Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 3037-3047
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310314

Hans汉斯

无穷时滞测度泛函微分方程的解的存在性

曹跃菊

上海出版印刷高等专科学校基础教学部，上海

收稿日期：2023年9月18日；录用日期：2023年10月19日；发布日期：2023年10月31日

摘　要

本文研究Banach空间中具有无穷时滞的半线性测度泛函微分方程的温和解的存在性，应用Schauder不动点定理给出了系统的解的存在性判据，推广和改进了已有文献中的结果，最后给出了一个例子来说明所得结论。

关键词

测度泛函微分方程，无穷时滞，Lebesgue-Stieltjes积分，正则函数，C_0半群

Existence of Solutions of Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay

Yueju Cao

Department of Foundational Teaching, Shanghai Publishing and Printing College, Shanghai

Received: Sep. 18th, 2022; accepted: Oct. 19th, 2023; published: Oct. 31st, 2023

Abstract

The paper investigates the existence of mild solutions for semilinear measure functional

文章引用：曹跃菊. 无穷时滞测度泛函微分方程的解的存在性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 3037-3047.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310314

differential equations with infinite delay in Banach spaces. Some existence criteria for the system are obtained by using Schauder's fixed point theorem. The results in this paper improve and generalize those well known in the literature. Finally, an example is given to illustrate our results.

Keywords

Measure Functional Differential Equations, Infinite Delay, Lebesgue-Stieltjes Integrals, Regulated Functions, C_0 Semigroup

1. 引言

近年来，由于其广泛的应用，脉冲微分方程理论已经取得了很多研究成果，与通常的脉冲系统相比，测度微分方程是另一种研究动力系统中脉冲行为的方法，这种系统的特征是允许在有限时间区间上有无穷多个不连续点，从而这种系统能描述一些非经典问题，例如量子效应和Zeno行为。另外，基于不同的测度，测度微分方程包含了常微分方程、差分方程和通常的脉冲微分方程以及一般时间尺度上的动力学方程[1–3]。最近，测度微分方程已经在应用领域引起了新的关注，如在传染病模型、多智能体控制中的应用[4–6]。

在[7–10]中，作者研究了无时滞的半线性测度微分方程的温和解的存在性，而在实际系统的数学模型中，无穷时滞是很重要的，Bnach空间中具有无穷时滞的泛函微分方程已经取得了比较完善的成果[11]，但是，目前关于Bnach空间中无穷时滞的测度泛函微分方程的研究还很少。众所周知，在处理无穷时滞的泛函微分方程时，需要构建一个容许相空间，在[12]中，为了建立具有无穷时滞的非线性测度微分方程和广义常微分方程之间的联系，作者公理化地定义了一个复杂的相空间，而本文将参考[11]中的方法定义相空间$\mathcal{B}$，因为测度泛函微分方程的解是不连续的，需要对[11]中$\mathcal{B}$的公理化定义做适当的修改。

本文研究如下形式的测度泛函微分方程

$$\begin{aligned} &dx = Ax + f(t, x_t)dg, \quad t \in J, \\ &x_0 = \phi, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$J=[0,b]$，$b>0$，状态变量$x(\cdot)$在Banach空间X中取值。$A: D(A) \subseteq X \to X$是$C_0$半

群$T(t), t \geq 0$的无穷小生成元[13]。$x_t : (-\infty, 0] \to X$ 属于某个相空间$\mathcal{B}$，定义为$x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0]$, $g : J \to \mathbb{R}$是一个左连续的单调不减函数。dx和dg分别表示x和g的分布导数。

本文组织如下，在第二部分，介绍关于Lebesgue-Stieltjes积分和正则函数的一些概念和结论，以及相空间的公理化构建，第三部分介绍本文的主要结果，第四部分总结全文并提出新的研究思路。

2. 预备知识

设X是Banach空间，具有范数$\|\cdot\|$，$[a,b]$是一个闭区间。如果极限

$$\lim_{s \to t^-} f(s) = f(t^-), t \in (a,b] \quad \text{和} \quad \lim_{s \to t^+} f(s) = f(t^+), t \in [a,b)$$

