Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2678-2682
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139274

一个三角函数求值问题的推广

郝伟静，董玉成

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年8月11日；录用日期：2023年9月12日；发布日期：2023年9月21日

摘 要

本文利用特殊角之间的关系，对一个三角函数求值问题进行了求解，并将问题推广，得到一个恒等式。

关键词

三角函数求值，三角恒等式，推广

Generalization of a Trigonometric Function Evaluation Problem

Weijing Hao, Yucheng Dong

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Aug. 11th, 2023; accepted: Sep. 12th, 2023; published: Sep. 21st, 2023

Abstract

In this paper, a trigonometric function evaluation problem is solved using the relationship between special angles and the problem is generalized to obtain a constant equation.

Keywords

Evaluation of Trigonometric Functions, Trigonometric Identities, Generalization

文章引用：郝伟静，董玉成．一个三角函数求值问题的推广[J]．理论数学, 2023, 13(9): 2678-2682.
DOI: 10.12677/pm.2023.139274

1. 引言

三角函数由于其周期性从而产生了许多规律性的变换，所以基于三角函数周期性规律的变换，一直是人们特别感兴趣的研究问题。即在三角函数的研究中，人们往往基于三角函数的周期性变化规律来探索函数之间的关系。已有的三角函数恒等式特别多，应用也极为广泛，在这样的一个基础上，人们也在积极探寻新的三角变换、三角恒等式。

本文研究的问题来源于《数学通报》2021 年第 9 期中的一个三角函数求值的问题(2621 号)。本文首先利用 25˚、35˚与 60˚角之间的特殊关系，对一个三角函数求值问题的求解进行了简化，在此基础上，对原有问题进一步推广得到了一个恒等式。

2. 原问题及解

原问题：求 $\dfrac{\left(2\sin 25^{\circ}+\sin 35^{\circ}\right)^{2}}{2\sin^{2}25^{\circ}+\cos 10^{\circ}}$ 的值[1]。

问题供题者利用凑 30˚角对原式进行化简求值。本文观察到 25˚、35˚和特殊角 60˚之间的和差关系，将原式写成如下形式：

$$\frac{\left(2\sin 25^{\circ}+\sin 35^{\circ}\right)^{2}}{2\sin^{2}25^{\circ}+\cos 10^{\circ}}=\frac{\left[2\sin 25^{\circ}+\sin\left(60^{\circ}-25^{\circ}\right)\right]^{2}}{2\sin^{2}25^{\circ}+\cos\left(60^{\circ}-2\times 25^{\circ}\right)} \tag{1}$$

首先，对(1)式进行化简，

$$\begin{aligned}2\sin 25^{\circ}+\sin 35^{\circ}&=2\sin 25^{\circ}+\sin\left(60^{\circ}-25^{\circ}\right)=2\sin 25^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 25^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 25^{\circ}\\&=\frac{3}{2}\sin 25^{\circ}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 25^{\circ}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 25^{\circ}+\frac{1}{2}\cos 25^{\circ}\right)\\&=\sqrt{3}\sin\left(30^{\circ}+25^{\circ}\right)=\sqrt{3}\sin 55^{\circ}\end{aligned}$$

那么，$\left(2\sin 25^{\circ}+\cos 10^{\circ}\right)^{2}=3\sin^{2}55^{\circ}$

$$\begin{aligned}2\sin^{2}25^{\circ}+\cos 10^{\circ}&=2\sin^{2}25^{\circ}+\cos\left(60^{\circ}-2\times 25^{\circ}\right)\\&=1-\cos\left(2\times 25^{\circ}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\times 25^{\circ}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\times 25^{\circ}\right)\\&=1-\frac{1}{2}\cos\left(2\times 25^{\circ}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\times 25^{\circ}\right)\\&=1-\sin\left(30^{\circ}-2\times 25^{\circ}\right)=1+\sin 20^{\circ}\end{aligned}$$

所以，(1)式

$$=\frac{3\sin^{2}55^{\circ}}{1+\sin 20^{\circ}}=\frac{3\times 2\sin^{2}55^{\circ}}{2\times\left(1+\sin 20^{\circ}\right)}=\frac{3\times\left(1-\cos 110^{\circ}\right)}{2\times\left(1+\sin 20^{\circ}\right)}=\frac{3\times\left(1-\cos\left(90^{\circ}+20^{\circ}\right)\right)}{2\times\left(1+\sin 20^{\circ}\right)}=\frac{3\times\left(1+\sin 20^{\circ}\right)}{2\times\left(1+\sin 20^{\circ}\right)}=\frac{3}{2}\text{。}$$

3. 进一步推广

为了便于表示，以下推导过程中均使用弧度制。

由(1)式，将 25°表示为 α_1，则 $\alpha_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，由此得到推广 1。运用类比方法[2]，将其进一步推广到第二、三、四象限，恒等式仍成立，推广及证明过程如下：

推广 1： 当 $\alpha_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时，恒有 $\dfrac{\left[2\sin\alpha_1 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_1\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha_1\right)} = \dfrac{3}{2}$。

事实上，

$$\begin{aligned}2\sin\alpha_1 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_1\right) &= 2\sin\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha_1 - \frac{1}{2}\sin\alpha_1 = \frac{3}{2}\sin\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha_1 \\ &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos\alpha_1\right) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha_1\right)\end{aligned}$$

