Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2683-2689
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139275

加权Bergman空间上以调和多项式为符号函数的Toeplitz算子的亚正规性

郑　益，杨纪龙

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2023年8月13日；录用日期：2023年9月14日；发布日期：2023年9月22日

摘　要

本文刻画了在复平面上开单位圆盘中一般加权Bergman空间上以调和多项式为符号的Toeplitz算子的亚正规性。

关键词

加权Bergman空间，Toeplitz算子，亚正规，调和多项式

Hyponormality of the Toeplitz Operators with the Harmonic Polynomial Functions on Weighted Bergman Spaces

Yi Zheng, Jilong Yang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Aug. 13th, 2023; accepted: Sep. 14th, 2023; published: Sep. 22nd, 2023

Abstract

In this paper, we describe the hyponormality of the Toeplitz operators with harmonic polyno-mialsas symbols on the weighted Bergman space in the open unit disk on the complex plane.

Keywords

Weighted Bergman Space, Toeplitz Operator, Hyponormal, Harmonic Polynomial

文章引用: 郑益, 杨纪龙. 加权 Bergman 空间上以调和多项式为符号函数的 Toeplitz 算子的亚正规性[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2683-2689. DOI: 10.12677/pm.2023.139275

1. 引言

Toeplitz 算子的研究一直是算子理论研究的重点内容之一。Toeplitz 算子理论将 Toeplitz 矩阵和函数空间建立纽带，使能够对无限维矩阵进行变换运算，为一般算子的研究提供模板和技术方法。Toeplitz 算子也广泛应用于数值计算、信号检测与处理、和量子物理学等学科中。

设 H 表示无穷维复可分 Hilbert 空间，$B(H)$ 表示其上所有有界线性算子构成的 Banach 代数。$T\in B(H)$ 称为正规算子，若 $T^*T=TT^*$；$T\in B(H)$ 称为亚正规算子若 $T^*T-TT^*\geq 0$。亚正规算子是正规算子，正规算子作为亚正规算子的一个特殊情况。由于正规算子理论完备性，非正规算子的研究更能激发学者们的兴趣。亚正规算子是重要的非正规算子。此外，亚正规算子的研究与量子力学紧密联系，如海森堡对易关系、波算子、散射矩阵和扰动等。Bergman 空间是指区域上平方可积的解析空间，Bergman 空间是重要的解析函数空间理论，与算子理论一直以来的公开问题——不变子空间问题相关联。在 20 世纪 80 年代，与 Bergman 空间相关的算子理论研究蓬勃发展，这一时期的成果斐然，体现在 1990 年出版的《函数空间中的算子理论》一书中。在 20 世纪 90 年代，学者们对 Bergman 空间的研究取得了函数论和算子论两方面的突破。随着研究的进步，人们不再满足把算子理论局限于经典 Bergman 空间，进一步将算子理论上升到加权 Bergman 空间。诸多学者在加权 Bergman 空间上的研究，尽管面临着许多挑战，但是收获了丰富的理论成果，极大地推动了算子理论的发展。本文主要研究复平面上开单位圆盘上一般加权 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的亚正规性，Bergman 空间和加权 Bergman 空间上的关于亚正规的 Toeplitz 算子的研究，见参考文献[1] [2] [3] [4] [5]。

记 $\mathbb{D}$ 为复平面上的开单位圆盘。将 $\mathbb{D}$ 上的测度 v 定义为 $\mathrm{d}v\left(re^{i\theta}\right)=\mathrm{d}\eta(r)\times\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}$，这里 $\mathrm{d}\eta$ 代表 $[0,1)$ 上的概率测度。Bergman 空间是 $\mathbb{D}$ 上关于 $\mathrm{d}v$ 测度的平方可积空间 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}v)$ 的解析闭子空间，记为 $A_v^2(\mathbb{D})$。序列 $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ 定义为

$$\tau_t:=\int_{\mathbb{D}}|z|^t\,\mathrm{d}v(z)=\int_{[0,1)}r^t\,\mathrm{d}\eta(r).$$

这样 Bergman 空间 $A_v^2(\mathbb{D})$ 可表示成

$$A_v^2(\mathbb{D})=\left\{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n:\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\tau_{2n}<\infty\right\},$$

其上内积有对应的表示

$$\left\langle\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{b_n}\tau_{2n}.$$

