Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(9), 2560-2563
Published Online September 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.139260

带双临界项的薛定谔–泊松方程非平凡解的非存在性

万优艳[1]，万定康[2]

[1]江汉大学人工智能学院，湖北 武汉
[2]中国农业大学信息与电气工程学院，北京

收稿日期：2023年8月2日；录用日期：2023年9月4日；发布日期：2023年9月12日

摘 要

本文研究了带双临界项的薛定谔–泊松方程非平凡解的非存在性。利用变分法和积分理论，证明了当参数λ充分大时，该方程不存在非平凡解。

关键词

薛定谔–泊松方程，变分法，积分理论

The Nonexistent of Nontrivial Solutions for the Schrödinger-Poisson Equation with Double Critical Terms

Youyan Wan[1], Dingkang Wan[2]

[1]School of Artificial Intelligence, Jianghan University, Wuhan Hubei
[2]College of Information and Electrical Engineering, China Agricultural University, Beijing

Received: Aug. 2nd, 2023; accepted: Sep. 4th, 2023; published: Sep. 12th, 2023

Abstract

In this paper, we study the nonexistence of nontrivial solutions for the Schrödinger-Poisson equation with double critical terms. By using the variational method and integral theory, it is obtained that this equation has no nontrivial solutions with the parameters λ sufficiently large.

文章引用：万优艳，万定康. 带双临界项的薛定谔-泊松方程非平凡解的非存在性[J]. 理论数学，2023，13(9): 2560-2563. DOI: 10.12677/pm.2023.139260

Keywords

Schrödinger-Poisson Equation, Variation Method, Integral Theory

1. 引言

薛定谔－泊松方程是近十几年来研究的热点之一。对于如下薛定谔－泊松方程解的存在性的研究，已经有了比较丰富的成果。

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda\phi u = f(x,u) \\ -\Delta\phi = u^2 \end{cases}, \ x \in R^3 \tag{1.1}$$

其中 $\lambda > 0$。文献[1]中，作者讨论了当 $V(x)=1, f(x,u)=u^p, 1<p<5$ 的情形，得到：当 λ 充分小时存在非平凡解；当 λ 充分大时，能量泛函下确界为零则不存在非平凡解，能量泛函下确界为负无穷大则存在非平凡解。文献[2]中，作者证明了(1.1)中 $f(x,u)$ 为渐进线性且位势 $V(x)$ 满足一定条件的情形，当 λ 充分小时存在非平凡解，当 λ 充分大时不存在非平凡解。文献[3]中，作者研究了 $\lambda=1, f(x,u)=|u|^{p-1}u, 2<p<5$ 的情形，非平凡解的存在性和非存在性。特别地由 Pohozaev 恒等式和积分法证明了当 $\lambda=1, f(x,u)=u^5$，$V(x)$ 满足一定条件时，该方程只有平凡解，此时对于(1.1)中的薛定谔方程非线性项 $f(x,u)$ 是临界指数增长的。文献[4]中，作者讨论了 $\lambda=1$，$V(x)$ 为关于 x 的周期函数，$f(x,u)$ 为次临界和临界指数增长时基态解的存在性。文献[5]中，作者利用集中紧致原理和山路引理证明了如下非线性临界增长和非局部临界增长的薛定谔－泊松方程非平凡解的存在性。

$$\begin{cases} -\Delta u + u - \phi|u|^3 u = |u|^4 u + f(u) \\ -\Delta\phi = |u|^5 \end{cases}, \ x \in R^3$$

对于非平凡解的非存在性，[1] [2] [3]分别证明了(1.1)中薛定谔方程的非线性项 $f(x,u)$ 为超线性、渐近线性和临界情形且满足一定条件时，不存在非平凡解。

受以上文献的启发，本文主要讨论如下带非线性临界增长和非局部临界增长的薛定谔－泊松方程

$$\begin{cases} -\Delta u + u + \lambda\phi|u|^3 u = |u|^4 u \\ -\Delta\phi = |u|^5 \end{cases}, \ x \in R^3 \tag{1.2}$$

