Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2587-2595
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139264

一类广义的Bezier算子的保形性质

董 惠[1]，齐秋兰[1,2*]

[1]河北师范大学数学科学学院，河北 石家庄
[2]河北省计算数学与应用重点实验室，河北 石家庄

收稿日期：2023年8月3日；录用日期：2023年9月5日；发布日期：2023年9月14日

摘 要

本文对一种以广义二项分布的概率密度函数作为基函数构造的广义Bezier型算子性质进行研究，得到了这类算子在单调性、凸性、星形性、半可加性和光滑性等方面的保形性质。最后，通过具体数值实例验证新方法的有效性及灵活性。

关键词

Bezier型算子，单调性，凸性，星形性

Shape Preserving Properties of Generalized Bezier Type Operators

Hui Dong[1], Qiulan Qi[1,2*]

[1]School of Mathematical Sciences, Hebei Normal University, Shijiazhuang Hebei
[2]Hebei Key Laboratory of Computational Mathematics and Applications, Shijiazhuang Hebei

Received: Aug. 3rd, 2023; accepted: Sep. 5th, 2023; published: Sep. 14th, 2023

Abstract

In this paper, we study the properties of a kind of Bezier type operators constructed with the probability density function of a generalized binomial distribution as the basis functions, and obtain the shape preserving properties of this kind of operator concerning monotonicity, convexity, starlikeness, semi-additivity, and smoothness. Finally, through specific numerical examples, we verify the effectiveness and flexibility of the new method.

[*]通讯作者。

文章引用: 董惠, 齐秋兰. 一类广义的 Bezier 算子的保形性质[J]. 理论数学, 2023, 13(9): 2587-2595.
DOI: 10.12677/pm.2023.139264

Keywords

Bezier Type Operator, Monotonicity, Convexity, Starlikeness

1. 引言

用 Bernstein 基函数构造 Bezier 曲线是计算机辅助几何设计中经典的方法[1]-[8]，其原因是 Bernstein 基函数具有良好的保形性质，而这些基函数与来自二项分布的概率密度函数密不可分，所以，概率密度函数在曲线曲面设计中得到重要运用。文献[9]中，Goldman 研究了负二项分布所构建的 Bezier 曲线的性质，在文献[10]中，Goldman 和 Morin 将泊松分布用于解析函数的几何重构。所以，CAGD 领域的一些学者将二项分布进行推广，得到了新的基函数，从而得到了具有特别重要实用价值的算子。在众多广义分布中寻找合适的且计算量不大的概率密度函数具有重大意义。1993 年，Madsen 引入了一种具有用于 CAGD 几何造型潜力的密度函数[11]。2020 年，杨军等人在此基础上又将密度函数的形式进行变形，进而得到了一种广义 Bezier 算子，该算子定义如下[12]：

$$B_{n,\alpha}\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)b_{k,n}\left(\alpha,x\right),$$

其中基函数定义为：

$$b_{k,n}\left(\alpha,x\right)=\alpha\left[\binom{k}{n}x+\binom{0}{k}\left(1-x\right)\right]+\left(1-\alpha\right)\binom{n}{k}x^{k}\left(1-x\right)^{n-k},$$

α 为参数，$0\le\alpha<1$，$k=0,1,2,\cdots,n$，$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$。

注 1. 当 $n<k$ 时，规定 $\binom{n}{k}=0$；当 $k>n$ 或 $k<0$ 时，规定 $b_{k,n}\left(\alpha,x\right)=0$。

注 2. 当 $\alpha=0$ 时，该算子退化为经典 Bernstein 算子 $B_{n,0}\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{k}\left(1-x\right)^{n-k}$。

该算子也可以表示为：

$$B_{n,\alpha}\left(f;x\right)=\alpha\left[f\left(1\right)x+f\left(0\right)\left(1-x\right)\right]+\left(1-\alpha\right)\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{k}\left(1-x\right)^{n-k}。\tag{1}$$

在文献[12]中，杨军等人证明了该广义 Bezier 曲线具有经典 Bezier 曲线的几何不变性，通过分析导出了该类曲线的广义 de Casteljau 算法，从而得出可用于离散造型的细分算法。在此基础上，我们将研究该广义 Bezier 算子的保形性质。本文结构如下：首先在第二节中，我们介绍有关定理证明所需的一些引理，即引理 2.1~2.3。第三节，证明该算子在单调性、凸性、星形性和半可加性等方面的保形性质。第四节，给出了有关光滑性定理的证明。第五节，通过具体函数给出数值实验，进一步验证新方法的有效性。

2. 所需引理

引理 2.1.

