Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2862-2876
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310293

Hans汉斯

θ-型 Calderón-Zygmund 算子交换子在齐次变指标 Herz 空间中的有界性

薛凤宇

牡丹江师范学院数学系，牡丹江 黑龙江

收稿日期：2023年9月6日；录用日期：2023年10月6日；发布日期：2023年10月18日

摘 要

本文研究了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的交换子在具有三个变指标的齐次 Herz 空间 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界性。

关键词

θ-型 Calderón-Zygmund 算子，交换子，变指标 Herz 空间，BMO 空间

Boundedness of Commutators for θ-Type Calderón-Zygmund Operators on Homogeneous Herz Spaces with Variable Exponents

Fengyu Xue

Department of Mathematics, Mudanjiang Normal University, Mudanjiang Heilongjiang

Received: Sep. 6^{th}, 2023; accepted: Oct. 6^{th}, 2023; published: Oct. 18^{th}, 2023

文章引用: 薛凤宇. θ-型 Calderón-Zygmund 算子交换子在齐次变指标 Herz 空间中的有界性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2862-2876. DOI: 10.12677/pm.2023.1310293

Abstract

In this paper, we investigated the boundedness of commutators generated by θ-type Calderón-Zygmund operators with symbol function b in BMO spaces on homogeneous Herz spaces $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ with three variable exponents.

Keywords

θ-Type Calderón-Zygmund Operators, Commutator, Herz Spaces with Variable Exponents, BMO Space

1. 引言

自 Calderón 和 Zygmund 引入高维奇异积分算子以来, Calderón-Zygmund 算子及其各种形式的推广受到众多学者的广泛研究. 1985 年, Yabuta [1] 和彭 [2] 分别独立地把具有标准核的 Calderón-Zygmund 算子作了推广, 引入了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子.

定义1.1. [1] 设 θ 是$(0,+\infty)$ 上非负非减函数且满足

$$\int_0^1 \theta(t)t^{-1}dt < \infty.$$

称定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ 上的可测函数 $K(x,y)$ 是一个 θ-型核, 如果

(i) 当 $x \neq y$ 时, 有

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n};$$

(ii) 当 $|x-y| \geq 2|x-x'|$ 时, 有

$$|K(x,y) - K(x',y)| + |K(y,x) - K(y,x')| \leq C\theta\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right)|x-y|^{-n}.$$

称线性算子 $T_\theta : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子, 如果

(iii) T_θ 能扩张成从 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 到其自身的有界线性算子;

(iv) 存在一个 θ-型核 $K(x,y)$, 使得对所有的 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有

$$T_\theta f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)f(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} f,$$

其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 Schwartz 函数类, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的无穷次可微函数空间.

易知, 当 $\theta(t) = t^\delta$ $(0 < \delta \le 1)$ 时, T_θ 就是具有标准核的 Calderón-Zygmund 算子.

给定一个局部可积函数 b, 由 T_θ 和 b 生成的交换子 $[b, T_\theta]$ 定义为

$$[b,T_\theta]f(x) = b(x)T_\theta f(x) - T_\theta(bf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}[b(x)-b(y)]K(x,y)f(y)dy. \tag{1.1}$$

许多学者研究了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子的交换子在众多函数空间上的有界性. 2002 年, Liu 和 Lu 在文 [3] 中给出了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的交换子的 LlogL 型的弱型估计. 在文 [4], 张和徐建立了 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的高阶交换子的加权尖锐估计. Wang 在文 [5] 中证明了算子 T_θ 和交换子$[b,T_\theta]$ 在广义加权 Morrey 空间上的有界性. 最近, 孙和张在文 [6] 中讨论了当 b 属于某类加权 BMO 空间时, 交换子 $[b,T_\theta]$ 在加权 Hardy 空间上的有界性.

变指标函数空间理论在近年来受到许多学者的重视. 因为这一理论的提出不仅具有重要的理论意义, 而且在其他一些领域中有着重要应用, 例如: 流体力学、图像恢复和具有非标准增长项的偏微分方程等, 见文[7–10].

