Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2441-2447
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139251

Hans汉斯

刻度平方误差损失下艾拉姆咖分布参数的*Bayes*估计

粟　磊，周菊玲*

新疆师范大学，数学科学学院，新疆　乌鲁木齐

收稿日期：2023年7月19日；录用日期：2023年8月21日；发布日期：2023年8月29日

摘　要

本文主要研究了在刻度平方误差损失函数下先验分布为伽马分布的艾拉姆咖分布参数的***Bayes***估计、多层***Bayes***估计和***E-Bayes***估计，并通过数值模拟说明了三种估计的稳健性和精确度，其中多层***Bayes***估计的稳健性和精确度都是最高的。

关键词

刻度平方误差损失函数，艾拉姆咖分布，***Bayes***估计，多层***Bayes***估计，***E-Bayes***估计

Bayesian Estimation of the Parameter of Эрланга Distribution under Scale Squared Error Loss Function

Lei Su, Juling Zhou*

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jul. 19th, 2023; accepted: Aug. 21st, 2023; published: Aug. 29th, 2023

Abstract

In this paper, Bayesian estimation, Hierarchical Bayes estimation and E-Bayes estimation of Эрланга distribution scale parameters with prior distribution as gamma distribution under the scale squared error loss function are studied; the robustness and accuracy of the three estimates are illustrated by numerical simulation, among which the robustness and accuracy of Hierarchical Bayes estimation are the highest.

*通讯作者。

文章引用: 粟磊, 周菊玲. 刻度平方误差损失下艾拉姆咖分布参数的 *Bayes* 估计[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2441-2447.
DOI: 10.12677/pm.2023.139251

Keywords

Scale Squared Error Loss Function, Эрланга Distribution, Bayesian Estimation, Hierarchical Bayes Estimation, E-Bayes Estimation

1. 引言

艾拉姆咖分布在装备的维修理论中具有重要的作用，因此它被俄罗斯学者引入用来研究武器装备的维修时间。该分布具有重要的研究意义，所以众多学者对其进行了研究，吕佳等[1]研究了复合 *Linex* 损失下艾拉姆咖分布参数的贝叶斯估计；龙兵[2]研究了不同先验分布下艾拉姆咖分布参数的 *Bayes* 估计；范梓淼等[3]研究了艾拉姆咖分布参数变点的统计推断；于新龙等[4]研究了具有部分缺失数据混合艾拉姆咖分布参数的估计；王敏[5]研究了复合*Linex*损失下不同先验分布中参数的 *Bayes* 估计。

最近模型参数的 *Bayes* 估计经常应用到刻度平方误差损失函数。周慧[6]研究了刻度平方误差损失下逆指数分布的 *Bayes* 可靠性分析；芦凌飞[7]研究了刻度平方误差损失下 *Lomax* 分布形状参数的 *Bayes* 估计；谭玲等[8]研究了损失下二项分布参数的 *Bayes* 估计问题。

本文将刻度平方误差损失函数下对艾拉姆咖分布的参数进行研究。

设 X 为随机变量。假如它的密度函数为

$$f\left(x\middle|\theta\right)=4\theta^2 x\mathrm{e}^{-2\theta x},x>0,\theta>0, \tag{1}$$

称 X 服从参数为 θ 的艾拉姆咖分布。

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 独立同分布的样本，则此样本的似然方程为

$$L\left(x\middle|\theta\right)=4^n\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-2\theta T}, \tag{2}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$。

刻度平方误差损失函数形式为

$$L\left(\theta,\hat{\theta}\right)=\frac{\left(\theta-\hat{\theta}\right)}{\theta^k} \tag{3}$$

2. θ 的 Bayes 估计

引理 1 对任何的先验分布 $\pi\left(\theta\right)$，在刻度平方误差损失函数下，θ 的 *Bayes* 估计为

$$\delta_B=\frac{E\left(\theta^{1-k}\middle|x\right)}{E\left(\theta^{-k}\middle|x\right)}. \tag{4}$$

定理 1 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是艾拉姆咖分布的一组观察值，则在损失函数(3)，取 $\Gamma\left(\alpha,\beta\right)$ 为其参数 θ 的先验分布，θ 的 *Bayes* 估计为

$$\delta_B(x)=\frac{2n+\alpha-k}{2T+\beta},$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$。

证明 由 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 为艾拉姆咖分布参数 θ 的先验分布，可得 θ 的先验密度函数为

$$\pi(\theta)=\Gamma(\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta},\ \alpha>0,\beta>0,\theta>0 \tag{5}$$