1) $B_{n,\alpha}\left(1;x\right)=1$；

2) $B_{n,\alpha}(t;x)=x$。

证明： 由(1)式，

1) $B_{n,\alpha}(1;x)=\alpha\left[x+(1-x)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\alpha+(1-\alpha)=1$；

2) $B_{n,\alpha}(t;x)=\alpha\left[x+0\cdot(1-x)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\alpha x+(1-\alpha)x=x$。

引理 2.2. [13]对任何连续模 $\omega(t)\neq 0$，存在上凸连续模 $\tilde{\omega}(t)$，使得对 $t>0$，有 $\omega(t)\le\tilde{\omega}(t)<2\omega(t)$，其中常数 2 不能再减小，其中 $\omega(t)$ 定义如下：如果 $\omega(t)$ 是连续的，非减的，下半可加的，且 $\lim_{t\to 0^+}\omega(t)=\omega(0)=0$，则称 $\omega(t)$ 是连续模。

引理 2.3. [1]设 $\{L_n(f;x)\}$ 是 $C(I)$ 到自身的线性正算子列，I 是有限或无穷区间，且 $L_n(1;x)=1$，$L_n(t;x)=C_n x$，$0\le C_n\le 1$，若 $g(x)$ 是 I 上的上凸、单调递增、连续函数，则有 $L_n(g;x)\le g(x)$。

3. 有关保形的定理

首先，我们给出函数有关的几何性质的概念。

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $I=[0,1]$。

定义 3.1. (单调性) $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，若 $f(x_1)\le f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递增；若 $f(x_1)\ge f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调递减。

注 3. 若 $f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 单调递增 $\Leftrightarrow f'(x)\ge 0$；$f(x)$ 单调递减 $\Leftrightarrow f'(x)\le 0$。

函数的单调性在理论上可以解决不等式的证明，求最值，方程解的唯一性等问题。

定义 3.2. (凸性) $\forall 0\le\lambda\le 1$，$x_1,x_2\in I$，若 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上为下凸函数；若 $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上为上凸函数。

注 4. 若 $f''(x)$ 存在，则 $f(x)$ 为 I 上为下凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\ge 0$；$f(x)$ 为 I 上为上凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\le 0$。

函数的凸性在解决极值，经济学，博弈论，运筹学，优化理论等领域的问题方面发挥了广泛而重要的作用。

定义 3.3. (星形性) 若 $f(x)$ 非负连续，$x^{-1}f(x)$ 是 $(0,1]$ 上不增(或不减)函数且 $f(0)=0$，则称 $f(x)$ 是关于原点的星形函数。

注 5. 星形的定义也可为：设 $f(x)$ 非负连续，$\forall x\in(0,1]$，$0\le\lambda\le 1$，有 $f(\lambda x)\ge(\text{或}\le)\lambda f(x)$。

定义 3.4. (半可加性) $\forall x_1,x_2\in I$，若 $f(x_1+x_2)\le f(x_1)+f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是下半可加的；若 $f(x_1+x_2)\ge f(x_1)+f(x_2)$，则称 $f(x)$ 是上半可加的。

函数这些保形性质，彼此之间相互独立，它们对曲线曲面保形重构拟合至关重要。

定理 3.1. (单调性) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增(或减)，则对一切 $n\in N$，$B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上也单调递增(或减)。

证明： 因为 $(k+1)\binom{n}{k+1}=n\binom{n-1}{k}=(n-k)\binom{n}{k}$，由(1)式，我们可以得到

$$\begin{aligned}B'_{n,\alpha}(f;x)&=\alpha\left[f(1)-f(0)\right]+(1-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=\alpha\left[f(1)-f(0)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n-1}\left[\binom{n}{k+1}(k+1)f\left(\frac{k+1}{n}\right)-\binom{n}{k}(n-k)f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k-1},\end{aligned}\tag{2}$$

