Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2564-2571
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139261

夹逼准则的结构分析与应用

王耀革，李　可

信息工程大学基础部，河南　郑州

收稿日期：2023年8月2日；录用日期：2023年9月4日；发布日期：2023年9月12日

摘　要

夹逼准则是求极限中非常重要的一种方法，也是容易出综合题的点。通过夹逼准则的结构分析，对于n项和结构与有限项和结构的数列极限问题，归纳总结放缩方法，帮助学生理解和掌握夹逼准则及其应用。

关键词

夹逼准则，结构分析，数列极限，放缩方法

Structure Analysis and Application of Squeeze Theorem

Yaoge Wang, Ke Li

Basis Department, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 2nd, 2023; accepted: Sep. 4th, 2023; published: Sep. 12th, 2023

Abstract

The squeeze theorem is a very important method in finding limits and is also a point where it is easy to solve comprehensive problems. Through the structural analysis of the squeeze theorem, summarize the scaling methods for the problem of the limit of the sequence of n-term summation and finite term summation, in order to help students understand and master the understanding and application of the squeeze theorem.

Keywords

Squeeze Theorem, Structural Analysis, Sequence Limit, Scaling Method

文章引用: 王耀革, 李可. 夹逼准则的结构分析与应用[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2564-2571.
DOI: 10.12677/pm.2023.139261

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

高等数学的每一个定义、定理(或结论)都有自己的结构特征和作用对象。结构分析思想方法就是首先对定义、定理(或结论)的结构进行分析，挖掘其结构特点，确定其作用对象特征，同样对待解题目进行结构分析，挖掘题目的结构特点，与已知的定义、定理(或结论)的结构特征进行类比，选择结构特征相同或相似的定义、定理(或结论)，用于题目的求解，确定“用什么”的问题；然后类比待解题目与已知定义、定理(或结论)在结构形式(条件和结论)上的差异，设计方法将待解题目的条件和结论在形式上与已知定义、定理(或结论)的结构进行统一，通常是按定义、定理(或结论)的结构进行标准化处理，由此形成解题的具体方法。可以将结构分析思想方法总结为 24 字方针：分析结构、挖掘特点，类比已知、确立思路，形式统一、设计方法[1] [2] [3]。

夹逼准则是一个重要的极限存在准则，也称两边夹定理、夹逼准则、夹挤定理、迫敛定理、三明治定理。夹逼准则是数列极限的一个重难点，其核心是如何对数列进行合理的放缩。本文通过对夹逼准则进行结构分析，探究夹逼准则在放大和缩小时应该怎么取两边的数列项。

2. 夹逼准则及其结构分析

准则(夹逼准则)若数列$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$满足：$x_n \le y_n \le z_n$，$n > N$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$。

思路分析 已知条件转化为量化关系式$|x_n - a| < \varepsilon$、$|z_n - a| < \varepsilon$ 和 $x_n \le y_n \le z_n$；要证结论转化为量化形式是$|y_n - a| < \varepsilon$。从结构形式上看，要证结论首先需要将条件和结论中绝对值号去掉，并借助a、ε 和三个函数的序 $x_n \le y_n \le z_n$，建立条件和结论的关系。

证明 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in N^+$，使得 $n > N_1$ 时，

$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$，从而 $a - \varepsilon < x_n$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2 \in N^+$，使得 $n > N_2$ 时，

$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$，从而 $z_n < a + \varepsilon$，

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，就有 $a - \varepsilon < x_n$ 和 $z_n < a + \varepsilon$ 同时成立，又 $x_n \le y_n \le z_n$，因而有 $a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$，即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$ 成立，因而 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$。

夹逼准则的结构分析 1) 夹逼准则由两部分组成，定理的条件：三个数列的关系、两头的数列具有相等的极限；定理的结论：中间数列的极限结论。2) 从定理的结论看，是要确定中间数列 y_n 的极限；定性结论是中间数列 y_n 的极限存在，定量结论是中间数列极限值的计算。3) 从定理的条件看，条件具有明显的不等式结构，通过对中间数列 y_n 进行适当的放大和缩小(注意：放大和缩小后的两个数列有共同的极限)，实现中间数列极限值的计算，因此，中间数列的放大和缩小是求解问题的关键。4) 思想：中间数列 y_n 的放大和缩小的过程实际上就是对中间数列 y_n 进行简化的过程，即对一个结构复杂、难以计算极限的数列进行结构上的简化，使其化简后的数列容易计算极限，因此，此定理体现了化繁为简的应用思想。

3. 夹逼准则的应用

根据夹逼准则的结构分析，对于不能直接求和的研究对象，应用夹逼准则的重点是对研究对象进行放缩，进而达到化繁为简的目的。放缩面临两个问题：一个是放缩的方向，一个是放缩的度，需要恰到