Herz 空间是调和分析中的一类重要函数空间. 1968 年, Herz 在文 [11] 中研究 Fourier 变换的绝对收敛性问题时首次引入了 Herz 空间. 此后, 有关 Herz 型空间的结构及算子在其中的有界性得到了深入研究, 见专著 [12]. 2009 年, Izuki [13] 引入了具有一个变指标 Herz 空间. 2012 年, Almeida 和 Drihem [14] 引入了带有两个变指标的 Herz 空间. 2011 年, Izuki 和 Noi 在文 [15] 中利用混合 Lebesgue 序列空间的思想引入了带有三个变指标的 Herz 空间, 并建立了某些算子和交换子在非齐次变指标 Herz 空间中的有界性. 近几年, Tao 和 Yang 在文 [16–18] 中讨论了 T_θ 和 $[b,T_\theta]$ 在变指标 Herz 空间、变指标 Morrey 空间和变指标 Morrey-Herz 型 Hardy 空间上的有界性. 2021 年, Yu 和 Liu 在文 [19] 中研究了一类次线性算子在三个变指标齐次 Herz 空间上的有界性. 受上述结果启发, 本文将考虑 θ-型 Calderón-Zygmund 算子与 BMO 函数生成的交换子在具有三个变指标的齐次 Herz 空间上的有界性.

2. 预备知识和引理

设 B 为 $\mathbb{R}^n$ 中的球体, 记 $|B|$ 为 B 的 Lebesgue 测度, χ_B 表示其特征函数. 对于局部可积函数 f

和任意球 B, 记 $f_B = |B|^{-1}\int_B f(x)dx$. 我们约定, 下文中的常数 C 与主要参数无关且其取值在不同的位置可以不尽相同.

为叙述我们的结果, 首先回顾一些定义和引理.

定义2.1. 设函数 $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$ 是可测函数. 变指标 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\left\{f \text{ 在 } \mathbb{R}^n \text{ 上可测} : \rho_{p(\cdot)}(f)<\infty\right\},$$

其中 $\rho_{p(\cdot)}(f)=\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^{p(x)}dx<\infty$.

$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 在 Luxemburg-Nakano 范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=\inf\left\{\lambda>0:\rho_p\left(\frac{f}{\lambda}\right)\le 1\right\}$$

意义下是一个 Banach 空间.

用 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 表示满足下面条件的可测函数 $p(\cdot)$ 构成的集合

$$p_- =: \operatorname*{essinf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)>1 \text{ 和 } p_+ =: \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x)<\infty.$$

易知, $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 成立当且仅当 $p'(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 其中 $p'(\cdot)$ 表示 $p(\cdot)$ 的共轭指标, 即 $1/p(x)+1/p'(x)\equiv 1$. 用 $\mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$ 表示满足 $p_->0$, $p_+<\infty$ 的所有可测函数 $p(\cdot)$ 构成的集合. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 为所有使得 Hardy-Littlewood 极大算子 Mf 在 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 上有界的 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ 中的函数 $p(\cdot)$ 组成的集合.

设 $p(\cdot)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 若存在常数 $C>0$ 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 有

$$|p(x)-p(y)|\le\frac{C}{\log\left(\mathrm{e}+\frac{1}{|x-y|}\right)},$$

则称 $p(\cdot)$ 是局部 log-Hölder 连续的, 并记 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)$. 若存在常数 $C>0$ 使得对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$|p(x)-p_\infty|\le\frac{C}{\log(\mathrm{e}+|x|)},$$

其中 $p_\infty=\lim_{|x|\to\infty}p(x)$, 则称 $p(\cdot)$ 在无穷远处 log-Hölder 连续(或在无穷远处 log-衰减), 并记 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)$. 定义 $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 如下

$$\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)=\left\{p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n):\ p(\cdot)\in\mathcal{P}_0^{\log}(\mathbb{R}^n)\cap\mathcal{P}_\infty^{\log}(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

现在来介绍混合变指标 Lebesgue 序列空间的定义.