存在，则称函数$f : [a,b] \to X$是定义在区间$[a,b]$上的正则函数，开区间或者半开半闭区间上的正则函数可以类似定义。设区间$I \subset \mathbb{R}$，则$G(I,X)$ 表示所有正则函数$f : I \to X$构成的集合，$C(I,X)$表示所有连续函数$f : I \to X$构成的集合。一个正则函数的不连续点集至多是可数集，当赋予范数$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$时，$G([a,b],X)$是Banach空间[14]。

引理2.1[2] 设有函数$f : [a,b] \to X$和$g : [a,b] \to \mathbb{R}$满足g是正则的，且积分$\int_a^b f dg$存在。则对每个$t_0 \in [a,b]$，函数$h(t) = \int_{t_0}^t f dg$, $t \in [a,b]$存在且是正则函数，并且满足

$$\begin{aligned} h(t^+) &= h(t) + f(t)\Delta^+ g(t), \quad t \in [a,b), \\ h(t^-) &= h(t) - f(t)\Delta^- g(t), \quad t \in (a,b], \end{aligned}$$

这里$\Delta^+ g(t) = g(t^+) - g(t)$，$\Delta^- g(t) = g(t) - g(t^-)$.

定义2.2[2] 集合$\mathcal{A} \subset G([a,b],X)$称为等度正则的，如果对任意$\varepsilon > 0$，$t_0 \in [a,b]$，存在$\delta > 0$，使得

(i) 如果$x \in \mathcal{A}$，$t \in [a,b]$，$t_0 - \delta < t < t_0$，则$\|x(t_0{}^-) - x(t)\| < \varepsilon$.

(ii) 如果$x \in \mathcal{A}$, $t \in [a,b]$，$t_0 < t < t_0 + \delta$, 则$\|x(t) - x(t_0{}^+)\| < \varepsilon$.

引理2.3[2] 设$\{x_n\}_{n=1}^\infty$是定义在$[a,b]$上，取值在X中的一列函数。如果当$n \to \infty$时，x_n 逐点收敛到x_0，且$\{x_n\}_{n=1}^\infty$是等度正则的，则x_n一致收敛到x_0。

下面是关于正则函数空间中的列紧集的结论，可以看成连续函数空间中的Arzelá-Ascoli定理在正则函数空间中的推广。

引理2.4[2] 设X是Banach空间。假设集合$\mathcal{A} \subset G([a,b],X)$是等度正则的，且对每个$t \in [a,b]$，集合$\{x(t) : t \in \mathcal{A}\}$是$X$中的列紧集，则集合$\mathcal{A}$是$G([a,b],X)$中的列紧集。

引理 2.5(Schauder不动点定理) [15] 设X是Banach空间，$B \subseteq X$是有界闭凸集，如果算子$N : B \to B$是全连续的，则N在B中至少有一个不动点。

对带有无穷时滞的方程，关键问题之一是选择适当的相空间。注意到测度泛函微方程的解不连续，只是正则的，我们定义相空间$\mathcal{B}$是$(-\infty, 0]$到X的函数构成的线性空间，具有半范数$\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$，

满足下列公理：

(A) 如果$x:(-\infty,b]\to X, b>0$满足$x_0\in\mathcal{B}$，$x|_{[0,b]}\in G([0,b];X)$，则对每个$t\in[0,b]$，下列条件成立：

(i) $x_t\in\mathcal{B}$,

(ii) $\|x(t)\|\le H(t)\|x_t\|_{\mathcal{B}}$,

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}}\le K(t)\sup\{\|x(s)\|:0\le s\le t\}+N(t)\|x_0\|_{\mathcal{B}}$,

这里$H,N:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，$K:[0,+\infty)\to[1,+\infty)$都是局部有界函数，并且独立于$x(\cdot)$.

(B) 空间$\mathcal{B}$是完备的。

注： 在测度泛函微分方程中，映射$t\to x_t$, $t\in[0,b]$是不连续的，从而此处的相空间$\mathcal{B}$去掉了文献[11]中的这个性质。另外，常数H放松为函数$H(t)$，不要求函数$K(t)$连续。另一方面，我们不要求定义在$(-\infty,0]$上的映射$t\to\|x_t\|_{\mathcal{B}}$是正则的，而文献[12]中要求这个条件。

下面我们给出两个抽象相空间$\mathcal{B}$的例子。

例 2.6 考虑空间

$$BG=\{\varphi\in G((-\infty,0],X):\|\varphi(\theta)\|\text{有界}\},$$

赋予范数$\|\varphi\|_\infty=\sup\{\|\varphi(\theta)\|:-\infty<\theta\le 0\}$.