好处，不能放的过大，也不能缩的过小。放缩的方向一般不需要单独考虑，难点在于度的把握。下面针对两种常见极限类型：n 项不定和结构与有限项和结构的放缩问题进行讨论。

类型一 n 项和结构的放缩

如果所求数列的极限结构是 n 项数列直接求和结构，这里 n 既是数列变量，又是极限过程变量，因此，求和的项数 n 虽然从形式上看是确定，但它本质是不确定的，我们把这类和称为 n 项不定和结构。

对 n 项不定和结构进行放大或缩小，一般要注意不定和结构中的特殊项，如最大项和最小项，将和式中各项放缩处理后再进行求和，化 n 项不定和为确定的一项，利用运算法则计算确定项的极限，然后再利用夹逼准则进行求解。

例 1：[4]证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

结构分析 题目的结构特点：n 项不定和结构的极限，且不能直接求和。求解思路：利用夹逼准则。具体方法：将 n 项不定和的结构简化，通过是对 n 项不定和进行放缩来实现。分析 n 项因子，把特殊的因子(最大者和最小者)找出来，在放大与缩小的过程中，充分考虑此类因子的作用进行放缩处理，简化结构采取“合”的方法。具体地，本例中 n 项不定和的各项分子均为常数，因此，各项的大小看分母，分母具有单调性，显然，各项最大项是 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，最小项是 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；所有项都放大为 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$，简化结构求和得 $\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$；所有项都缩小为 n 项不定和缩小 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$，简化结构求和得 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$，且放大和缩小所得的和的极限相同，因此，利用夹逼准则即可求解。

证明 由于

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，

由数列极限的夹逼准则，则结论成立。

例 2：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$。

结构分析 题目仍然是 n 项不定和的极限，且不能直接求和。求解思路：对 n 项不定和进行放缩，由于和式结构中各项的分子可以求和，因此，依据各项分母进行放缩，分母最小是 n^2+1，最大项是 n^2+n，各项依据分母的最大值最小值进行放缩。

解 由于

$$\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\le\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2},$$

由数列极限的夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}$.

如果所求数列的极限结构不是 n 项不定和结构，但是经过初等变形，可以转化成 n 项不定和结构，也考虑使用夹逼准则求解。

例 3：证明 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{k(k+1)}{2}$.

结构分析 所证结论是连续减的形式，通过恒等变形把它转化成加的形式。观察表达式 $\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+k}\right)$ 中有 k 个 $\frac{1}{n}$ 相加，所以可以分别和后面 k 个相减项相结合得到 $\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\right)$，整理成 $\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+i)}$ 形式，同上面例 2 类似，各项依据分母的最大值最小值进行放缩。

解由于

$$n^2\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+k}\right)=n^2\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)\right)$$
$$=n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+i)},$$

又由于

$$n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+k)}\le n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+i)}\le n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+1)},$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+k)}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\frac{k(1+k)}{2}}{n(n+k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{k(1+k)}{2}\cdot\frac{n}{(n+k)}=\frac{k(1+k)}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\frac{\frac{k(1+k)}{2}}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{k(1+k)}{2}\cdot\frac{n}{(n+1)}=\frac{k(1+k)}{2},$$

所以由夹逼准则知，$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\cdots-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{k(k+1)}{2}$.

例 4：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

简析 所证结论是连续乘的形式，通过取对数可以把它转化成 n 项不定和结构，即可利用夹逼准则求解。

解 设 $a_n=\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)$，

在 $[1,1+x]$ $(x>0)$ 上对 $f(t)=\ln t$ 用拉格朗日中值定理，则存在 $\xi\in(1,1+x)$，使得

$$\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}=\frac{1}{\xi}\quad(1<\xi<1+x),$$

即 $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$, 于是 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

故，$a_n=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}$，

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)>\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{1+\frac{i}{n^2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i}\geq\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n}=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$， $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n}=\frac{1}{2}$，

由夹逼准则知， $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$。

故 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$。

由于定积分定义的结构也有明显的 n 项不定和结构，因此，n 项不定和结构在放缩过程中有时也要考虑能否放缩为定积分定义求和的形式，建立 n 项不定和的极限与定积分定义之间的联系。

例 5：[5] (全国大学数学竞赛第七届预赛试题)求极限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$。

结构分析 所求极限仍是 n 项不定和结构，且分子和分母同时都在变化，不能直接求和运算，需要利用估计方法进行合并，为简化运算可以尝试把分母变成不变的，即将分母中含有 i 的项略去，同时配合放缩法进行求解。由于原数列分母随着 i 趋向于 n，分母都会小于 $n+1$，它的倒数 $\frac{1}{n+1}$ 小于除了第一项的其它项，所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$。同理，原数列分母随着 i 趋向于 n，分母都会大于 n，它的倒数 $\frac{1}{n}$ 大于其它项，所以 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}$。由于是无穷多项进行相加，运算过程可以利用定积分定义进行计算。

解 由于 $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}\leq\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$