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，由(2)式知 $B'_{n,\alpha}(f;x)\ge 0$，所以 $B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增；

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，由(2)式知 $B'_{n,\alpha}(f;x)\le 0$，所以 $B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减。

定理 3.2. (凸性) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上下凸(或上凸)，则对一切 $n\in N$，$B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上也下凸(或上凸)。

证明： 由于

$$(k+1)\binom{n-1}{k+1}=(n-1)\binom{n-2}{k}=(n-1-k)\binom{n-1}{k},$$

在(2)式基础上继续求导，

$$\begin{aligned}B''_{n,\alpha}(f;x)&=(1-\alpha)n\left\{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}f\left(\frac{k+1}{n}\right)kx^{k-1}(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}f\left(\frac{k+1}{n}\right)(n-k-1)x^{k}(1-x)^{n-k-2}\right.\\&\left.-\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)kx^{k-1}(1-x)^{n-k-1}+\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)(n-k-1)x^{k}(1-x)^{n-k-2}\right\}\\&=(1-\alpha)n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^{k}(1-x)^{n-k-2}.\end{aligned}$$

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上下凸，则 $B''_{n,\alpha}(f;x)\ge 0$，所以 $B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上下凸；

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上上凸，则 $B''_{n,\alpha}(f;x)\le 0$，所以 $B_{n,\alpha}(f;x)$ 在 $[0,1]$ 上上凸。

定理 3.3. (星形性) 若 $f(x)$ 是关于原点的星形函数，则对一切 $n\in N$，$B_{n,\alpha}(f;x)$ 也是关于原点的星形函数。

证明：

$$x^{-1}B_{n,\alpha}(f;x)=\alpha\left[f(1)+x^{-1}f(0)-f(0)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^{k-1}(1-x)^{n-k},$$

对上式求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{B_{n,\alpha}(f;x)}{x}&=-\alpha f(0)x^{-2}+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left[(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k}-(n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=(1-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(k-1)x^{k-2}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=(1-\alpha)\left[\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\binom{n}{k+1}kx^{k-1}(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=(1-\alpha)\left[\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}kx^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right.\\&\left.-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=(1-\alpha)\left[\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right.\\&\left.-\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n}{k}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\right]\\&=(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k+1}-f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n}{k}\right]\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\\&=(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n-2}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right)\frac{n}{k+2}-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k+1}\right]\frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}x^{k}(1-x)^{n-k-2}.\end{aligned}$$

若 $x^{-1}f(x)$ 不增，则 $f\left(\frac{k+2}{n}\right)\frac{n}{k+2}-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\frac{n}{k+1}\le 0$，即 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{-1}B_{n,\alpha}(f;x)\right)\le 0$，所以 $x^{-1}B_{n,\alpha}(f;x)$ 不增。

注 6. 若 $x^{-1}f(x)$ 不减时，$x^{-1}B_{n,\alpha}(f;x)$ 也不减的情况同理可证。

定理 3.4. (半可加性) 若 $f(x)$ 是下半可加且 $f(0)=0$，则对一切 $n\in N$，$B_{n,\alpha}(f;x)$ 也是下半可加的。

证明： $\forall x,y\in[0,1]$，由(1)式，

$$
\begin{aligned}
B_{n,\alpha}(f;x+y)&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(x+y)^k(1-x-y)^{n-k}\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}x^jy^{k-j}(1-x-y)^{n-k}\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!}x^jy^{k-j}(1-x-y)^{n-k}\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!}x^jy^{k-j}(1-x-y)^{n-k},
\end{aligned}
$$

