Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2794-2802
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310287

Hans汉斯

一类参数变分系统解映射的静态性质

蔡红宇

云南财经大学统计与数学学院，云南 昆明

收稿日期：2023年9月3日；录用日期：2023年10月3日；发布日期：2023年10月11日

摘 要

本文在有限维欧几里得空间中讨论了一类参数变分系统解映射的稳定性性质。不同于借助Fréchet上导数和图导数来讨论静态性质充分条件的方法，本文利用度量正则性的导数准则以及现代变分分析技术给出了关于此类参数变分系统在给定点具有静态性质新的充分条件。

关键词

参数变分系统，解映射，稳定性，度量正则性，静态性质

Calmness of Solution Mapping for a Class of Parametric Variational Systems

Hongyu Cai

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan

Received: Sep. 3rd, 2023; accepted: Oct. 3rd, 2023; published: Oct. 11th, 2023

Abstract

This paper discusses the stability properties of parametric variational systems in a finite dimensional Euclidean space. Unlike the method of using Fréchet derivatives and graph derivatives to discuss the sufficient conditions for calmness, this paper uses derivative criteria for metric regularity and modern variational analysis techniques to provide new sufficient conditions for such parametric variational systems to have calmness at a given point.

Keywords

Parametric Variational Systems, Solution Mapping, Stability, Metric Regularity, Calmness

文章引用: 蔡红宇. 一类参数变分系统解映射的静态性质[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2794-2802.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310287

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

参数变分系统解映射适定性的研究已被公认为变分理论及其应用中的一个基本问题，它包括：类 Lipschitz 性质、度量正则性、静态性质、度量次正则性等，其核心问题是研究广义方程

$$0 \in f(x) + Q(x)$$

(其中 f，Q 为 Banach 空间之间的映射，且 f 为单值的，Q 为集值的)及其在扰动参数发生扰动时的局部灵敏性。当 $Q(x)$ 为凸集 C 生成的法锥时，则广义方程问题归结为经典的变分不等式问题，即

$$\text{求 } x \in C\text{，使得} \langle f(x), u - x \rangle \geq 0, \forall u \in C$$

特别地，当 C 为非负象限 $\mathbb{R}^n$ 时，问题便转化为经典的互补问题。在非线性规划问题中，广义方程形式包含了满足一阶最优必要条件 Lagrange 乘子的最优解集，其扰动下的广义参数方程形式

$$0 \in f(p, x) + Q(p, x),$$

(其中 p 为扰动参数)可以描述驻点和 Karush-Kuhn-Tucher (KKT)点的扰动集合。因此，基于广义方程提供的参数扰动下最优解灵敏性分析的模型，适定性的研究对集值分析、优化理论及其应用发展便显得尤为关键，其中静态性质的研究具有非常重要的作用。静态性质的概念，最早由 Clarke [1]为研究特定的优化问题而引入的，发展到今天，静态性质在广义方程的灵敏性分析、变分不等式、必要的最优条件等方面起到了关键性的作用，大量的学者对静态性质都做了许多相关的研究[2]-[10]。本文中，主要研究参数变分系统解映射

$$S(p) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \in F(p, x) \right\} \tag{1.1}$$

的静态性质，其中，P 为度量空间，$p \in P$ 为参向量，$F : P \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 为集值映射。

文献[7]，Chuong 等人在 Asplund 空间中，借助 Fréchet 上导数构造了关键正则假设，给出了参向量优化问题有效解映射在给定点具有静态性质的充分条件。不同于[7]中的 Fréchet 上导数的角度，文献[8]在一般的 Banach 空间中，从图导数的有界性的角度得到了在给定点具有静态性质的新的充分条件。在文献[11]中，Dontchev 等人在有限维欧几里得空间中，研究了集值映射度量正则性的导数准则。借助这一导数准则，本文在有限维欧几里得空间中考虑问题，利用现代变分技术以及极限上导数工具给出关于此类参数变分系统在给定点具有静态性质新的充分条件。

2. 预备知识

文本文中，使用的变分分析的标准符号，参见 Rockafellar [2]和 Mordukhovich [12]的著作。向量 x 的范数表示为 $\|x\|$，向量 x 与 y 的内积表示为 $\langle x, y \rangle$。$\mathbb{B}$ 表示欧几里得空间中的单位球。用 $\mathbb{B}_\delta(x)$ 表示以 x 为心以 δ 为半径的闭球，其中 $\delta \in (0, +\infty)$。用 $e(A, B)$ 表示集合 A 相对于非空集合 B 的余量，即 $e(A, B) := \sup\{d(x, B) : x \in A\}$，我们约定当 $A = \varnothing$ 时，$e(A, B) := 0$。用 δ_A 表示 A 的指示函数，即