根据样本的联合密度函数(2)和式(5)，得到 θ 的后验密度函数为

$$\begin{aligned}h(\theta|x)&=\frac{L(x|\alpha,\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty}L(x|\alpha,\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{4^n\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-2\theta T}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}}{\int_0^{+\infty}4^n\theta^{2n}\prod_{i=1}^{n}x_i\mathrm{e}^{-2\theta T}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}\mathrm{d}\theta}\\&=\frac{\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}}{\int_0^{+\infty}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta}\\&=\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\end{aligned} \tag{6}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$，从而 θ 的后验分布为 $h(\theta|x)\sim\Gamma(2n+\alpha,2T+\beta)$。那么

$$\begin{aligned}E(\theta^{1-k}|x)&=\int_0^{+\infty}\theta^{1-k}\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{2n+\alpha-k}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\frac{\Gamma(2n+\alpha-k+1)}{(\beta+2T)^{2n+\alpha-k+1}}\\&=\frac{\Gamma(2n+\alpha-k+1)(\beta+2T)^{k-1}}{\Gamma(2n+\alpha)}\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}E(\theta^{-k}|x)&=\int_0^{+\infty}\theta^{-k}\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{2n+\alpha-k-1}\mathrm{e}^{-(2T+\beta)\theta}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{(\beta+2T)^{2n+\alpha}}{\Gamma(2n+\alpha)}\frac{\Gamma(2n+\alpha-k)}{(\beta+2T)^{2n+\alpha-k}}\\&=\frac{\Gamma(2n+\alpha-k)(\beta+2T)^{k}}{\Gamma(2n+\alpha)}\end{aligned} \tag{8}$$

将(7)和(8)带入式(4)可得

$$\delta_B(x)=\frac{E\left(\theta^{1-k}\middle|x\right)}{E\left(\theta^{-k}\middle|x\right)}=\frac{\dfrac{\Gamma(2n+\alpha-k+1)(\beta+2T)^{k-1}}{\Gamma(2n+\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(2n+\alpha-k)(\beta+2T)^{k}}{\Gamma(2n+\alpha)}}=\frac{2n+\alpha-k}{\beta+2T}.$$

3. θ 的多层 *Bayes* 估计

对 $\delta_B(x)$ 中的超参数 α、β 进行估计。设超参数 α、β 的先验分布为 $\pi(\alpha)=U(0,1)$ 和 $\pi(\beta)=U(0,c)$，若 α、β 的联合分布为均匀分布，即 $\pi(\alpha,\beta)=\dfrac{1}{c}$，此时 θ 的多层先验密度函数为

$$\begin{aligned}\pi(\theta)&=\iint_D \pi(\theta|\alpha,\beta)\pi(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta=\int_0^c\int_0^1\frac{1}{c}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\end{aligned} \tag{9}$$

定理 2 在刻度平方误差损失函数下，对于艾拉姆咖分布(1)，若参数 θ 的先验分布为 $\Gamma(\alpha,\beta)$，超参数 α 和 β 的先验分布为 D 上的均匀分布，则参数 θ 的多层 *Bayes* 估计为

$$\delta_{HB}(x)=\frac{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha+1-k)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha+1-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha-k)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta} \tag{10}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$。

证明 根据 *Bayes* 定理，θ 的多层后验密度为

$$\begin{aligned}h(\theta|x)&=\frac{L(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty}L(x|\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}=\frac{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+2T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+2T)\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}\\&=\frac{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+2T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}.\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}E\left(\theta^{1-k}\middle|x\right)&=\int_0^{+\infty}\theta^{1-k}h(\theta|x)\mathrm{d}\theta=\frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\theta^{1-k}\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+2T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\theta}{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}\\&=\frac{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha+1-k)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha+1-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\displaystyle\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha)\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}.\end{aligned}$$

$$E\left(\theta^{-k}\middle|x\right)=\int_0^{+\infty}\theta^{-k}h\left(\theta\middle|x\right)\mathrm{d}\theta=\frac{\int_0^{+\infty}\theta^{-k}\int_0^c\int_0^1\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{2n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\beta+2T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\theta}{\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}$$

$$=\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha-k)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}.$$

故在刻度平方误差损失函数下 θ 的多层 *Bayes* 估计为

$$\delta_{HB}(x)=\frac{E\left(\theta^{1-k}\middle|x\right)}{E\left(\theta^{-k}\middle|x\right)}=\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha+1-k)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha+1-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}{\int_0^c\int_0^1\frac{\Gamma(2n+\alpha-k)\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\beta+2T)^{2n+\alpha-k}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta}.$$

4. θ 的 E-Bayes 估计

定理 3 在刻度平方误差损失函数下，对于艾拉姆咖分布(1)，若参数 θ 的先验分布为 $\Gamma(\alpha,\beta)$，超参数 α 和 β 的先验分布为 D 上的均匀分布，则参数 θ 的 *E-Bayes* 估计为

$$\delta_{EB}(x)=\frac{4n-2k+1}{2c}\ln\left(1+\frac{c}{4T}\right), \tag{11}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}x_i$。