那么，$\left[2\sin\alpha_1 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_1\right)\right]^2 = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha_1\right)$

$$\begin{aligned}2\sin^2\alpha_1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha_1\right) &= 1 - \cos 2\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos 2\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha_1 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha_1 = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha_1\right)\end{aligned}$$

所以，

$$\begin{aligned}\frac{\left[2\sin\alpha_1 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_1\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha_1\right)} &= \frac{3\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha_1\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha_1\right)} = \frac{3 \times 2\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha_1\right)}{2 \times \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha_1\right)\right]} \\ &= \frac{3 \times \left[1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{6} + \alpha_1\right)\right]}{2 \times \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha_1\right)\right]} = \frac{3 \times \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha_1\right)\right]}{2 \times \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2\alpha_1\right)\right]} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$
。

若 $\angle\alpha$ 为任意角时恒等式成立，则等式左边分母不能为 0，即 $2\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) \neq 0$。

$$\begin{aligned}2\sin^2\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) &= 1 - \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha \\ &= 1 - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) \neq 0\end{aligned}$$

所以，$\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\alpha\right) \neq 1$，即 $\frac{\pi}{3} + 2\alpha \neq 2k\pi$，$\alpha \neq k\pi - \frac{\pi}{6}$，其中 $k \in Z$。

推广 2： 当 $\alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 且 $\alpha_2 \neq \frac{5\pi}{6}$ 时，恒有 $\dfrac{\left[2\sin\alpha_2 + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha_2\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_2 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha_2\right)} = \dfrac{3}{2}$。

事实上，设 $\alpha_2=\alpha_1+\frac{\pi}{2}\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，则

$$\sin\alpha_2=\sin\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha_1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_2\right)=\sin\left[\frac{\pi}{3}-\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]=-\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_2\right)=\cos\left[\frac{\pi}{3}-2\left(\alpha_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)-\pi\right]=\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)\right]=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)$$

所以，

$$\frac{\left[2\sin\alpha_2+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_2\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_2+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_2\right)}=\frac{\left[2\cos\alpha_1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)\right]^2}{2\cos^2\alpha_1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)} \tag{2}$$

与推广 1 的方法一致，对(2)式右边进行化简，得

$$(2)式=\frac{3\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha_1\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha_1\right)}=\frac{3\times2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha_1\right)}{2\times\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha_1\right)\right]}=\frac{3\times\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha_1\right)\right]}{2\times\left[1+\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\alpha_1\right)\right]}=\frac{3}{2}。$$

推广 3：当 $\alpha_3\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ 时，恒有 $\frac{\left[2\sin\alpha_3+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_3\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_3+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_3\right)}=\frac{3}{2}$。

事实上，设 $\alpha_3=\alpha_1+\pi\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$，则

$$\sin\alpha_3=\sin\left(\alpha_1+\pi\right)=-\sin\alpha_1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_3\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_3\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)$$

同理可得，$\frac{\left[2\sin\alpha_3+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_3\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_3+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_3\right)}=\frac{\left[2\sin\alpha_1+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)}=\frac{3}{2}$。

可见，推广 3 中 α_3 为第三象限角的情形与 α_1 为第一象限角的情形一致。

推广 4：当 $\alpha_4\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ 且 $\alpha_4\neq\frac{11\pi}{6}$ 时，恒有 $\frac{\left[2\sin\alpha_4+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_4\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_4+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_4\right)}=\frac{3}{2}$。

事实上，设 $\alpha_4=\alpha_1+\frac{3\pi}{2}\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$，则

$$\sin\alpha_4=-\cos\alpha_1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_4\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_4\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)$$

同理可得，$\dfrac{\left[2\sin\alpha_4+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_4\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha_4+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_4\right)}=\dfrac{\left[2\cos\alpha_1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha_1\right)\right]^2}{2\cos^2\alpha_1-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha_1\right)}=\dfrac{3}{2}$。

易见，推广 4 中 α_4 为第四象限角的情形与 α_2 为第二象限角的情形一致。

4. 当 α 为任意角时的情形

经过以上推广验证，可知恒等式在 $\alpha\in[0,2\pi]$ 时都成立。又由于正弦、余弦函数都以 2π 为周期，那么当 α 为任意角时，该恒等式仍然成立，故有以下结论。

结论： 若 $\alpha\in R$ 且 $\alpha\neq k\pi-\frac{\pi}{6}$，恒有 $\dfrac{\left[2\sin\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right]^2}{2\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)}=\dfrac{3}{2}$，其中 $k\in Z$。

5. 总结与讨论

本文探究的问题表明，对于与三角函数有关的恒等式甚至不等式的证明，利用特殊角的关系是解决这类问题的一个重要思路。基于同样的思路，我们可以把三角形推广到多边形，从二维推广到高维。不论是三角函数还是加性柯西方程的研究，所蕴含的思想是统一的，都是从简单的例子里面挖掘有用的信息，从简单的问题里面发现不平凡解法，从而开拓多维创新能力，实现有意义的学习[3]。

参考文献

[1] 李有贵. 数学问题解答 2621 [J]. 数学通报, 2021(10): 63.
[2] 张雄, 李得虎. 数学方法论与解题研究[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2013: 308.
[3] 朱荻, 董玉成. 加性柯西方程的推广及求解[J]. 高等数学研究, 2022, 25(5): 67-68+81.