ge 8$。由 $R7$ 得，v_5 和 v_6 至少给点 v 转 $\frac{1}{2}$。再由 $R2$，$R3$ 得，$w'(v) \ge 4 - 1 \times 4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$。如果 $n_2(v) = 3$，设 $x_1 = x_2 = x_3 = 2$，$x_4 = 3$，则由引理 8(2)知，$x_5 + x_6 \ge 11$。

因此$(x_5,x_6)\in\{(3,8^+),(4,7^+),(5,6^+)\}$。由$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$得，$v_5$和$v_6$至少给点$v$转0。$v_5$和$v_6$至少给点$v$转0。再由$R2$，$R3$，$R4.1$得，$w'(v)\ge 4-1\times 3-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。设$x_4\ge 4$，则由$R3$，断言A得，$w'(v)\ge 4-1\times 3-1=0$。如果$n_2(v)\le 2$，则由$R3$，$R4.1$，断言A得，$w'(v)\ge 4-1\times 2-\frac{1}{2}\times 2-1=0$。

$t(v)=2$。由$R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$得，点v至多给相邻的非三角点转1。则由断言A得，$w'(v)\ge 4-t(v)-[6-2t(v)]=t(v)-2\ge 0$。

6) $d(v)=7$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 7-5=\frac{11}{2}$，由引理9知，$n_2(v)\le 5$。

$t(v)=0$，设$x_1\le x_2\le\cdots\le x_7$。如果$n_2(v)=5$，设$x_1=x_2=\cdots=x_5=2$，则由引理9知，$x_6+x_7\ge 7$。因此$x_6\ge 3$，$x_7\ge 4$。由$R3$，$R4.1$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 5-\frac{1}{2}=0$。如果$n_2(v)\le 4$，则由$R3$，$R4.1$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 4-\frac{1}{2}\times 3=0$。

断言B：对于$d(v)=7$的点v，设$f=[uvw]$是一个关联点v的3-面，则$\tau(v\to\{u,w,f\})\le 1$。由引理3知，u和w均不是2-点。如果$d(u)=3$，则由引理5知，$d(w)\ge 4$。如果$d(w)=4$，则由$R2$，$R4.2$，$R5.2$得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$。如果$d(w)\ge 5$，则由$R2$，$R4.2$，$R6.2$，$R7$得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1$。如果$d(u)\ge 4$，$4\le d(w)\le 5$，则由$R2$，$R4.2$，$R6.2$，$R7$得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=0+0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1$。如果$d(u)\ge 4$，$d(w)\ge 6$，则由$R2$，$R4.2$，$R6.2$，$R7$得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}=1$。

$t(v)=1$，设$v_6v_7\in E$，$x_1\le x_2\le\cdots\le x_5$和$x_6\le x_7$。由引理3知，$v_6$和$v_7$均不是2-点。如果$n_2(v)=5$，设$x_1=x_2=\cdots=x_5=2$，设由引理9知，$x_6\ge 4$和$x_7\ge 4$。由$R2$，$R3$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 5-\frac{1}{2}=0$。如果$n_2(v)\le 4$，设$x_5\le 3$，$x_6=3$，则由引理5知，$x_7\ge 4$。如果$x_7\ge 4$，则由$R2$，$R3$，$R4.1$，$R4.2$，$R5.2$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$。如果$x_7\ge 5$，则由$R2$，$R3$~$R7$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。如果$x_6\ge 4$，$x_7\ge 4$，则由$R2$，$R3$~$R7$得，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-1\times 4-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$。

$t(v)=2$。由$R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$得，点v至多给非三角点转1。则由断言B，$w'(v)\ge\frac{11}{2}-t(v)-[7-2t(v)]=t(v)-\frac{3}{2}>0$。

7) $d(v)=8$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 8-5=7$。

$t(v)=0$。由引理10，$n_2(v)\le 7$。如果$n_2(v)=7$，则由引理10知，$x_8\ge 6$。由$R3$，$R7$得，$w'(v)\ge 7-1\times 7=0$。如果$n_2(v)\le 6$，则由$R3$，$R4.1$得，$w'(v)\ge 7-1\times 6-\frac{1}{2}\times 2=0$。

断言C：对于$d(v)=8$的点v，设$f=[uvw]$是一个关联点v的3-面，则$\tau(v\to\{u,w,f\})\le\frac{3}{2}$。

由引理3知，u和w均不是2-点。如果$d(u)\ge 3$，$d(w)\ge 3$，由$R2$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。

$t(v)=1$，设 $v_7v_8\in E$，$x_1\le x_2\le\cdots\le x_6$ 和 $x_7\le x_8$。由引理 10 知，$n_2(v)\le 6$。如果 $n_2(v)=6$，则由引理 10 知，$x_7+x_8\ge 13$。因此 $(x_7,x_8)\in\{(3,10^+),(4,9^+),(5,8^+),(6^+,7^+)\}$。由 $R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$ 得，v_7 和 v_8 从点 v 至多得 $\frac{1}{2}$。再由 $R2$，$R3$ 得，$w'(v)\ge 7-1\times 6-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)\le 5$，由 $R2$，$R3$，断言 C 得，$w'(v)\ge 7-1\times 5-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$。