令 $K=k-j$，则 $k=K+j$，

$$
\begin{aligned}
&B_{n,\alpha}(f;x+y)\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{K=0}^{n-j}f\left(\frac{K+j}{n}\right)\frac{n!}{(n-K-j)!j!K!}x^jy^K(1-x-y)^{n-K-j}\\
&\le\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\left[\sum_{j=0}^{n}\sum_{K=0}^{n-j}f\left(\frac{K}{n}\right)\frac{n!}{(n-K-j)!j!K!}x^jy^K(1-x-y)^{n-K-j}\right.\\
&\quad\left.+\sum_{j=0}^{n}\sum_{K=0}^{n-j}f\left(\frac{j}{n}\right)\frac{n!}{(n-K-j)!j!K!}x^jy^K(1-x-y)^{n-K-j}\right]\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{K=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-K}f\left(\frac{K}{n}\right)\frac{n!}{K!(n-K)!}\cdot\frac{(n-K)!}{j!(n-K-j)!}x^jy^K(1-x-y)^{n-K-j}\\
&\quad+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{K=0}^{n-j}f\left(\frac{j}{n}\right)\frac{n!}{j!(n-j)!}\cdot\frac{(n-j)!}{K!(n-j-K)!}x^jy^K(1-x-y)^{n-K-j}\\
&=\alpha\left[f(1)(x+y)+f(0)(1-x-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}f\left(\frac{K}{n}\right)y^K(1-y)^{n-K}+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f\left(\frac{j}{n}\right)x^j(1-x)^{n-j}\\
&=\left\{\alpha\left[f(1)y+f(0)(1-y)\right]+(1-\alpha)\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{K}f\left(\frac{K}{n}\right)y^K(1-y)^{n-K}\right\}\\
&\quad+\left\{\alpha\left[f(1)x+f(0)(1-x)\right]+(1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f\left(\frac{j}{n}\right)x^j(1-x)^{n-j}\right\}\\
&=B_{n,\alpha}(f;x)+B_{n,\alpha}(f;y),
\end{aligned}
$$

即 $B_{n,\alpha}(f;x+y)\le B_{n,\alpha}(f;x)+B_{n,\alpha}(f;y)$，下半可加性得证。

注 7. 若 $f(x)$ 是上半可加且 $f(0)=0$ 时，$B_{n,\alpha}(f;x)$ 也是上半可加的情况同理可证。

4. 光滑性

对于 $t>0$，记 $\omega(f;t)=sup\left\{\left|f(x)-f(y)\right|:\left|x-y\right|<t,x,y\in[0,1]\right\}$ 为 $f(x)$ 的连续模[13]。

定理 4.1. 对一切 $n \in N$，$h > 0$，若 $f(x) \in C[0,1]$，则有 $\omega(B_{n,\alpha};h) \le B_{n,\alpha}(\omega;h)$。

证明： 由于

$$B_{n,\alpha}(f;x+h) = \alpha\left[f(1)(x+h) + f(0)(1-x-h)\right] + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{(n-k-j)!\,j!\,k!}f\left(\frac{k+j}{n}\right)x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j},$$

$$B_{n,\alpha}(f;x) = \alpha\left[f(1)x + f(0)(1-x)\right] + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{(n-k-j)!\,j!\,k!}f\left(\frac{j}{n}\right)x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j},$$

并注意到 $\omega(f;0) = 0$，故

$$\begin{aligned}
&\left|B_{n,\alpha}(f;x+h) - B_{n,\alpha}(f;x)\right| \\
&= \left|\alpha\left[f(1)h - f(0)h\right] + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{(n-k-j)!\,j!\,k!}\left[f\left(\frac{k+j}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right]x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j}\right| \\
&\le \alpha h\left|f(1) - f(0)\right| + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{(n-k-j)!\,j!\,k!}\left|f\left(\frac{k+j}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right)\right|x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j} \\
&= \alpha h\omega(f;1) + (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\frac{n!}{(n-k-j)!\,j!\,k!}\omega\left(f;\frac{k}{n}\right)x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j} \\
&= \alpha\left[h\omega(f;1) + (1-h)\omega(f;0)\right] + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{(n-k)!}{j!(n-k-j)!}\omega\left(f;\frac{k}{n}\right)x^j h^k (1-x-h)^{n-k-j} \\
&= \alpha\left[h\omega(f;1) + (1-h)\omega(f;0)\right] + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega\left(f;\frac{k}{n}\right)h^k (1-h)^{n-k} \\
&= B_{n,\alpha}(\omega;h).
\end{aligned}$$

定理 4.2. 若 $f \in H_\omega(A) = \{f : \omega(f;x) \le A\omega(x)\}$，则 $B_{n,\alpha}(f;x) \in H_\omega(2A)$，$\forall n \in N$。