对于自然数 n，

$$e_n(z)=\frac{z^n}{\sqrt{\tau_{2n}}}\quad(z\in\mathbb{D})$$

是 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上的正规正交基。进而 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上再生核为

$$K_z^{(v)}(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{e_n(z)}e_n(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_{2n}}\overline{z}^n w^n \quad (z,w\in\mathbb{D})$$

本文总记 $k_i(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n+i}z^{2n+i}\in A_v^2(\mathbb{D}),i=0,1$。这样 $A_v^2(\mathbb{D})$ 中的每个函数都有形如 $k_0(z)$ 和 $k_1(z)$ 这样的分解表达式。

记 $L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}v)$ 是 $\mathbb{D}$ 上关于测度 $\mathrm{d}v$ 的本性可测函数空间。若 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}v)$，称 T_φ 为在 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上以 φ 为符号的 Toeplitz 算子，H_φ 为以 φ 为符号的 Hankel 算子

$$T_\varphi f=P(\varphi f),H_\varphi f=(I-P)(\varphi f),$$

其中 $f\in A_v^2(\mathbb{D})$，P 是从 $L^2(\mathbb{D},\mathrm{d}v)$ 到 $A_v^2(\mathbb{D})$ 的正交投影。

2. 一般加权 Bergman 空间的结果

令 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D},\mathrm{d}v)$，Toeplitz 算子 T_φ 是亚正规算子，那么就有 $T_\varphi^*T_\varphi-T_\varphi T_\varphi^*\geq 0$。

为了简化本文定理的计算过程，引入下面两个引理。

引理 2.1 若 k,m 为自然数，则

$$P\left(z^k\overline{z}^m\right)(w)=\begin{cases}0, & k<m,\\ \dfrac{\tau_{2k}}{\tau_{2(k-m)}}w^{k-m}, & k\geq m.\end{cases} \tag{2.1}$$

证明：对于自然数 k,m，

$$P\left(z^k\overline{z}^m\right)(w)=\left\langle z^k\overline{z}^m,K_z^{(v)}(w)\right\rangle=\sum_{j=0}^{\infty}\left\langle z^k\overline{z}^m,e_j(z)\right\rangle e_j(w)$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\tau_{2j}}\left\langle z^k,z^{j+m}\right\rangle w^j=\begin{cases}\dfrac{\tau_{2k}}{\tau_{2(k-m)}}w^{k-m}, & k\geq m,\\ 0, & k<m.\end{cases}$$

引理 2.2 令 $i\in\{0,1\}$，$m\geq 1$，$k<m$。记 $\left[\dfrac{m-i}{2}\right]$ 表示 $\dfrac{m-i}{2}$ 的整数部分。则

1) $$H_{\overline{z}^m}k_i(z)=\begin{cases}\overline{z}^m k_i(z)-\sum\limits_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty}c_{2k+i}\dfrac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, & m>i,\\ \overline{z}^m k_i(z)-\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{2k+i}\dfrac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, & m\leq i;\end{cases} \tag{2.2}$$

2) $$\left\|H_{\overline{z}^m}k_i\right\|^2=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{m-i}{2}\right]}\left|c_{2k+i}\right|^2\tau_{2(2k+i+m)}+\sum\limits_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+i+m)}-\dfrac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i-m)}}\right)\left|c_{2k+i}\right|^2, & m>i,\\ \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+i+m)}-\dfrac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i-m)}}\right)\left|c_{2k+i}\right|^2, & m\leq i;\end{cases} \tag{2.3}$$

3) $\left\langle H_{\overline{z}}k_0,H_{\overline{z}}k_1\right\rangle=0$;

4) $\left\langle H_{\overline{z}^2}k_0,H_{\overline{z}^2}k_1\right\rangle=0$.