对$t\ge 0$，设$H(t)=K(t)=N(t)=1$，易验证公理(A)中的条件满足。另一方面，如果一个正则函数序列是一致收敛的，则它的极限函数也是正则的（证明类似于连续函数的情形），这就验证了空间BG的完备性。

例 2.7 对任何实常数ρ，考虑空间

$$G_\rho=\{\varphi\in G((-\infty,0],X):\lim_{\theta\to-\infty}e^{\rho\theta}\varphi(\theta)\text{ 存在}\},$$

赋予范数

$$\|\varphi\|_\rho=\sup_{-\infty<\theta\le 0}\|e^{\rho\theta}\varphi(\theta)\|.$$

设$H(t)=1$, $K(t)=\max\{1,e^{-\rho t}\}$，$N(t)=e^{-\rho t}$，易验证公理(A)中的条件满足。

定义算子$F:G_\rho\to BG$为$(F\varphi)(\theta)=e^{\rho\theta}\varphi(\theta)$，显然它是$G_\rho$和$BG$之间的等距同构，从而由$BG$的完备性，可知$G_\rho$是一个完备空间，这就验证了条件(B)。

3. 主要结论

设空间

$$\tilde{\mathcal{B}}=\{x:(-\infty,b]\to X,\ x|_J\in G(J;X),x_0=\phi\in\mathcal{B}\}.$$

设$\|\cdot\|_b$是定义在$\tilde{\mathcal{B}}$上的半范数：

$$\|x\|_b=\|\phi\|_{\mathcal{B}}+\sup\{\|x(t)\|:t\in J\},\ \ x\in\tilde{\mathcal{B}}.$$

设$\mathcal{LS}_g(J,X)$表示所有关于g是Lebesgue-Stieltjes的函数$f:J\to X$构成的空间，μ_g表示由g诱导的Lebesgue-Stieltjes测度。下面给出如下假设条件：

(H1) $T(t),t>0$,是X上的紧半群，设$M=\sup_{0\le t\le b}\|T(t)\|$.

(H2) 函数$f:J\times\mathcal{B}\to X$满足：

(i) 对每个$t\in J$, 函数$f(t,\cdot):\mathcal{B}\to X$连续；

(ii) 在测度μ_g意义下，对几乎处处$t\in J$，函数$f(t,\cdot):\tilde{\mathcal{B}}\to X$是连续的；对所有$\psi\in\tilde{\mathcal{B}}$，函数$f(\cdot,\psi):J\to X$是$\mu_g$可测的；

(iii) 对每个正数l，存在关于g是Lebesgue-Stieltjes的函数$m_l:J\to\mathbb{R}^+$，满足

$$\sup_{\|\psi\|_{\mathcal{B}}\le l}\|f(t,\psi)\|\le m_l(t),\quad \liminf_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_0^b m_l(s)dg(s)=\gamma<\infty.$$

定义3.1 函数$x\in\tilde{\mathcal{B}}$称为系统(1)的温和解，如果x满足下列测度积分方程

$$x(t)=T(t)\phi(0)+\int_0^t T(t-s)f(s,x_s)dg(s),\quad t\in J.$$

定理3.2 如果假设条件(H1)和(H2)成立，且

$$MK_b\gamma<1, \tag{2}$$

这里$K_b=\sup_{0\le t\le b}K(t)$，则系统(1)至少由一个温和解存在。

证明： 定义算子$P:\tilde{\mathcal{B}}\to\tilde{\mathcal{B}}$：$(Px)_0=\phi$ 且

$$(Px)(t)=T(t)\phi(0)+\int_0^t T(t-s)f(s,x_s)dg(s),\ \ t\in J.$$

则算子P的不动点正是系统(1)的温和解。

对$\phi\in\mathcal{B}$，定义

$$\hat{\phi}(t)=\begin{cases}\phi(t), & t\in(-\infty,0],\\ T(t)\phi(0), & t\in J.\end{cases}$$