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A. \\ +\infty & x \notin A. \end{cases}$$

定义 2.1 称集值映射 $H:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 在给定点 $(\bar{x},\bar{u})\in gph\,H$ 具有静态性质，如果存在一常数 $\kappa>0$，$\bar{x}$ 的邻域 U 和 $\bar{u}$ 的邻域 V 满足

$$H(x)\cap V\subseteq H(\bar{x})+\kappa\|x-\bar{x}\|\mathbb{B},\ \forall x\in U,$$

常数 κ 称之为静态系数。

集值映射 $H:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 的图和定义域分别定义为 $gph\,H:=\{(x,u):u\in H(x)\}$，$dom\,H:=\{x:H(x)\neq\varnothing\}$。称 $gph\,H$ 在点 (x,y) 处是局部闭的，若存在 (x,y) 的邻域 U，使得 $gph\,H\cap U$ 为闭集。设 $x\in A$，我们用 $T_A(x)$ 表示 A 在 x 处的切锥，定义为

$$T_A(x):=\left\{w:\exists t_k\downarrow 0,\{w_k\}\subset\mathbb{R}^n,\text{满足 } w_k\to w,\text{且 } x+t_kw_k\in A\ \ \forall k\right\}.$$

称 $T_A(x)$ 的极锥 $\hat{N}_A(x)$ 为正则法锥。我们用 $N_A(x)$ 表示 A 在 x 处的极限法锥，定义为

$$N_A(x):=\left\{v:\exists x_k\to x,v_k\to v,\text{满足 } x_k\in A,\text{且 } v_k\in\hat{N}_A(x)\ \ \forall k\right\}.$$

称 S 是正齐次的，若对任意的 $x,\lambda>0$，都有 $0\in H(0)$ 且 $H(\lambda x)=\lambda H(x)$ 即 $gph\,H$ 为一锥。若 H 为正齐次映射，定义 H 的外范数和内范数[11]分别为

$$\|H\|^+:=\sup_{x\in\mathbb{B}}\sup_{u\in H(x)}\|u\|=\inf\{\kappa>0\,|\,y\in H(x)\Rightarrow\|y\|\le\kappa\|x\|\}.$$

$$\|H\|^-:=\sup_{x\in\mathbb{B}}\inf_{u\in H(x)}\|u\|=\inf\{\kappa>0\,|\,H(x)\cap\kappa\mathbb{B}\neq\varnothing\ \forall x\in\mathbb{B}\}.$$

定义 2.2 设集值映射 $H:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$，$H$ 在点 $(\bar{x},\bar{u})\in gph\,H$ 处的图导数 $DH(\bar{x}\,|\,\bar{u}):\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 在定义为

$$z\in DH(\bar{x}\,|\,\bar{u})(v)\Leftrightarrow(v,z)\in T_{gph\,H}(\bar{x},\bar{u}).$$

定义 2.3 设集值映射 $H:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$，点 $\bar{x}\in dom\,H$ 的。H 在 $\bar{x}$ 点关于 $\bar{u}\in S(\bar{x})$ 的 Fréchet 上导数 $\hat{D}^*H(\bar{x}\,|\,\bar{u}):\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 在定义为

$$x^*\in\hat{D}^*H(\bar{x}\,|\,\bar{u})(u^*)\Leftrightarrow(x^*,-u^*)\in\hat{N}_{gph\,H}(\bar{x},\bar{u}),$$

极限上导数 $D^*H(\bar{x}\,|\,\bar{u}):\mathbb{R}^m \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ 定义为

$$x^*\in D^*H(\bar{x}\,|\,\bar{u})(u^*)\Leftrightarrow(x^*,-u^*)\in N_{gph\,H}(\bar{x},\bar{u}).$$

引理 2.1 [14] (Ekelassnd 变分原理)设 E 为完备度量空间且 $f:E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 为正常下半连续广义实值函数。若 $\varepsilon>0$ 和 $\bar{x}\in E$ 满足

$$d(\bar{x})\le\inf_{x\in E}f(x)+\varepsilon.$$

则对任意的 $\lambda>0$，都存在 $x\in E$ 使得

(i) $d(x,\bar{x})\le\lambda$；

(ii) $f(x)\le f(\bar{x})$；

(iii) $f(x)<f(u)+\dfrac{\varepsilon}{\lambda}d(u,x),\forall u\in E\setminus\{x\}$。