证明 根据 *E-Bayes* 的定义得

$$\begin{aligned}\delta_{EB}(x)&=\iint_D\delta_B(x)\pi(\alpha,\beta)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\int_0^c\int_0^1\frac{2n+\alpha-k}{\beta+2T}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta\\&=\frac{1}{c}\int_0^c\frac{2n-k+\frac{1}{2}}{\beta+2T}\mathrm{d}\beta\\&=\frac{4n-2k+1}{2c}\ln\left(1+\frac{c}{4T}\right).\end{aligned}$$

5. 数值模拟

利用 *R* 语言进行数值模拟，生成一组 $n = 30$，θ 真值为 1 的艾拉姆咖分布随机样本，并根据定理 1 中参数 θ 的 *Bayes* 估计 δ_B，在参数 $\beta=1$ 时，对参数 α 和 k 取不同的值时 θ 的估计值，模拟结果如表 1。

利用相同的随机样本，根据定理 2 中参数 θ 的多层 *Bayes* 估计 δ_{HB} 和定理 3 中参数 θ 的 *E-Bayes* 估计的表达式 δ_{EB} 在参数 $c=10$ 时求估计值，结果分别为表 2 与表 3。

稳健性：

由表 1，表 2，表 3 可以看出当 $0.5\le k\le 1$ 且适当选择参数 α，β 以及 c 的值时，δ_B，δ_{HB}，δ_{EB} 的极差都非常小。从统计决策中稳健性角度考虑，参数 θ 的三种 *Bayes* 估计都很稳健，其中多层 *Bayes* 估计最稳健，符合统计决策中稳健性。

Table 1. Estimated values of δ_B
表 1. δ_B 的估计值

	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.67$	$\alpha=0.8$	$\alpha=0.9$	$\alpha=1$	极差
$k=0.5$	0.9960852	0.9977426	0.9994	1.001057	1.002715	0.0066298
$k=0.6$	0.9944278	0.9960852	0.9977426	0.9994	1.001057	0.0066292
$k=0.7$	0.9927704	0.9944278	0.9960852	0.9977426	0.9994	0.0066296
$k=0.8$	0.9911131	0.9927704	0.9944278	0.9960852	0.9977426	0.0066295
$k=0.9$	0.9894557	0.9911131	0.9927704	0.9944278	0.9960852	0.0066295
$k=1$	0.9877983	0.9894557	0.9911131	0.9927704	0.9944278	0.0066295
极差	0.0082869	0.0082869	0.0082869	0.0082866	0.0082872	

Table 2. Estimated values of δ_{HB}
表 2. δ_{HB} 的估计值

k	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	极差
δ_{HB}	0.9912543	0.9925685	0.9934355	0.9945423	0.9957365	0.9969855	0.0057312

Table 3. Estimated values of δ_{EB}
表 3. δ_{EB} 的估计值

k	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	极差
δ_{EB}	0.9957868	0.9968324	0.9981365	0.9994864	1.0006853	1.0017252	0.0059384

精确度：

由表 1、表 2、表 3 可以看出 $0.5 \le k \le 1$ 时，容易求出 δ_B，δ_{HB}，δ_{EB} 的偏差($\Delta\delta = |\delta - \delta_0|$，其中 δ 为参数 θ 的估计量，δ_0 为参数 θ 的真值)，区间分别为[0.0006, 0.0122017]，[0.0030145, 0.0087457]，[0.0005136, 0.0042132]。可见偏差非常小，所以其精确度也很高，其中多层 *Bayes* 估计的精确度最高，符合统计决策的要求。

基金项目

国家自然科学基金(11801488)；新疆师范大学教学研究与改革(SDJG2020-30)；新疆师范大学科研发展专项(XJNUZX202001)。

参考文献

[1] 吕佳，任芳玲，乔克林. 复合 Linex 损失下艾拉姆咖分布参数的贝叶斯估计[J]. 江西科学，2016, 34(3): 285-287+310.

[2] 龙兵. 不同先验分布下艾拉姆咖分布参数的 Bayes 估计[J]. 数学的实践与认识, 2015, 45(4): 186-192.

[3] 范梓淼，田梦琴，赫亚伟，兰琪暄. 艾拉姆咖分布参数变点的统计推断[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 2021, 47(1): 35-40.

[4] 于新龙，杨艳秋，杨航，李佳琳. 具有部分缺失数据混合艾拉姆咖分布参数的估计[J]. 忻州师范学院学报，2020, 36(5): 15-19+111.

[5] 王敏. 复合 Linex 损失下不同先验分布中参数的 Bayes 估计[J]. 统计与决策, 2018, 34(2): 27-29.

[6] 周慧. 刻度平方误差损失下逆指数分布的 Bayes 可靠性分析[J]. 湘南学院学报, 2019, 40(5): 3-6.

[7] 芦凌飞. 刻度平方误差损失下 Lomax 分布形状参数的 Bayes 估计[J]. 商丘师范学院学报, 2012, 28(6): 38-40.

[8] 谭玲, 孙坤, 李金玉. 刻度平方误差损失下二项分布参数的 Bayes 估计问题[J]. 云南民族大学学报(自然科学版), 2011, 20(6): 486-489.