定义2.2. [15] 设 $p(\cdot)$, $q(\cdot)\in\mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$. $l^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足下列条件的可测函数序列 $\{f_j\}_{j=0}^\infty$ 的集合:

$$\left\|\{f_j\}_{j=0}^\infty\right\|_{l^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}=\inf\left\{\mu>0:\rho_{l^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\left\{\frac{f_j}{\mu}\right\}_{j=0}^\infty\right)\le 1\right\}<\infty,$$

其中

$$\rho_{l^{q(\cdot)}(L^{p(\cdot)})}\left(\{f_j\}_{j=0}^{\infty}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\inf\left\{\mu_j>0:\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f_j(x)|}{\mu_j^{1/q(x)}}\right)^{p(x)}dx\leq 1\right\}.$$

特别地, 若 $q_+<\infty$, 则有

$$\rho_{l^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\left(\{f_j\}_{j=0}^{\infty}\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\left\||f_j|^{q(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}.$$

下面介绍具有三个变指标的 Herz 空间的定义. 设 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $B_k=\left\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq 2^k\right\}$, $C_k=B_k\backslash B_{k-1}$. 用 $\chi_k=\chi_{C_k}$ 表示 C_k 的特征函数.

定义2.3. [15] 设 $p(\cdot)$, $q(\cdot)\in\mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$, $\alpha(\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 且 $-\infty<\alpha_-\leq\alpha_+<\infty$. 齐次 Herz 空间 $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L_{\mathrm{loc}}^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\}):\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}}<\infty\right\},$$

其中

$$\begin{aligned}\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}&=\left\|\left\{2^{k\alpha(\cdot)}|f\chi_k|\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^{q(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)}\\&=\inf\left\{\eta>0:\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}|f\chi_k|}{\eta}\right)^{q(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}}}\leq 1\right\}.\end{aligned}$$

显然, 当 $\alpha(\cdot)=\alpha_0$, $p(\cdot)=p_0$ 以及 $q(\cdot)=q_0$ 时, $\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)=\dot{K}_{p_0}^{\alpha_0,q_0}(\mathbb{R}^n)$ 为经典 Herz 空间.

引理2.1. [20] (广义的 Hölder 不等式) 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则对所有 $f\in L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)g(x)|dx\leq C_p\|f\|_{L^{p(\cdot)}}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}},$$

其中 $C_p=1+1/p_--1/p_+$.

引理2.2. [14] 设 $\alpha\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\alpha\in\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$, $r_1>0$. 则

$$r_1^{\alpha(x)}\leq Cr_2^{\alpha(y)}\times\begin{cases}(r_1/r_2)^{\alpha_+}, & 0<r_2\leq r_1/2;\\ 1, & r_1/2<r_2\leq 2r_1;\\ (r_1/r_2)^{\alpha_-}, & r_2\geq 2r_1\end{cases}$$

对任意 $x\in B(0,r_1)\backslash B(0,r_1/2)$ 及 $y\in B(0,r_2)\backslash B(0,r_2/2)$ 成立, 其中常数 $C>0$ 与 x, y, r_1 及 r_2 无关.

引理2.3. [21] 若 $p(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则 $p'(\cdot)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且存在正数 δ_1 和 δ_2 使得对任意球 $B\subset\mathbb{R}^n$ 和

任意可测集 $S \subset B$ 都有

$$\frac{\|\chi_S\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_1} \text{ 及 } \frac{\|\chi_S\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}} \leq \left(\frac{|S|}{|B|}\right)^{\delta_2}.$$

引理2.4. [21] 若 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意球 $B \subset \mathbb{R}^n$ 有

$$\frac{1}{|B|}\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\|\chi_B\|_{L^{p'(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C.$$

引理2.5. [22] 设 $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$. 如果 $f \in L^{p(\cdot)q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\min\left(\|f\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}}^{q_+}, \|f\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}}^{q_-}\right) \leq \left\||f|^{q(\cdot)}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \max\left(\|f\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}}^{q_+}, \|f\|_{L^{p(\cdot)q(\cdot)}}^{q_-}\right).$$

定义2.4. BMO 空间定义为

$$BMO = \left\{b \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|b\|_* < \infty\right\},$$

其中

$$\|b\|_* = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |b(y) - b_B|\,dy.$$

引理2.6. [21] 设 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ 且 $m > 0$ 是一个整数. 存在常数 $C > 0$, 使得对任意的 k, $j \in \mathbb{Z}$, $k > j$ 有

(1) $C^{-1}\|b\|_*^m \leq \sup_B \frac{1}{\|\chi_B\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}}\left\|(b - b_B)^m \chi_B\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|b\|_*^m$;

(2) $\left\|\left(b - b_{B_j}\right)^m \chi_{B_k}\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C(k-j)^m \|b\|_*^m \|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

引理2.7. [19] 若 $a_k \geq 0$ 且 $1 \leq p_k < \infty$ $(k \in \mathbb{Z})$, 则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{p_k} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\right)^{p_*},$$

其中

$$p_* = \begin{cases} \min_{k\in\mathbb{Z}} p_k, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \leq 1; \\ \max_{k\in\mathbb{Z}} p_k, & \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k > 1. \end{cases}$$

Lu 和 Zhang 在文 [23] 中的定理 3.2 包含了下面的结果.