定义 2.4 给定点 $(\bar{x},\bar{u})\in gph\,H$，如果存在常数 $\kappa>0$，$\bar{x}$ 的邻域 U 和 $\bar{u}$ 的邻域 V，使得

$$d(x,H^{-1}(u))\le\kappa d(u,H(x)),\forall x\in U,u\in V,$$

则称 H 在点 $(\bar{x},\bar{u})$ 处是度量正则的，称满足上式的常数 κ 的下确界为正则模，记为 $reg(H;\bar{x}\,|\,\bar{u})$。

引理 2.2 [11] (度量正则性的导数准则)设集值映射 $G:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$，$(\bar{x},\bar{y})\in gph\,G$ 且 $gph\,G$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 是

局部闭的，则

$$\limsup_{\substack{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})\\(x,y)\in gph\,G}}\left\|DG(x\mid y)^{-1}\right\|^{-}=\left\|D^{*}G(\bar{x}\mid\bar{y})^{-1}\right\|^{+}.$$

定义 2.5 [12]映射 $f:X\to Y$ 在 $\bar{x}$ 处是严格可微的，如果

$$\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\u\to\bar{x}}}\frac{f(x)-f(u)-\nabla f(\bar{x})(x-u)}{\|x-u\|}=0.$$

3. 参数变分系统解映射的静态性质

在这部分我们将讨论变分系统(1.1)在其图 $gph\,S$ 上某点具有静态性质的充分条件。为了方便起见，我们采用符号 $F_p:=F(p,\cdot),\ p\in P$。

下面引理源自于文献[8]，这里做了一些变化：

引理 3.1 [8]设 P 为度量空间，$p\in P$ 为参向量，$F:P\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 为集值映射，考虑点 $(\bar{p},\bar{x})\in gph\,S$，假设如下条件成立：

(i) $gph\,F_{\bar{p}}$ 在点 $(\bar{x},0)$ 附近是局部闭的；

(ii) 存在 $\ell>0$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$F(p,x)\subseteq F(\bar{p},x)+\ell d(p,\bar{p})\mathbb{B},\ \forall x\in\mathbb{B}_{\delta}(\bar{x}),\forall p\in\mathbb{B}_{\delta}(\bar{p});$$

(iii) 对任意正数 c，有 $\limsup\limits_{\substack{(x,y)\to(x,0)\\(x,y)\in gph\,F}}\left\|DF_{\bar{p}}(x\mid y)^{-1}\right\|^{-}<c$。

则存在正数 $\varepsilon c<1$，集值映射 S 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 处具有静态性质，且静态系数为 $\dfrac{\ell}{\varepsilon}$。

结合引理 2.2 以及引理 3.1，可以得到此类参数变分系统具有静态性质的充分条件的新的表述。这里，我们不借助上述图导数与极限上导数的等价结果，而是利用现代变分分析技术和极限上导数的定义，给出更为精确的刻画。为此，我们先给出下面的命题。

命题 3.1 设 $G:\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 为集值映射，考虑点 $(\bar{x},\bar{y})\in gph\,G$，假设如下条件成立：

(i) $gph\,G$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 附近是局部闭的，

(ii) $\left\|D^{*}G(\bar{x}\mid\bar{y})^{-1}\right\|^{+}<c<\infty$。

则存在 $0<\eta<\dfrac{1}{4}$，$\tilde{c}>\dfrac{c}{1-4\eta}$，对于任意 $(x,y),(x_v,y_v)\in gph\,G\cap(\mathbb{B}_{\eta}(\bar{x})\times\mathbb{B}_{\eta}(\bar{y}))$ 满足 $y_v\neq y$，都有

$$\|x_v-x\|\le\tilde{c}\|y_v-y\|.$$

证明：首先，我们证明，存在 $\delta>0$，对于任意 $(x,y)\in gph\,G\cap(\mathbb{B}_{\delta}(\bar{x})\times\mathbb{B}_{\delta}(\bar{y}))$，有

$$(0,v)\in\hat{N}_{gph\,G}(x,y)\Rightarrow v=0. \tag{3.1}$$

反证，假设存在序列 $(x_k,y_k)\in gph\,G$，$(x_k,y_k)\to(\bar{x},\bar{y})$ 以及 $v_k\in\mathbb{R}^m$，对所有的 k，$\|v_k\|=1$，都有 $(0,v_k)\in\hat{N}_{gph\,G}(x_k,y_k)$。由 $gph\,G$ 在点 $(\bar{x},\bar{y})$ 附近是局部闭的，可得存在 $v\neq0$ 使得 $(0,v)\in N_{gph\,G}(\bar{x},\bar{y})$。因此存在 $v\neq0$ 使得 $v\in D^{*}G(\bar{x}\mid\bar{y})^{-1}(0)$。又由集值映射的外范数等价定义可得：

$$\left\|D^{*}G(\bar{x}\mid\bar{y})^{-1}\right\|^{+}=\inf\left\{\kappa>0\mid y^{*}\in D^{*}G(\bar{x}\mid\bar{y})^{-1}(x^{*})\Rightarrow\|y^{*}\|\le\kappa\|x^{*}\|\right\}$$