令$x(t)=y(t)+\hat{\phi}(t),t\in(-\infty,b]$. 显然$x$是系统(1)的温和解，当且仅当$y$满足$y_0=0$且

$$y(t)=\int_0^t T(t-s)f(s,y_s+\hat{\phi}_s)dg(s),\ \ t\in J.$$

考虑空间

$$\tilde{\mathcal{B}}_0=\{y:(-\infty,b]\to X,\ y|_J\in G(J,X),y_0=0\},$$

其中范数

$$\|y\|_b = \|y_0\|_{\mathcal{B}} + \sup\{\|y(t)\| : t \in J\} = \sup\{\|y(t)\| : t \in J\},$$

则$(\tilde{\mathcal{B}}_0, \|\cdot\|_b)$是一个Banach空间。

定义算子$\Phi : \tilde{\mathcal{B}}_0 \to \tilde{\mathcal{B}}_0$：$(\Phi y)_0 = 0$，且

$$(\Phi y)(t) = \int_0^t T(t-s) f(s, y_s + \hat{\phi}_s) dg(s), \ \ t \in J.$$

显然，算子P有一个不动点，当且仅当算子Φ有一个不动点，下面证明算子Φ有一个不动点。

设l是大于零的常数，$B_l = \{y \in \tilde{\mathcal{B}}_0 : \|y\|_b \le l\}$. 对每个正数$l$，$B_l$显然是$\tilde{\mathcal{B}}_0$中的有界闭凸集。对每个$y \in B_l$，$t \in J$，有

$$\begin{aligned}
&\|y_t + \hat{\phi}_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\le \|y_t\|_{\mathcal{B}} + \|\hat{\phi}_t\|_{\mathcal{B}} \\
&\le K(t) \sup\nolimits_{0\le s\le t} \|y(s)\| + N(t)\|y_0\|_{\mathcal{B}} + K(t) \sup\nolimits_{0\le s\le t} \|\hat{\phi}(s)\| + N(t)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\le K(t) l + K(t) M \|\phi(0)\| + N(t)\|\phi\|_{\mathcal{B}} \\
&\le K_b(l + M\|\phi(0)\|) + N_b\|\phi\|_{\mathcal{B}} = l',
\end{aligned}$$

这里$K_b = \sup_{0\le t\le b} K(t)$，$N_b = \sup_{0\le t\le b} N(t)$. 记$\{\Phi B_l\} = \{\Phi y : y(\cdot) \in B_l\}$.

首先证明存在一个正数l满足$\{\Phi B_l\} \subseteq B_l$. 若不然，对每个正数$l$，存在函数$y_l(\cdot) \in B_l$，但是$(\Phi y_l)(\cdot) \notin B_l$，即对某个$t \in J$，$\|(\Phi y_l)(t)\| > l$. 另一方面，有

$$\begin{aligned}
l &< \|(\Phi y_l)(t)\| \\
&= \left\| \int_0^t T(t-s) f(s, y_{l,s} + \hat{\phi}_s) dg(s) \right\| \\
&\le M \int_0^t \|f(s, y_{l,s} + \hat{\phi}_s)\| dg(s) \\
&\le M \int_0^b m_{l'}(s) dg(s).
\end{aligned}$$

将上述不等式两边同除以l，并令$l \to +\infty$，取下极限，得

$$1 \le M \liminf_{l\to+\infty} \frac{1}{l'} \int_0^b m_{l'}(s) dg(s) \cdot \frac{l'}{l} = M\gamma K_b.$$

这与条件(2)矛盾。从而对某个正数l，有$\{\Phi B_l\} \subseteq B_l$.

下面证明Φ是一个全连续算子。首先证明集合$\{\Phi B_l\}$在J上是等度正则的，对每个$t_0 \in [0, b)$，有

$$\begin{aligned}
&\|(\Phi y)(t) - (\Phi y)(t_0{}^+)\| \\
&\le \int_0^{t_0{}^+} \|(T(t-s) - T(t_0{}^+ - s)) f(s, y_s + \hat{\phi}_s)\| dg(s) \\
&\quad + \int_{t_0{}^+}^t \|T(t-s) f(s, y_s + \hat{\phi}_s)\| dg(s) \\
&\le \int_0^b \|T(t-s) - T(t_0{}^+ - s)\| m_{l'}(s) dg(s) + M \int_{t_0{}^+}^t m_{l'}(s) dg(s) \\
&= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

根据半群$T(t), t > 0$的紧性和强连续性，$T(t)$在一致算子拓扑的意义下是连续的，从而当$t \to {t_0}^+$时，$I_1 \to 0$. 另外，令$h(t) = \int_0^t m_{l'}(s)dg(s)$，根据引理2.1，$h(t)$是$J$上的正则函数，从而，当$t \to {t_0}^+$时，$I_2 = h(t) - h({t_0}^+) \to 0$.