证明： $\forall x_1, x_2 \in [0,1]$ 且 $x_1 > x_2$，$\forall n \in N$，类似于定理 4.1 证明过程中的讨论，

$$\begin{aligned}
&\left|B_{n,\alpha}(f;x_1) - B_{n,\alpha}(f;x_2)\right| \\
&\le \alpha(x_1 - x_2)\omega(f;1) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega\left(f;\frac{k}{n}\right)(x_1 - x_2)^k\left[1 - (x_1 - x_2)\right]^{n-k} \\
&\le \alpha(x_1 - x_2)A\omega(1) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A\omega\left(\frac{k}{n}\right)(x_1 - x_2)^k\left[1 - (x_1 - x_2)\right]^{n-k} \\
&= A\left\{\alpha(x_1 - x_2)\omega(1) + \alpha\left[1 - (x_1 - x_2)\right]\omega(0) + (1-\alpha)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\omega\left(\frac{k}{n}\right)(x_1 - x_2)^k\left[1 - (x_1 - x_2)\right]^{n-k}\right\} \\
&\le AB_{n,\alpha}(\omega;x_1 - x_2) \le AB_{n,\alpha}(\omega^*;x_1 - x_2) \le A\omega^*(x_1 - x_2) \le 2A\omega(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

注 8. 这里我们使用了引理 2.1~2.3。

定理 4.3. 若 $\omega(t)$ 是连续模函数，则对一切 $n \in N$，$B_{n,\alpha}(\omega;x)$ 也是 $[0,1]$ 上的连续模函数。

证明： 由 $\omega(t)$ 是连续模函数可知，$\omega(t)$ 在原点函数值为零，且具有下半可加性、单调递增性，所以 $B_{n,\alpha}(\omega;x)$ 也具有下半可加性、单调递增性、连续性。又 $\lim_{t\to 0^+} B_{n,\alpha}(\omega;t) = B_{n,\alpha}(\omega;0) = \omega(0) = 0$。综上所述，$B_{n,\alpha}(\omega;x)$ 也是 $[0,1]$ 上的连续模函数。

5. 数值实验

由于本文讨论的广义 Bezier 算子中含有一个参数 α，它可以对曲线的形状进行调控，从而使该类算

子在 CAGD 领域具有应用潜力。对一些没有凸包性要求的情况，参数 α 有更大的取值范围，比如说，α 可取负数，我们从模拟图中可以看到逼近的效果(见图 1~4)。

下面分别取 $f_1(x)=x(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ (见图 1、图 2)，$f_2(x)=1-\sin(\pi x)$ (见图 3、图 4)，进行测试。