非平凡解的非存在性，其中 $\lambda > 0$。证明得到当 λ 充分大时，方程(1.2)不存在非平凡解。

2. 符号说明及主要引理和定理

$H^1(R^3)$ 为 Sobolev 空间，其定义为：

$$H^1(R^3) = \left\{ u \in L^2(R^3) : |\nabla u| \in L^2(R^3) \right\}$$

它的范数和内积可以表示为：

$$\|u\|_{H^1(R^3)} := \left(\int_{R^3}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(u,v) = \int_{R^3}(\nabla u\cdot\nabla v + uv)\mathrm{d}x$$

方程(1.2)的能量泛函为 $I_\lambda(u): H^1(R^3)\mapsto R$

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_{R^3}\left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{10}\int_{R^3}\phi|u|^5\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_{R^3}|u|^6\,\mathrm{d}x$$

参照[6]中的 2.1，我们得到如下引理 2.1。

引理 2.1 能量泛函 I_λ 在 $H^1(R^3)$ 是连续可微的，它的临界点是(1.2)的弱解，且该弱解也是(1.2)的一个经典解。

本文主要结论如下：

定理 2.2 当 $\lambda \ge \frac{1}{4}$ 时，方程(1.2)不存在非平凡解。

3. 定理 2.2 的证明

由 $-\Delta\phi = |u|^5$ 可得

$$\int_{R^3}\phi|u|^5\,\mathrm{d}x = \int_{R^3}\phi(-\Delta\phi)\,\mathrm{d}x = \int_{R^3}|\nabla\phi|^2\,\mathrm{d}x \tag{3.1}$$

还可得

$$\int_{R^3}|u|^6\,\mathrm{d}x = \int_{R^3}|u|(-\Delta\phi)\,\mathrm{d}x = \int_{R^3}\nabla|u|\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x$$

由于 $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ 几乎处处成立，由均值不等式得到：

$$\int_{R^3}|u|^6\,\mathrm{d}x = \int_{R^3}\nabla|u|\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x \le \int_{R^3}\left(|\nabla u|^2 + \frac{1}{4}|\nabla\phi|^2\right)\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_{R^3}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \ge \int_{R^3}\left(|u|^6 - \frac{1}{4}|\nabla\phi|^2\right)\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

把(1.2)的第一个方程乘以 u 然后积分，有

$$0 = \int_{R^3}\left(|\nabla u|^2 + u^2 + \lambda\phi|u|^5 - |u|^6\right)\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

把(3.1)和(3.2)代入(3.3)可得

$$0 \ge \int_{R^3}\left(|u|^6 + \left(\lambda - \frac{1}{4}\right)|\nabla\phi|^2 + u^2 - |u|^6\right)\mathrm{d}x$$

当 $\lambda \ge \frac{1}{4}$ 时：

$$0 \ge \int_{R^3}u^2\mathrm{d}x$$

因为 $u^2 \ge 0$ 且仅在 $u \equiv 0$ 时等号成立。故此方程的解只有零解。即方程(1.2)只有平凡解，不存在非平凡解。

参考文献

[1] Ruiz, D. (2006) The Schrödinger-Poisson Equation under the Effect of a Nonlinear Local Term. *Journal of Functional*

Analysis, **237**, 655-674. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2006.04.005

[2] Wang, Z. and Zhou, H. (2007) Positive Solution for a Nonlinear Stationary Schrödinger-Poisson System in R^3. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**, 809-816. https://doi.org/10.3934/dcds.2007.18.809

[3] Azzollini, A. (2008) Pomponio A. Ground State Solutions for Nonlinear Schrodinger-Maxwell Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applicaions*, **345**, 90-108. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.03.057

[4] Sun, J. and Ma, S. (2016) Ground State Solutions for Some Schrödinger-Poisson Systems with Periodic Potentials. *Journal of Differential Equations*, **260**, 2119-2149. https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.09.057

[5] 冯晓晶. 带有双临界项的薛定谔-泊松系统非平凡解的存在性[J]. 数学物理学报, 2020, 40A(6): 1590-1598.

[6] D'Avenia, P. (2002) Non-Radially Symmetric Solutions of Nonlinear Schrödinger Equation Coupled with Maxwell Equations. *Advanced Nonlinear Studies*, **2**, 177-192. https://doi.org/10.1515/ans-2002-0205