又 $\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$，

由定积分定义知 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$，

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，

利用夹逼准则可知 $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]=\frac{2}{\pi}.$

类型二 有限项和结构的放缩

如果所求数列的极限是有限项和的结构，如果有限项和不能直接求和，需要将有限项和的结构简化，即进行适当的放缩，放缩过程常见的错误就是放缩过头，一定要注意不能放的过大，也不能缩的过小，要求放大和缩小后的两个数列的极限相同。

对于有限项和的缩小方法采用“抓大放小”的方法，将有限项和中各项比较大小，只取最大项，舍弃其他项，缩小处理后直接求极限。有限项和的放大方法是将所有项都放大成最大项，简化之后求和，求极限，利用夹逼准则进行求解。所以，有限项和结构的放缩的核心是找各项中的最大项。

例 6：求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}$ 。

结构分析 题目是有限项和的极限问题。不能直接求和运算，需要将有限项和的结构通过放缩简化，缩小利用“抓大放小”的方法，本题是三项和的结构，三项中最大项 3^n 起关键的作用，缩小时只取最大项 3^n，舍弃其他项。放大时所有项均放大为 3^n，利用夹逼准则即得。

解 由于 $3=\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{1+2^n+3^n}\le\sqrt[n]{3^n+3^n+3^n}=3\sqrt[n]{3}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty}3\sqrt[n]{3}=3$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，

由数列极限的夹逼准则知， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2^n+3^n}=3$。

例 7：[6]计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\ge 0)$。

结构分析 待求极限结构仍是有限项和的结构，本题待求极限的表达式需要对 $1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ 在 $x\ge 0$ 时进行放缩，与例 4 的思想类似，放缩的关键是从 1、x^n、$\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ $(x\ge 0)$ 中寻找最大项。

解 根据 $y=1$、$y=x$、$y=\frac{x^2}{2}$ 的图形，利用几何法，易知

$$\max\left\{1,x,\frac{x^2}{2}\right\}=\begin{cases}1, & x\in[0,1)\\ x, & x\in[1,2)\\ \frac{x^2}{2}, & x\in[2,+\infty)\end{cases}.$$

于是，

① 当 $x\in[0,1)$ 时，1^n 最大，故

$\sqrt[n]{1\cdot 1^n}\le\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\le\sqrt[n]{3\cdot 1^n}$，即 $1\le\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\le\sqrt[n]{3}$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=1$。

② 当 $x\in[1,2)$ 时， x^n 最大，故

$\sqrt[n]{1\cdot x^n}\le\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\le\sqrt[n]{3\cdot x^n}$，即 $x\le\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\le\sqrt[n]{3}\cdot x$，

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x = x$， $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot x = x$，由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = x$。

③ 当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ 最大，故

$$\sqrt[n]{1\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \le \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \le \sqrt[n]{3\cdot\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},$$

即 $\frac{x^2}{2} \le \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \le \sqrt[n]{3}\cdot\frac{x^2}{2}$，

由夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \frac{x^2}{2}$。

综上，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \begin{cases} 1, & x\in[0,1) \\ x, & x\in[1,2) \\ \frac{x^2}{2}, & x\in[2,+\infty) \end{cases}$.

抽象总结 例 7 是例 6 由特殊到一般的变形，从特殊到一般的数学方法就是转化思想中的一部分。

例 8：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$其中 $a_i > 0\,(i=1,2,\cdots,k)$。

简析 本例也是例 6 的推广题型，只是将研究对象由三个转化为更多个而已，仍属于有限项和的极限问题，处理思想仍是“合”的简化思想，通过放缩来实现，放缩的关键是从待求极限的数列表达式中找出最大项。

解 记 $a=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$, $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，则

$$\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(kA^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(ka^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(A^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(a^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = A + a^{-1},\quad \lim_{n\to\infty}\left[\left(kA^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(ka^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = A + a^{-1}$$

由夹逼准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = A + a^{-1}$。

4. 结语

通过对夹逼准则的结构分析，探究了 n 项不定和结构、可以转化成 n 项不定和结构与有限项和结构的数列极限的放缩方法，化繁为简，借助放缩之后简单数列的极限，用他山之石，可以攻玉之法，求解一些复杂的数列和的极限问题，帮助学生理解和掌握夹逼准则的应用。

参考文献

[1] 崔国忠, 郭从洲, 石金娥. 数学分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018.

[2] 王耀革, 郭从洲, 崔国忠. 高等数学[M]. 北京: 科学出版社, 2022.

[3] 王耀革, 崔国忠, 郭从洲. 利用“结构分析-形式统一法”求解数学题目[J]. 理论数学, 2020, 10(5): 524-529.

[4] 同济大学数学系. 高等数学(第七版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[5] 余志坤. 全国大学生数学竞赛解析教程[M]. 北京: 科学出版社, 2023.

[6] 张宇. 张宇高等数学 18 讲[M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.