证明：(1) 当 $i=0,1$ 时，由 Hankel 算子的概念，

$$H_{\bar{z}^m}k_i(z)=(I-P)\left(\bar{z}^m k_i(z)\right)=\bar{z}^m k_i(z)-P\left(\bar{z}^m k_i(z)\right).$$

应用 $k_i(z)$ 的展开式和引理 2.1 得

$$P\left(\bar{z}^m k_i\right)(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty} c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, & m>i,\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, & m\le i,\end{cases}$$

将 $P\left(\bar{z}^m k_i\right)$ 带入，则结果得证。

(2) 对于 $i=0$ 或 $i=1$，$\left\|H_{\bar{z}^m}k_i\right\|^2=\left\langle H_{\bar{z}^m}k_i, H_{\bar{z}^m}k_i\right\rangle$。当 $m\le i$ 时，带入式(2.2)得

$$\begin{aligned}\left\|H_{\bar{z}^m}k_i\right\|^2&=\left\langle \bar{z}^m k_i(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, \bar{z}^m k_i(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}\right\rangle\\
&=\left\|\bar{z}^m k_i\right\|^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{2k+i}\right|^2\frac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i-m)}^2}\tau_{2(2k+i-m)}-\left\langle \bar{z}^m k_i(z), \sum_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty}c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}\right\rangle\\
&\quad-\left\langle \sum_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty}c_{2k+i}\frac{\tau_{2(2k+i)}z^{2k+i-m}}{\tau_{2(2k+i-m)}}, \bar{z}^m k_i(z)\right\rangle\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{2k+i}\right|^2\tau_{2(2k+i-m)}-\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_{2k+i}\right|^2\frac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i-m)}}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+i+m)}-\frac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i-m)}}\right)\left|c_{2k+i}\right|^2.\end{aligned}$$

相似地，当 $m\le i$ 时

$$\left\|H_{\bar{z}^m}k_i\right\|^2=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-i}{2}\right]}\left|c_{2k+i}\right|^2\tau_{2(2k+i+m)}+\sum_{k=\left[\frac{m-i}{2}\right]+1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+i+m)}-\frac{\tau_{2(2k+i)}^2}{\tau_{2(2k+i+m)}}\right)\left|c_{2k+i}\right|^2.$$

(3)与(4)由式(2.2)直接可得。

定理 2.3 设 $\varphi(z)=f(z)+\overline{g(z)}$，其中 $f(z)=a_1z+a_2z^2$，$g(z)=a_{-1}z+a_{-2}z^2$ 且 $a_1\bar{a}_2=a_{-1}\bar{a}_{-2}$。则 T_φ 在 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上是亚正规算子当且仅当

$$\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\tau_2+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_4\ge 0,$$

$$\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_4-\frac{\tau_2^2}{\tau_0}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_6\ge 0,$$

$$\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_6-\frac{\tau_4^2}{\tau_2}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_8\ge 0,$$

$$\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)\left(\tau_{2(2k+1)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-2)}}\right)(k\ge 2)$$
$$\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k)}}\right)+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\left(\tau_{2(2k+3)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)(k\ge 1) \tag{2.4}$$

同时成立。

证明：由 Toeplitz 算子与 Hankel 算子的基本性质，得 $T_\varphi^* T_\varphi - T_\varphi T_\varphi^* = H_{\bar f}^* H_{\bar f} - H_{\bar g}^* H_{\bar g}$.
带入 $f(z)$ 有，$H_{\bar f}=\bar a_1 H_{\bar z}+\bar a_2 H_{\bar z^2}$。进一步，

$$\begin{aligned}H_{\bar f}^* H_{\bar f}&=\left(a_1 H_{\bar z}^*+a_2 H_{\bar z^2}\right)\left(\bar a_1 H_{\bar z}+\bar a_2 H_{\bar z^2}\right)\\&=|a_1|^2 H_{\bar z}^* H_{\bar z}+|a_2|^2 H_{\bar z}^* H_{\bar z^2}+a_1\bar a_2 H_{\bar z}^* H_{\bar z^2}+\bar a_1 a_2 H_{\bar z^2}^* H_{\bar z}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

上式用 $g(z)$ 代替 $f(z)$，结合式(2.6)得到

$$\begin{aligned}H_{\bar f}^* H_{\bar f}-H_{\bar g}^* H_{\bar g}&=\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)H_{\bar z}^* H_{\bar z}+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)H_{\bar z^2}^* H_{\bar z^2}\\&\quad+\left(a_1\bar a_2-a_{-1}\bar a_{-2}\right)H_{\bar z}^* H_{\bar z^2}+\left(\bar a_1 a_2-\bar a_{-1}a_{-2}\right)H_{\bar z^2}H_{\bar z}\\&=\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)H_{\bar z}^* H_{\bar z}+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)H_{\bar z^2}^* H_{\bar z^2}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