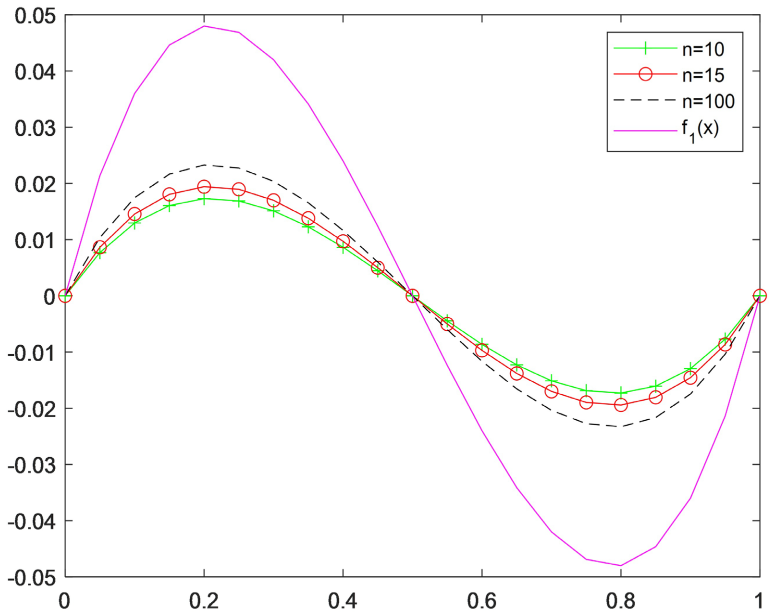

Figure 1. Estimate of the function $f_1(x)$, $\alpha=0.5$, $n=10,15,100$

图 1. $f_1(x)$的逼近情况，$\alpha=0.5$，$n=10,15,100$

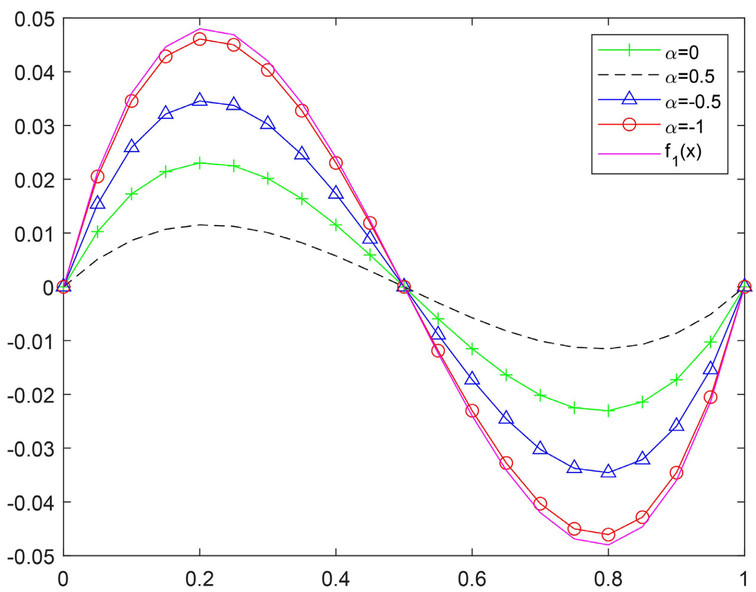

Figure 2. Estimate of the function $f_1(x)$, $n=5$, $\alpha=0,0.5,-0.5,-1$

图 2. $f_1(x)$的逼近情况，$n=5$, $\alpha=0,0.5,-0.5,-1$

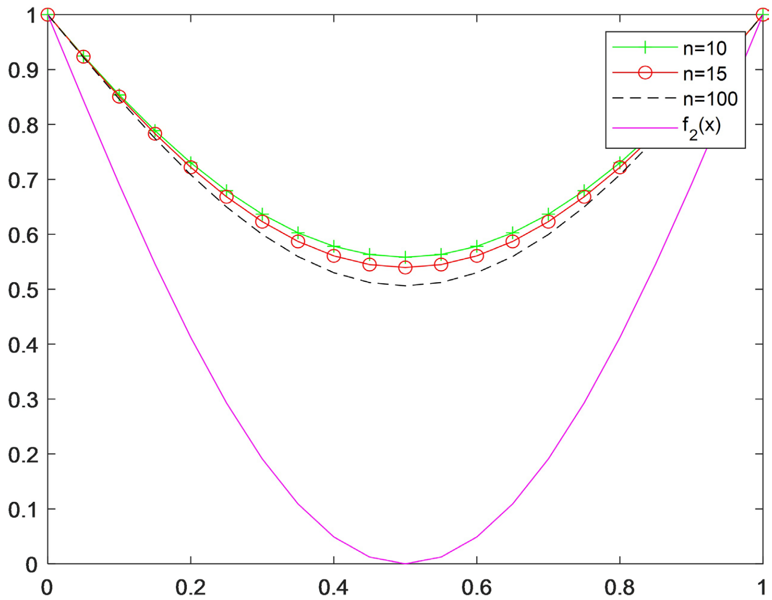

Figure 3. Estimate of the function $f_2(x)$, $\alpha=0.5$, $n=10,15,100$

图 3. $f_2(x)$的逼近情况，$\alpha=0.5$，$n=10,15,100$

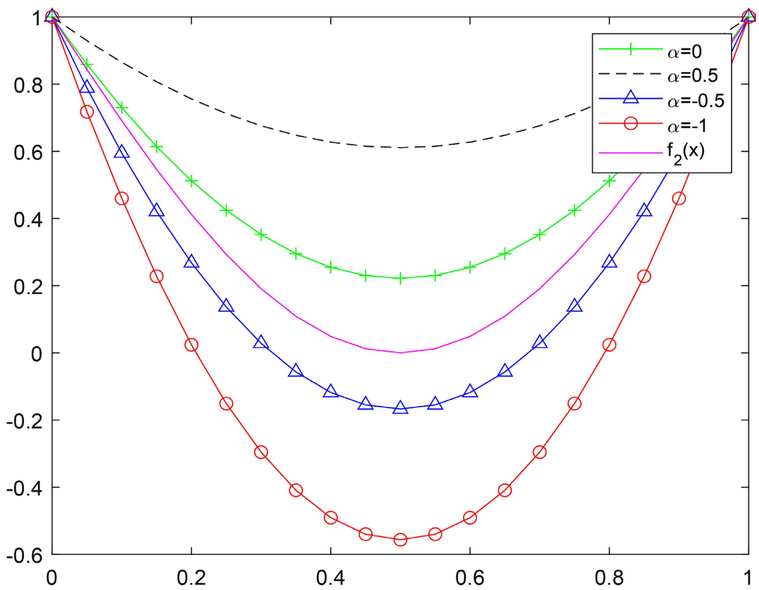

Figure 4. Estimate of the function $f_2(x)$, $n=5$, $\alpha=0,0.5,-0.5,-1$

图 4. $f_2(x)$的逼近情况，$n=5$, $\alpha=0,0.5,-0.5,-1$

基金项目

国家自然科学基金(11871191)；河北省教育厅重点基金(ZD2019053)；河北师范大学重点基金(L2020Z03)。

参考文献

[1] 侯象乾，薛银川．若干类线性正算子的$\Lambda_\omega(A)$类保持性质[J]．宁夏大学学报(自然科学版)，1995，16(1)：11-16.

[2] 张春苟. Szász-Kantorovich 算子的保形性质[J]. 应用数学学报, 2005, 28(3): 497-505.

[3] Li, Z.K. (2000) Bernstein Polynomials and Modulus of Continuity. *Journal of Approximation Theory*, **102**, 171-174. https://doi.org/10.1006/jath.1999.3374

[4] Khan, M.K., Vecchia, B.D. and Fassih, A. (1998) On the Monotonicity of Positive Linear Operators. *Journal of Approximation Theory*, **92**, 22-37. https://doi.org/10.1006/jath.1996.3113

[5] Carbone, I. (1998) Shape Preserving Properties of Some Positive Linear Operators on Unbounded Intervals. *Journal of Approximation Theory*, **93**, 140-156. https://doi.org/10.1006/jath.1997.3134