引理2.8. [23] 设 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, T_θ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子. 若 $p(\cdot) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 且 θ 满足

$$\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t}|\log t|\,dt < \infty, \tag{2.1}$$

则存在不依赖于 f 的常数 $C>0$, 使得

$$\left\| [b,T_\theta](f)\right\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \le C\|b\|_*\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

3. 定理及其证明

定理3.1. 设 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$, T_θ 是 θ-型 Calderón-Zygmund 算子且 θ 满足 (2.1) 式. 又设 $p(\cdot)\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $q_1(\cdot)$ 和 $q_2(\cdot)\in \mathcal{P}^0(\mathbb{R}^n)$, 且满足 $(q_2)_-\ge (q_1)_+$ 和 $p(\cdot)/q_2(\cdot)\in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\alpha(\cdot)\in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 且 $-n\delta_2<\alpha_-<\alpha_+<n\delta_1$, 其中 δ_1, δ_2 是引理 2.3 中的常数, 那么交换子 $[b,T_\theta]$ 是从 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 到 $\dot{K}^{\alpha(\cdot),q_2(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ 有界的.

注1. 当 $\alpha_-=\alpha_+=\alpha$ 时, $\alpha(\cdot)=\alpha$ 是常数, 可见本文的定理推广了文献 [16] 中的定理 1.2.

证明 设 $b\in BMO(\mathbb{R}^n)$ 且 $f\in \dot{K}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. 记 $f_j=f\chi_j$, 其中 $j\in\mathbb{Z}$, 则

$$f(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(x)\chi_j(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x).$$

下面考虑$\left\| [b,T_\theta](f)\right\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot),q_2(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$. 对任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 令

$$\eta_1=\left\|\left\{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^{q_2(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)},$$

$$\eta_2=\left\|\left\{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^{q_2(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)},$$

$$\eta_3=\left\|\left\{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k+2}^{\infty}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|\right\}_{k=-\infty}^{\infty}\right\|_{l^{q_2(\cdot)}\left(L^{p(\cdot)}\right)},$$

和 $\eta_0=\sum_{i=1}^3\eta_i$.

注意到 $p(\cdot)/q_2(\cdot)\in\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, 则有

$$\begin{aligned}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|[b,T_\theta](f)\chi_k\right|}{\eta_0}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \le{}& C\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\eta_1}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\\ &+C\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\eta_2}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\\ &+C\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k+2}^{\infty}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\eta_3}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}.\end{aligned}$$

再由 η_1, η_2 和 η_3 的定义可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|[b,T_\theta](f)\chi_k\right|}{C\eta_0}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\leq 1.$$

这也就是说

$$C\eta_0\in\left\{\eta>0:\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|[b,T_\theta](f)\chi_k\right|}{\eta}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\leq 1\right\},$$

于是有

$$\|[b,T_\theta](f)\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq C\eta_0=C\left(\eta_1+\eta_2+\eta_3\right).$$

下面证明

$$\|[b,T_\theta](f)\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|b\|_*\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

为此只需证明 $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3\leq C\|b\|_*\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

记 $\lambda_0=\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, 则

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|f\chi_k\right|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}\leq 1, \tag{3.1}$$

进而对任意的 $k\in\mathbb{Z}$, 有

$$\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|f\chi_k\right|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}\leq 1. \tag{3.2}$$

首先估计 η_2. 根据 η_2 的定义, 要证 $\eta_2\leq C\|b\|_*\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, 只要证

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\leq C. \tag{3.3}$$

下证 (3.3) 式成立. 由于 $q_2(\cdot)\in\mathcal{P}^0\left(\mathbb{R}^n\right)$, $p(\cdot)/q_2(\cdot)\in\mathcal{P}\left(\mathbb{R}^n\right)$, 利用引理 2.5 有