$t(v)=2$。由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$ 得，点 v 至多给相邻的非三角点转 1。则由断言 C，$w'(v)\ge 7-\frac{3}{2}t(v)-[8-2t(v)]=\frac{1}{2}t(v)-1>0$。

$d(v)=9$，$w(v)=\frac{3}{2}\times 9-5=\frac{17}{2}$。

$t(v)=0$。由引理 11 知，$n_2(v)\le 8$。如果 $n_2(v)=8$，则由引理 11 知，$x_9\ge 3$。由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$ 得，$w'(v)\ge\frac{17}{2}-1\times 8-\frac{1}{2}=0$。如果 $n_2(v)\le 7$，则由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$ 得，$w'(v)\ge\frac{17}{2}-1\times 7-\frac{1}{2}\times 2=\frac{1}{2}>0$。

断言 D：对于 $d(v)=9$ 的点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面，则 $\tau(v\to\{u,w,f\})\le\frac{3}{2}$。

由引理 3 知，u 和 w 均不是 2-点。如果 $d(u)\ge 3$，$d(w)\ge 3$，则由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$ 得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 或 $\tau(v\to\{u,w,f\})=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$。

$t(v)=1$。由 $R3$，$R4.1$，$R5.1$，$R6.1$ 得，点 v 至多给相邻的非三角点转 1。则由断言 D，$w'(v)\ge\frac{17}{2}-\frac{3}{2}t(v)-[9-2t(v)]=\frac{1}{2}t(v)-\frac{1}{2}\ge 0$。

9) $d(v)\ge 10$。

断言 E：对于 $d(v)=10$ 的点 v，设 $f=[uvw]$ 是一个关联点 v 的 3-面，则 $\tau(v\to\{u,w,f\})\le 2$。

如果 $d(u)=2$，$d(w)\ge 10$，由 $R2$，$R3$ 得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{5}{4}+0+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}<2$。如果 $d(u)=d(w)=3$，由 $R2$，$R4.2$ 得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<2$。如果 $d(u)=3$，$d(w)\ge 4$，由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$ 得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$。如果 $d(u)\ge 4$，$d(w)\ge 4$，由 $R2$，$R4.2$，$R5.2$，$R6.2$，$R7$ 得，$\tau(v\to\{u,w,f\})=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=2$，或者 $\tau(v\to\{u,w,f\})=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$。

由 $R3$-$R7$，断言 E，$w'(v)\ge\frac{3}{2}t(v)-5-[d(v)-2t(v)]=\frac{1}{2}d(v)-5\ge 0$。

到这里，我们得到了这样一个结果：对每个 $x\in V\cup F$，有 $w'(x)\ge 0$。由此得到矛盾 $0\le\sum_{x\in V\cup F}w'(x)=\sum_{x\in V\cup F}w(x)=-10<0$。从而定理 1 成立。

基金项目

山东省自然科学基金(ZR2020MA045)。

参考文献

[1] Roberts, F.S. (1991) T-Colorings of Graphs: Recent Results and Open Problems. *Discrete Mathematics*, **93**, 229-245.

https://doi.org/10.1016/0012-365X(91)90258-4

[2] Griggs, J.R. and Yeh, R.K. (1992) Labelling Graphs with a Condition at Distance 2. *Discrete Mathematics*, **5**, 586-595. https://doi.org/10.1137/0405048

[3] Chang, G.J. and Kuo, D. (1996) The L(2,1)-Labeling Problem on Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **9**, 309-316. https://doi.org/10.1137/S0895480193245339

[4] Gonalves, D. (2008) On the L(p, 1)-Labelling of Graphs. *Discrete Mathematics*, **308**, 1405-1414. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.075

[5] Zhu, H.Y., Lv, X.Z., Wang, C.Q. and Chen, M. (2012) Labelling Planar Graphs without 4, 5-Cycles with a Condition on Distance Two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **26**, 52-64. https://doi.org/10.1137/10080453X

[6] Zhu, H.Y., Hou, L.F., Chen, W. and Lv, X.Z. (2014) The L(p,q)-Labelling of Planar Graphs without 4-Cycles. *Discrete Applied Mathematics*, **162**, 355-363. https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.08.039

[7] Zhou, W.J. and Sun, L. (2021) The L(2, 1)-Labeling of Planar Graphs with Neither 3-Cycles Nor Intersect 4-Cycles. *Journal of Physics*: *Conference Series*, **1769**, 012044. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1769/1/012044

[8] Zhu, J.L., Bu, Y.H., Miltiades, P.P., Du, H.W., Wang, H.J. and Liu, B. (2018) Optimal Channel Assignment and L(p, 1)-Labeling. *Journal of Global Optimization*, **72**, 539-552. https://doi.org/10.1007/s10898-018-0647-9