[6] Adell, J.A. and Palomares, A.P. (1998) Best Constants in Preservation Inequalities Concerning the First Modulus and Lipschitz Classes for Bernstein-type Operators. *Journal of Approximation Theory*, **93**, 128-139. https://doi.org/10.1006/jath.1998.3164

[7] de la Cal, J. and Cárcamo, J. (2001) On Certain Best Constants for Bernstein-Type Operators. *Journal of Approximation Theory*, **113**, 189-206. https://doi.org/10.1006/jath.2001.3612

[8] Bruckner, A.M. and Ostrow, E. (1962) Some Function Classes Related to the Class of Convex Functions. *Pacific Journal of Mathematics*, **12**, 1203-1215. https://doi.org/10.2140/pjm.1962.12.1203

[9] Goldman, R. (1999) The Rational Bernstein Bases and the Multirational Blossoms. *Computer Aided Geometric Design*, **16**, 701-738. https://doi.org/10.1016/S0167-8396(99)00015-1

[10] Goldman, R. and Morin, G. (2000) Poisson Approximation. *Proceedings Geometric Modeling and Processing 2000. Theory and Applications*, Hong Kong, 10-12 April 2000, 141-149. https://doi.org/10.1109/GMAP.2000.838246

[11] Madsen, R.W. (1993) Generalized Binomial Distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **22**, 3065-3086. https://doi.org/10.1080/03610929308831203

[12] 杨军, 黄倩颖. 一类广义 Bezier 曲线及其性质研究[J]. 南昌航空大学学报(自然科学版), 2020, 34(4): 19-24.

[13] 陈文忠. 算子逼近论[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 1989.