同理可证，对$t_0 \in (0, b]$，当$t \to {t_0}^-$时，$\|(\Phi y)({t_0}^-) - (\Phi y)(t)\| \to 0$. 根据定义2.2，$\{\Phi B_l\}$在$J$上是等度正则的。

其次证明对每个$t \in J$，集合$V(t) = \{(\Phi y)(t) : y \in B_l\}$在$X$中是列紧的。当$t = 0$时，$V(0) = \{0\}$，显然成立。固定$t, 0 < t \le b$，设$\eta$是一个实数且$0 < \eta < t$，对每个$y \in B_l$，定义

$$\begin{aligned}(\Phi_\eta y)(t) &= \int_0^{t-\eta} T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)dg(s)\\ &= T(\eta)\int_0^{t-\eta} T(t-s-\eta)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)dg(s).\end{aligned}$$

由于$T(t)$ $(t > 0)$是紧的，且

$$\left\|\int_0^{t-\eta} T(t-s-\eta)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)dg(s)\right\| \le M\int_0^b m_{l'}(s)dg(s),$$

则对每个$\eta, 0 < \eta < t$，集合$V_\eta(t) = \{(\Phi_\eta y)(t) : y \in B_l\}$是$X$中的列紧集。

另一方面，对每个$y \in B_l$，注意到假设(H2)(iii)，有

$$\begin{aligned}\|(\Phi y)(t) - (\Phi_\eta y)(t)\| &= \left\|\int_{t-\eta}^t T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)dg(s)\right\|\\ &\le M\int_{t-\eta}^t m_{l'}(s)dg(s).\end{aligned}$$

因为g是左连续的，根据引理2.1，当$\eta \to 0^+$时，上面式子中最后一项趋于零，从而存在列紧集任意趋近集合$V(t)$，因而对每个$t \in J$，$V(t)$是X中的列紧集。再根据引理2.4，集合$\{(\Phi y)|_J : y \in B_l\}$是$G(J, X)$中的列紧集，集合$\{\Phi B_l\}$是$\mathcal{B}_0$中的列紧集。综上所述，$\Phi$是紧算子。

最后证明Φ是B_l上的连续算子。令$\{y_n\}$是B_l中的收敛序列，且当$n \to \infty$时，$y_n \to y$，即$\|y_n - y\|_b \to 0$. 则根据公理(A)(iii)，对每个$s \in J$，有

$$\begin{aligned}\|y_{n,s} - y_s\|_{\mathcal{B}} &\le K(s)\sup\{\|y_n(\tau) - y(\tau)\| : 0\\ &\le \tau \le s\} \le K_b\|y_n - y\|_b.\end{aligned}$$

所以$y_{n,s} \to y_s$. 进一步，根据假设(H2)(i)，可得$f(s, y_{n,s} + \hat{\phi}_s) \to f(s, y_s + \hat{\phi}_s)$. 由于$\|f(s, y_{n,s} + \hat{\phi}_s)\| \le m_{l'}(s)$，根据Lebesgue-Stieltjes积分的控制收敛定理，对每个$t \in J$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\Phi y_n)(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t T(t-s)f(s, y_{n,s} + \hat{\phi}_s)dg(s)\\ &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} T(t-s)f(s, y_{n,s} + \hat{\phi}_s)dg(s)\\ &= \int_0^t T(t-s)f(s, y_s + \hat{\phi}_s)dg(s)\\ &= (\Phi y)(t).\end{aligned}$$

另外，由于$\{\Phi y_n\}_{n=1}^{\infty}$在$J$上是等度正则的，则根据引理2.3，在$J$上，$\{\Phi y_n\}$一致收敛到$\{\Phi y\}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}\|\Phi y_n-\Phi y\|_b=\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in J}\|(\Phi y_n)(t)-(\Phi y)(t)\|=0.$$

所以算子Φ是连续的，从而Φ是B_l上的全连续算子。根据引理2.5，Φ在B_l中有一个不动点$y(\cdot)$，显然$x=y+\hat{\phi}$是测度系统(1) 的温和解，证毕。