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\\&\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}^{\left(q_2^1\right)_k}\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\right)^{\left(q_2^1\right)_k},\end{aligned}$$

其中

$$\left(q_2^1\right)_k=\begin{cases}(q_2)_-, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\leq 1\\(q_2)_+, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}>1.\end{cases}$$

再利用引理 2.2 和引理 2.8, 可以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\left\|\frac{\left|[b,T_\theta]\left(2^{j\alpha(\cdot)}f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\right)^{\left(q_2^1\right)_k}\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=k-1}^{k+1}\left\|\frac{2^{j\alpha(\cdot)}|f_j|}{\lambda_0}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\right)^{\left(q_2^1\right)_k}\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}|f\chi_k|}{\lambda_0}\right\|_{L^{p(\cdot)}}^{\left(q_2^1\right)_k}.\end{aligned}$$

使用引理 2.5、引理 2.7、(3.1) 以及 (3.2) 式得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k-1}^{k+1}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\\&\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}|f\chi_k|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}^{\frac{\left(q_2^1\right)_k}{(q_1)_+}}\\&\leq C\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}|f\chi_k|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}\right\}^{q_*}\\&\leq C.\end{aligned}$$

这里 $(q_1)_+\leq(q_2)_-\leq(q_2^1)_k$ 且 $q_*=\min_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\left(q_2^1\right)_k}{(q_1)_+}$.

接下来估计 η_1. 根据 η_1 的定义, 要证 $\eta_1\leq C\|b\|_*\|f\|_{\dot{K}_{p(\cdot)}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, 只要证

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta]\left(f_j\right)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\leq C. \tag{3.4}$$

下证 (3.4) 式成立. 注意到当 $x\in C_k$, $y\in C_j$ 且 $j\leq k-2$ 时, 有 $|x-y|\geq|x|-|y|\geq\frac{1}{4}|x|$. 再结

合 $\operatorname{supp} f_j \in C_j$ 和引理 2.1 可知

$$
\begin{aligned}
\left|[b,T_\theta]\,f_j(x)\right| &= \left|T_\theta\left[(b(x)-b)f_j\right](x)\right| \\
&\le C2^{-kn}\int_{\mathbb{R}^n}|b(x)-b(y)||f_j(y)|dy \\
&\le C2^{-kn}\int_{C_j}|b(x)-b_{B_j}||f_j(y)|dy + C2^{-kn}\int_{C_j}|b(y)-b_{B_j}||f_j(y)|dy \\
&\le C2^{-kn}\int_{B_j}|b(x)-b_{B_j}||f_j(y)|\chi_{B_j}dy + C2^{-kn}\int_{B_j}|b(y)-b_{B_j}||f_j(y)|\chi_{B_j}dy \\
&\le C2^{-kn}|b(x)-b_{B_j}|\,\|f_j\|_{L^{p(\cdot)}}\,\|\chi_{B_j}\|_{L^{p'(\cdot)}} + C2^{-kn}\,\|f_j\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|(b-b_{B_j})\chi_{B_j}\right\|_{L^{p'(\cdot)}},
\end{aligned}
$$

再利用引理 2.2 – 2.6 以及 (3.2) 式, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}^{(q_2^2)_k} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\sum_{j=-\infty}^{k-2}2^{(k-j)\alpha_+}\left|[b,T_\theta]\left(2^{j\alpha(\cdot)}f_j\right)\right|\chi_k}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}^{(q_2^2)_k} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)\alpha_+-kn}\left\|\frac{2^{j\alpha(\cdot)}f_j}{\lambda_0}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\left\|\chi_{B_j}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}\left\|\chi_{B_k}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\right)^{(q_2^2)_k} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)\alpha_+-kn}\left\|\frac{2^{j\alpha(\cdot)}f_j}{\lambda_0}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\frac{\left\|\chi_{B_j}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}}{\left\|\chi_{B_k}\right\|_{L^{p'(\cdot)}}}|B_k|\right)^{(q_2^2)_k} \\
&\le C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=-\infty}^{k-2}(k-j)2^{(k-j)(\alpha_+-n\delta_1)}\left\|\left(\frac{\left|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}^{\frac{1}{(q_1)_+}}\right\}^{(q_2^2)_k},
\end{aligned}
$$

其中

$$
(q_2^2)_k = \begin{cases} (q_2)_-, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}} \le 1 \\ (q_2)_+, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=-\infty}^{k-2}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}} > 1. \end{cases}
$$

下面分 $(q_1)_+ \le 1$ 和 $(q_1)_+ > 1$ 两种情况讨论.