T_φ 在 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上是亚正规的当且仅当 $\left\langle H_{\bar f}^* H_{\bar f}-H_{\bar g}^* H_{\bar g}\left(k_{1k_0+}\right),\left(k_0+k_1\right)\right\rangle\ge 0$。而

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(H_{\bar f}^* H_{\bar f}-H_{\bar g}^* H_{\bar g}\right)\left(k_0+k_1\right),\left(k_0+k_1\right)\right\rangle\\&=\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)\left(\|H_{\bar z}k_0\|^2+\|H_{\bar z}k_1\|^2\right)+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\left(\|H_{\bar z^2}k_0\|^2+\|H_{\bar z^2}k_1\|^2\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

应用引理 2.2(2)得到

$$\|H_{\bar z}k_0\|^2+\|H_{\bar z}k_1\|^2=|c_0|^2\tau_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+1)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)|c_{2k}|^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k)}}\right)|c_{2k+1}|^2 \tag{2.8}$$

和

$$\begin{aligned}\|H_{\bar z^2}k_0\|^2+\|H_{\bar z^2}k_1\|^2&=|c_0|^2\tau_4+|c_2|^2\tau_8+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-2)}}\right)|c_{2k}|^2\\&\quad+|c_1|^2\tau_6+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+3)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)|c_{2k+1}|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

所以

$$\begin{aligned}&\left\langle\left(H_{\bar f}^* H_{\bar f}-H_{\bar g}^* H_{\bar g}\right)\left(k_0+k_1\right),\left(k_0+k_1\right)\right\rangle\\&=\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)\left\{|c_0|^2\tau_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+1)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)|c_{2k}|^2+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k)}}\right)|c_{2k+1}|^2\right\}\\&\quad+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\left\{|c_0|^2\tau_4+|c_2|^2\tau_8+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-2)}}\right)|c_{2k}|^2\right\}\\&\quad+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\left\{|c_1|^2\tau_6+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\tau_{2(2k+3)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)|c_{2k+1}|\right\}\end{aligned}$$

$$=\left\{\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\tau_2+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_4\right\}\left|c_0\right|^2+\left\{\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_4-\frac{\tau_2^2}{\tau_0}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_6\right\}\left|c_1\right|^2$$
$$+\left\{\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_6-\frac{\tau^2{}_4}{\tau_2}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\tau_8\right\}\left|c_2\right|^2$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_{2(2k+1)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-2)}}\right)\right\}\left|c_{2k}\right|^2$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\left|a_1\right|^2-\left|a_{-1}\right|^2\right)\left(\tau_{2(2k+2)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k)}}\right)+\left(\left|a_2\right|^2-\left|a_{-2}\right|^2\right)\left(\tau_{2(2k+3)}-\frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right)\right\}\left|c_{2k+1}\right|.$$

分别取 k_0+k_1 为 $e_n(z)(n=0,1,\cdots)$ 可得定理，证毕。

若 $\eta(r)=r^2$，则

$$\mathrm{d}v\left(re^{i\theta}\right)=\mathrm{d}A(z)=\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

$\varphi(z)$ 同定理 2.3，T_φ 为 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上亚正规算子见参考文献[1]；若 $\eta(r)=-\left(1-r^2\right)^{\alpha+1}$，则

$$\mathrm{d}v\left(re^{i\theta}\right)=\mathrm{d}A_\alpha(z)=(\alpha+1)\left(1-|z|^2\right)^\alpha\mathrm{d}A(z)=(\alpha+1)\left(1-r^2\right)^\alpha\frac{r}{\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

$\varphi(z)$ 同定理 2.3，T_φ 为 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上亚正规算子见参考文献[2]。

3. 特殊加权 Bergman 空间的结果

以下研究由 $\eta(r)=r^{\beta+1}(\beta>-1)$ 诱导的 $\mathbb{D}$ 上测度

$$\mathrm{d}v\left(re^{i\theta}\right)=(\beta+1)r^\beta\frac{1}{2\pi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,$$

对应的加权 Bergman 空间上的亚正规 Toeplitz 算子。此时，

$$\tau_t=\int_{\mathbb{D}}|z|^t\,\mathrm{d}v(z)=\int_{[0,1)}r^t\,\mathrm{d}r^{\beta+1}=\frac{\beta+1}{t+\beta+1}.$$