注： 设$PC(J,X)$表示定义在J上的逐段连续函数构成的空间，因为$C(J,X)\subset PC(J,X)\subset G(J,X)$，根据脉冲泛函微分方程和测度泛函微分方程之间的联系[3]，本文的结果可以看作脉冲泛函微分方程相应结果的推广。

例3.3 考虑下列测度型偏泛函微分方程：

$$\begin{cases} d_t z(t,\omega)=\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}z(t,\omega)+\left(\int_{-\infty}^{0}K(\theta)z(t+\theta,\omega)d\theta\right)dg(t), \\ \quad t\in[0,1],\ \omega\in[0,\pi], \\ z(t,0)=z(t,\pi)=0, \qquad t\in[0,1], \\ z(\theta,\omega)=z_0(\theta,\omega), \quad \theta\le 0,\ \omega\in[0,\pi], \end{cases} \tag{3}$$

这里$K:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$是一个连续函数。对每个$\omega\in[0,\pi]$，$z_0(\cdot,\omega):(-\infty,0]\to\mathbb{R}$在$(-\infty,0]$上是正则的；对每个$\theta\le 0$，$z_0(\theta,\cdot):[0,\pi]\to\mathbb{R}$在$[0,\pi]$上是连续的。$g:[0,1]\to\mathbb{R}$是一个左连续单调不减函数。

令$X=L^2([0,\pi])$，赋予$\|\cdot\|_{L^2}$范数。定义算子$A:X\to X$为$Ay=y''$，定义域为

$$D(A)=\{y\in X: y,y' \text{ 是绝对连续的, } y''\in X, y(0)=y(\pi)=0\}.$$

则A生成一个强连续的紧半群$T(t),t\ge 0$[13]。此外，A有离散谱，特征值是$-n^2,n=1,2...$，相应的标准化特征向量为$e_n(\zeta)=\sqrt{2/\pi}\sin(n\zeta),n=1,2,....$ 则下列性质成立：

(a) 如果$y\in D(A)$，则

$$Ay=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\langle y,e_n\rangle e_n;$$

(b) 对每个$y\in X$，

$$T(t)y=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2t}\langle y,e_n\rangle e_n.$$

显然，$M=\sup_{0\le t\le 1}\|T(t)\|=1.$

取相空间为例2.7中的空间G_ρ，对所有$\omega\in[0,\pi]$，$\psi\in G_\rho$，定义

$$f(\psi)(\omega)=\int_{-\infty}^{0}K(\theta)\psi(\theta)(\omega)d\theta.$$

令

$$\begin{cases} x(t)(\omega) = z(t,\omega) & t \in [0,1],\ \omega \in [0,\pi], \\ \phi(\theta)(\omega) = z_0(\theta,\omega) & \theta \le 0,\ \omega \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{4}$$

则系统(3)能写成下列抽象形式：

$$\begin{cases} d_t x(t) = Ax(t) + f(x_t)dg(t), & t \in [0,1], \\ x_0 = \phi \in G_\rho. \end{cases} \tag{5}$$

假设下列条件成立：

(i) $\sqrt{\pi}\max\{1, e^{-\rho}\}(g(1)-g(0))\int_{-\infty}^{0} e^{-\rho\theta}K(\theta)d\theta < 1$.

(ii) $\lim_{\theta\to-\infty} e^{\rho\theta}z_0(\theta,\omega)$存在，且对$\omega \in [0,\pi]$一致.

对$\psi \in G_\rho$，有

$$\|\psi\|_\rho = \sup_{\theta\le 0} e^{\rho\theta}\|\psi(\theta)\|_{L^2} = \sup_{\theta\le 0} e^{\rho\theta}\left(\int_0^\pi |\psi(\theta)(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}$$

且

$$\begin{aligned} \|f(\psi)\|_{L^2} &= \left(\int_0^\pi |f(\psi)(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \\ &= \left\{\int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^0 K(\theta)\psi(\theta)(\omega)d\theta\right]^2 d\omega\right\}^{1/2} \\ &\le \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\rho\theta}K(\theta)\left[e^{\rho\theta}\left(\int_0^\pi |\psi(\theta)(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}\right]d\theta \\ &\le \left(\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\rho\theta}K(\theta)d\theta\right)\|\psi\|_\rho. \end{aligned}$$