若 $(q_1)_+ \le 1$, 则根据引理 2.7, $\alpha_+ < n\delta_1$, $(q_1)_+ \le (q_2)_- \le (q_2^2)_k$ 以及 (3.1) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)} \left| \sum_{j=-\infty}^{k-2} [b, T_\theta](f_j) \chi_k \right|}{\lambda_0 \|b\|_*} \right)^{q_2(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{k-2} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+} \left\| \left(\frac{\left| 2^{j\alpha(\cdot)} f \chi_j \right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}} \right\}^{\frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}} \\
&\le C \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{\left| 2^{j\alpha(\cdot)} f \chi_j \right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}} \sum_{k=j+2}^{\infty} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+} \right\}^{q_*} \\
&\le C,
\end{aligned}
$$

其中

$$
q_* = \begin{cases} \min_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}, E \le 1 \\ \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}, E > 1. \end{cases}
$$

$$
E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{k-2} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+} \left\| \left(\frac{\left| 2^{j\alpha(\cdot)} f \chi_j \right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}} .
$$

若 $(q_1)_+ > 1$, 则 $1 < (q_1)_+ \le (q_2)_- \le (q_2^2)_k$. 因此, 对于 $\alpha_+ < n\delta_1$, 利用 Hölder 不等式、引理 2.7 以及 (3.1) 式, 我们有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)} \left| \sum_{j=-\infty}^{k-2} [b, T_\theta](f_j) \chi_k \right|}{\lambda_0 \|b\|_*} \right)^{q_2(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{k-2} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{\frac{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+}{2}} \left\| \left(\frac{\left| 2^{j\alpha(\cdot)} f \chi_j \right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}} \right\}^{\frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}} \\
&\quad \times \left(\sum_{j=-\infty}^{k-2} 2^{\frac{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)'_+}{2}} \right)^{\frac{(q_2^2)_k}{(q_1)'_+}} \\
&\le C \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{\left| 2^{j\alpha(\cdot)} f \chi_j \right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}} \sum_{k=j+2}^{\infty} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{\frac{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+}{2}} \right\}^{q_*} \\
&\le C,
\end{aligned}
$$

其中

$$q_* = \begin{cases} \min_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}, F \le 1 \\ \max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(q_2^2)_k}{(q_1)_+}, F > 1. \end{cases}$$

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{k-2} (k-j)^{(q_1)_+} 2^{\frac{(k-j)(\alpha_+ - n\delta_1)(q_1)_+}{2}} \left\| \left(\frac{\left|2^{j\alpha(\cdot)} f\chi_j\right|}{\lambda_0} \right)^{q_1(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}.$$

最后估计 η_3. 根据 η_3 的定义, 要证 $\eta_3 \le C\|b\|_*\|f\|_{\dot{K}^{\alpha(\cdot),q_1(\cdot)}_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$, 只要证

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)} \left| \sum_{j=k+2}^{\infty} [b, T_\theta]\,(f_j)\,\chi_k \right|}{\lambda_0 \|b\|_*} \right)^{q_2(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \le C. \tag{3.5}$$

下证 (3.5) 式成立. 由于 $x \in C_k$, $y \in C_j$ 且 $j \ge k+2$, 可以得到 $|x-y| \ge |y| - |x| \ge \frac{1}{4}|y|$. 再由 $\operatorname{supp} f_j \in C_j$ 和引理 2.1 可得