定理 3.1 设 $\varphi(z)=f(z)+\overline{g(z)}$，其中 $f(z)=a_1z+a_2z^2$，$g(z)=a_{-1}z+a_{-2}z^2$ 且 $a_1\overline{a}_2=a_{-1}\overline{a}_{-2}$。则 T_φ 在 $A_v^2(\mathbb{D})$ 上是亚正规算子当且仅当

1) 若 $|a_2|>|a_{-2}|$，$\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\delta_\beta\ge 0$，

2) 若 $|a_2|\le|a_{-2}|$，$\left(|a_1|^2-|a_{-1}|^2\right)+\left(|a_2|^2-|a_{-2}|^2\right)\lambda_\beta\ge 0$，

其中

$$\delta_\beta=\frac{4(\beta+1)}{(4+\beta+1)(2+\beta+1)^2},$$

$$\lambda_\beta=\max\left\{\frac{(6+\beta+1)(4+\beta+1)^2}{4(8+\beta+1)},4\right\}.$$

证明：运用定理 2.3，直接计算得

$$\frac{\tau_4}{\tau_2}=\frac{2+\beta+1}{4+\beta+1}<1,$$

$$\tau_4 - \frac{\tau^2{}_2}{\tau_0} = \frac{\beta+1}{4+\beta+1} - \frac{(\beta+1)^2}{(2+\beta+1)^2} = \frac{4(\beta+1)}{(4+\beta+1)(2+\beta+1)^2} < \frac{2+\beta+1}{4+\beta+1},$$

$$\tau_6 \Big/ \left(\tau_4 - \frac{\tau_2^2}{\tau_0}\right) = \frac{\beta+1}{6+\beta+1} \Big/ \frac{4(\beta+1)}{(4+\beta+1)(2+\beta+1)^2} = \frac{(4+\beta+1)(2+\beta+1)^2}{4(6+\beta+1)},$$

$$\tau_8 \Big/ \left(\tau_6 - \frac{\tau^2{}_4}{\tau_2}\right) = \frac{\beta+1}{8+\beta+1} \Big/ \frac{4(\beta+1)}{(6+\beta+1)(4+\beta+1)^2} = \frac{(6+\beta+1)(4+\beta+1)^2}{4(8+\beta+1)},$$

$$1 < \left(\tau_{2(2k+2)} - \frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-2)}}\right) \Bigg/ \left(\tau_{2(2k+1)} - \frac{\tau_{2(2k)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right) = \frac{4(4k+2+\beta+1)}{(4k+4+\beta+1)} \le 4, (k \ge 2)$$

$$1 < \left(\tau_{2(2k+3)} - \frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k-1)}}\right) \Bigg/ \left(\tau_{2(2k+2)} - \frac{\tau_{2(2k+1)}^2}{\tau_{2(2k)}}\right) = \frac{4(4k+4+\beta+1)}{(4k+6+\beta+1)} \le 4, (k \ge 1)$$

定理得证。

本文研究了复平面上开单位圆盘中一般和特殊加权 Bergman 空间上以调和多项式为符号的 Toeplitz 算子的亚正规性的充分必要条件。

参考文献

[1] Hwang, I.S. (2005) Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **42**, 387-403. https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.2.387

[2] Lu, Y.F. and Shi, Y.Y. (2009) Hyponormal Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Integral Equations and Operator Theory*, **65**, 115-129. https://doi.org/10.1007/s00020-009-1712-z

[3] Ahern, P. and Cuckovic, Z. (1996) A Mean Value Inequality with Applications to Bergman Space Operators. *Pacific Journal of Mathematics*, **173**, 295-305. https://doi.org/10.2140/pjm.1996.173.295

[4] Hwang, I.S. and Lee, J. (2007) Hyponormal Toeplitz Operators on the Bergman Space. II. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, **44**, 517-522. https://doi.org/10.4134/BKMS.2007.44.3.517

[5] Lu, Y.f. and Liu, C.m. (2009) Commutativity and Hyponormality of Toeplitz Operators on the Weighted Bergman Space. *Journal of the Korean Mathematical Society*, **46**, 621-642. https://doi.org/10.4134/JKMS.2009.46.3.621