令$m_l(t) = \left(\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\rho\theta}K(\theta)d\theta\right)l$，则

$$\gamma = \int_0^1 \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^0 e^{-\rho\theta}K(\theta)d\theta dg(s) = \sqrt{\pi}(g(1)-g(0))\int_{-\infty}^0 e^{-\rho\theta}K(\theta)d\theta.$$

因此，假设(H2)满足，又由条件(i)，不等式(2)成立，从而定理3.2中的所有条件满足，根据定理3.2，测度型方程(5)有温和解存在。根据系统(3)与(5)之间的关系式(4)，系统(3)有温和解存在。

4. 总结

本文提出了Banach空间中具有无穷时滞的半线性测度泛函微分方程，这种系统可以作为一类复杂的混杂系统的数学模型。我们首先定义了适当的相空间，然后应用Schauder不动点定理证明了系统的存在性结论。本文中的结果也可应用于具有无穷时滞的一般时间尺度上的动力学方程，因为根据[1–3]，这种方程可以转化成具有无穷时滞的测度泛函微分方程。此外，还可以进一步研究具有无穷时滞的分数阶测度泛函微分方程。

基金项目

上海出版印刷高等专科学校高层次引进人才科研启动资金（Y0E-0203-23-18-02y No. 2023R-CKY04）。

参考文献

[1] Federson, M., Mesquita, J.G. and Slavík, A. (2012) Measure Functional Differential Equations and Functional Dynamic Equations on Time Scales. *Journal of Differential Equations*, **252**, 3816-3847. https://doi.org/10.1016/j.jde.2011.11.005

[2] Mesquita, J.G. (2012) Measure Functional Differential Equations and Impulsive Functional Dynamic Equations on Time Scales. Ph.D. Thesis, Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo.

[3] Federson, M., Mesquita, J.G. and Slavík, A. (2013) Basic Results for Functional Differential and Dynamic Equations Involving Impulses. *Mathematische Nachrichten*, **286**, 181-204. https://doi.org/10.1002/mana.201200006

[4] Chyba, M., Colombo, R.M., Garavello, M. and Piccoli, B. (2022) Advanced Mathematical Methodologies to Contrast COVID-19 Pandemic. *Networks and Heterogeneous Media*, **17**, i-ii. https://doi.org/10.3934/nhm.2022020

[5] Weightman, R. and Piccoli, B. (2023) Optimization of Non-Pharmaceutical Interventions for a Mutating Virus. 2023 *American Control Conference (ACC) IEEE*, San Diego, CA, 31 May-2 June 2023, 307-312. https://doi.org/10.23919/ACC55779.2023.10156293

[6] Piccoli, B. (2023) Control of Multi-Agent Systems: Results, Open Problems, and Applications. *Open Mathematics*, **21**, 20220585. https://doi.org/10.1515/math-2022-0585

[7] Cao, Y. and Sun, J. (2015) Existence of Solutions for Semilinear Measure Driven Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **425**, 621-631. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.042

[8] Cao, Y. and Sun, J. (2016) Measures of Noncompactness in Spaces of Regulated Functions with Application to Semilinear Measure Driven Equations. *Boundary Value Problems*, **2016**, Article No. 38. https://doi.org/10.1186/s13661-016-0539-1

[9] Cao, Y. and Sun, J. (2018) Approximate Controllability of Semilinear Measure Driven Systems. *Mathematische Nachrichten*, **291**, 1979-1988. https://doi.org/10.1002/mana.201600200

[10] Gou, H. and Li, Y. (2022) Existence and Approximate Controllability of Semilinear Measure Driven Systems with Nonlocal Conditions. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **48**, 769-789. https://doi.org/10.1007/s41980-021-00546-2

[11] Hino, Y., Naito, T. and Murakami, S. (1991) Functional Differential Equations with Infinite Delay. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/BFb0084432

[12] Slavík, A. (2013) Measure Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Nonlinear Analysis*, **79**, 140-155. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.11.018

[13] Pazy, A. (1983) Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1

[14] Hönig, C.S. (1975) Volterra-Stieltjes Integral Equations. North-Holland, Amsterdam.

[15] Dugundji, J. and Granas, A. (1982) Fixed Point Theory. PWN Polish Scientific Publishers, Warsaw.