$$\begin{aligned}
\left| [b, T_\theta]\, f_j(x) \right| &\le C2^{-jn} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x) - b(y)||f_j(y)|dy \\
&\le C2^{-jn} \int_{C_j} |b(x) - b_{B_k}||f_j(y)|dy + C2^{-jn} \int_{C_j} |b(y) - b_{B_k}||f_j(y)|dy \\
&\le C2^{-jn} \int_{B_j} |b(x) - b_{B_k}||f_j(y)|\chi_{B_j} dy + C2^{-jn} \int_{B_j} |b(y) - b_{B_k}||f_j(y)|\chi_{B_j} dy \\
&\le C2^{-jn} |b(x) - b_{B_k}| \, \|f_j\|_{L^{p(\cdot)}} \, \|\chi_{B_j}\|_{L^{p'(\cdot)}} + C2^{-jn} \, \|f_j\|_{L^{p(\cdot)}} \left\| (b - b_{B_k})\chi_{B_j} \right\|_{L^{p'(\cdot)}}.
\end{aligned}$$

利用引理 2.2 – 2.6 以及 (3.2) 式, 可以得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)} \left| \sum_{j=k+2}^{\infty} [b, T_\theta]\,(f_j)\,\chi_k \right|}{\lambda_0 \|b\|_*} \right)^{q_2(\cdot)} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}} \\
&\le \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \frac{2^{k\alpha(\cdot)} \left| \sum_{j=k+2}^{\infty} [b, T_\theta]\,(f_j)\,\chi_k \right|}{\lambda_0 \|b\|_*} \right\|_{L^{p(\cdot)}}^{(q_2^3)_k} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\sum_{j=k+2}^{\infty} 2^{(k-j)\alpha_-} \left| [b, T_\theta] \left(2^{j\alpha(\cdot)} f_j \right) \right| \chi_k}{\lambda_0 \|b\|_*} \right\|_{L^{p(\cdot)}}^{(q_2^3)_k} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} (j-k) 2^{(k-j)\alpha_- - jn} \left\| \frac{2^{j\alpha(\cdot)} f_j}{\lambda_0} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \|\chi_{B_j}\|_{L^{p'(\cdot)}} \|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}} \right)^{(q_2^3)_k} \\
&\le C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=k+2}^{\infty} (j-k) 2^{(k-j)\alpha_- - jn} \left\| \frac{2^{j\alpha(\cdot)} f_j}{\lambda_0} \right\|_{L^{p(\cdot)}} \frac{\|\chi_{B_k}\|_{L^{p(\cdot)}}}{\|\chi_{B_j}\|_{L^{p(\cdot)}}} |B_j| \right)^{(q_2^3)_k}
\end{aligned}$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{j=k+2}^{\infty}(j-k)2^{(k-j)(\alpha_-+n\delta_2)}\left\|\left(\frac{\left|2^{j\alpha(\cdot)}f\chi_j\right|}{\lambda_0}\right)^{q_1(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_1(\cdot)}}}^{\frac{1}{(q_1)_+}}\right\}^{\left(q_2^3\right)_k},$$

其中

$$\left(q_2^3\right)_k=\begin{cases}(q_2)_-, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k+2}^{\infty}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}\leq 1\\ (q_2)_+, & \left\|\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k+2}^{\infty}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right\|_{L^{p(\cdot)}}>1.\end{cases}$$

注意到 $(q_2)_-\geq(q_2)_+$ 以及 $\alpha_->-n\delta_2$, 用类似于估计 η_1 的方法可得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\|\left(\frac{2^{k\alpha(\cdot)}\left|\sum_{j=k+2}^{\infty}[b,T_\theta](f_j)\chi_k\right|}{\lambda_0\|b\|_*}\right)^{q_2(\cdot)}\right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{q_2(\cdot)}}}\leq C.$$

综合上述对 η_1, η_2 和 η_3 的估计, 定理 3.1 证毕.

基金项目

黑龙江省省属本科高校中央支持地方高校改革发展项目(优秀青年人才项目) (编号: 2020YQ07)、牡丹江师范学院科研团队建设项目(编号: D211220637)和研究生思政项目(编号: KCSZKC-2022026, KCSZAL-2022013) 资助.

参考文献

[1] Yabuta, K. (1985) Generalizations of Calderón-Zygmund Operators. *Studia Mathematica*, **82**, 17-31. https://doi.org/10.4064/sm-82-1-17-31

[2] 彭立中. 广义Calderón-Zygmund算子及其加权模不等式[J]. 数学进展, 1985, 14(2): 97-115.

[3] Liu, Z.G. and Lu, S.Z. (2002) Endpoint Estimates for Commutators of Calderón-Zygmund Type Operators. *Kodai Mathematical Journal*, **25**, 79-88. https://doi.org/10.2996/kmj/1106171078

[4] 张璞, 徐罕. Calderón-Zygmund型算子交换子的加权尖锐估计[J]. 数学学报(中文版), 2005, 48(4): 625-636.

[5] Wang, H. (2016) Boundedness of θ-Type Calderón-Zygmund Operators and Commutators in the Generalized Weighted Morrey Spaces. *Journal of Function Spaces*, **2016**, Article ID: 1309348.

[6] 孙杰, 张璞. θ-型Calderón-Zygmund算子交换子的端点加权估计[J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(1): 258-264.

[7] Acerbi, E. and Mingione, G. (2002) Regularity Results for Stationary Electro-Rheological Fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **164**, 213-259. https://doi.org/10.1007/s00205-002-0208-7

[8] Acerbi, E. and Mingione, G. (2007) Gradient Estimates for a Class of Parabolic Systems. *Duke Mathematical Journal*, **136**, 285-230. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-07-13623-8

[9] Diening, L. and Ružička, M. (2003) Calderón-Zygmund Operators on Generalized Lebesgue Spaces $L^{p(\cdot)}$ and Problems Related to Fluid Dynamics. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **563**, 197-220. https://doi.org/10.1515/crll.2003.081

[10] Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Ružička, M. (2011) Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer, Berlin.

[11] Herz, C.S. (1968) Lipschitz Spaces and Bernstein's Theorem on Absolutely Convergent Fourier Transforms. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **18**, 283-323. https://doi.org/10.1512/iumj.1969.18.18024

[12] Lu, S., Yang, D. and Hu, G. (2008) Herz Type Spaces and Their Applications. Science Press, Beijing.

[13] Izuki, M. (2009) Herz and Amalgam Spaces with Variable Exponent, the Haar Wavelets and Greediness of the Wavelet System. *East Journal on Approximations*, **15**, 87-110.

[14] Almeida, A. and Drihem, D. (2012) Maximal, Potential and Singular Type Operators on Herz Spaces with Variable Exponents. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **394**, 781-795. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.043

[15] Izuki, M. and Noi, T. (2011) Boundedness of Some Integral Operators and Commutators on Generalized Herz Spaces with Variable Exponents. *OCAMI Preprint Series*, **11**.

[16] Yang, Y. and Tao, S. (2018) θ-Type Calderón-Zygmund Operators and Commutators in Variable Exponents Herz Space. *Open Mathematics*, **16**, 1607-1620. https://doi.org/10.1515/math-2018-0133

[17] 杨沿奇, 陶双平. θ型C-Z算子在加权变指数Morrey空间上的有界性[J]. 数学学报(中文版), 2019, 62(3): 503-514.

[18] Yang, Y. and Tao, S. (2020) θ-Type Calderón-Zygmund Operators on Morrey and Morrey-Herz-Type Hardy Spaces with Variable Exponents. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin-Series A—Applied Mathematics and Physics*, **82**, 35-44.

[19] Yu, X. and Liu, Z. (2021) Boundedness of Some Integral Operators and Commutators on Homogeneous Herz Spaces with Three Variable Exponents. *Frontiers of Mathematics in China*, **16**, 211-237. https://doi.org/10.1007/s11464-021-0897-6

[20] Kováčik, O. and Rákosník, J. (1991) On Spaces $L^{p(x)}$ and $w^{k,p(x)}$. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **41**, 592-618. https://doi.org/10.21136/CMJ.1991.102493

[21] Izuki, M. (2010) Boundedness of Commutators on Herz Spaces with Variable Exponent. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **59**, 199-213. https://doi.org/10.1007/s12215-010-0015-1

[22] Wang, L. and Tao, S. (2016) Parameterized Littlewood-Paley Operators and Their Commutators on Herz Spaces with Variable Exponents. *Turkish Journal of Mathematics*, **40**, 122-145. https://doi.org/10.3906/mat-1412-52

[23] Lu, G. and Zhang, P. (2014) Multilinear Calderón-Zygmund Operators with Kernels of Dini's Type and Applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **107**, 92-117. https://doi.org/10.1016/j.na.2014.05.005