代入，可得 $\|v\|=0$ 与 $v\neq0$ 矛盾。于是(3.1)式成立。

接下来，我们通过(3.1)式来证明，存在$\delta>0$，对于任意$(x,y)\in gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\delta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\delta(\bar{y})\right)$，都有

$$\left(x^*,-y^*\right)\in\hat{N}_{gph\,G}(x,y)\Rightarrow\left\|y^*\right\|\le c\left\|x^*\right\|. \tag{3.2}$$

反证，假设存在序列$(x_k,y_k)\to(\bar{x},\bar{y})$使得对于每个$k$，都存在$\left(x_k^*,-y_k^*\right)\in\hat{N}_{gph\,G}(x_k,y_k)$满足$\left\|y_k^*\right\|>c\left\|x_k^*\right\|$。如果存在$k$使得$x_k^*=0$，则由(3.1)可知，相应的$y_k^*=0$，与假设矛盾。于是对所有的$k$，$x_k^*\ne0$。

因此，不是一般性，这里假设$\left\|x_k^*\right\|=1$。

情形1：如果y_k^*无界，设u为$\dfrac{y_k^*}{\left\|y_k^*\right\|}$的聚点，于是$\|u\|=1$。因为$\left(\dfrac{x_k^*}{\left\|y_k^*\right\|},-\dfrac{y_k^*}{\left\|y_k^*\right\|}\right)\in\hat{N}_{gph\,G}(x_k,y_k)$，所以对其两端同时取极限，由$gph\,G$在点$(\bar{x},\bar{y})$附近的局部闭性以及正则法锥与极限法锥的定义，可得$(0,-u)\in N_{gph\,G}(\bar{x},\bar{y})$，于是，由(3.1)可知$u=0$与假设矛盾。

情形2：如果y_k^*有界，则由假设可得，存在子序列$\left(x_k^*,y_k^*\right)\to\left(x^*,y^*\right)$，$\left\|x^*\right\|=1$，$\left(x^*,-y^*\right)\in N_{gph\,G}(\bar{x},\bar{y})$且$\left\|y^*\right\|\ge c$与(ii)矛盾。

因此，对于所有充分接近于点$(\bar{x},\bar{y})$的点$(x,y)\in gph\,G$都有(3.2)成立。

于是，设$\left(x^*,-y^*\right)\in\hat{N}_{gph\,G}(x,y)$，$(x,y)\in gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\delta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\delta(\bar{y})\right)$，结合(3.2)，对于任意$(x',y')\in gph\,G$且$y'\ne y$，我们有

$$\left\langle y^*,\frac{y'-y}{\|y'-y\|}\right\rangle\le\left\|y^*\right\|\left\|\frac{y'-y}{\|y'-y\|}\right\|\le c\left\|x^*\right\|. \tag{3.3}$$

最后，我们来证明命题的结论。

反证，令$0<\eta<\dfrac{\tilde{c}-c}{4\tilde{c}}<\delta$，设对于任意的$(x,y)\in gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\eta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\eta(\bar{y})\right)$，存在$(x_\nu,y_\nu)\in gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\eta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\eta(\bar{y})\right)$，$(x_\nu,y_\nu)\ne(x,y)$，使得

$$\|x_\nu-x\|>\tilde{c}\|y_\nu-y\|:=\lambda. \tag{3.4}$$

于是，我们有$0<\lambda\le2\tilde{c}\eta$。

定义$\varphi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$为

$$\varphi(u,v):=\|v-y\|+\delta_{gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\eta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\eta(\bar{y})\right)}(u,v).$$

由$gph\,G$在点$(\bar{x},\bar{y})$附近是局部闭性，容易验证φ是下半连续的，$\inf\varphi$为有限数，且

$$\varphi(x_\nu,y_\nu)\le\inf\varphi+\frac{\lambda}{\tilde{c}}.$$

定义乘积空间$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$中的范数为$h(x,y):=\|x\|+\lambda\|y\|$，于是，由Ekeland变分原理可以得到，存在$(\tilde{x},\tilde{y})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$使得

$$h(\tilde{x}-x_\nu,\tilde{y}-y_\nu)\le\frac{c+\tilde{c}}{2}\frac{\lambda}{\tilde{c}}, \tag{3.5}$$

$$\varphi(\tilde{x},\tilde{y})\le\varphi(x_\nu,y_\nu), \tag{3.6}$$

$$\operatorname{argmin}_{u,v}\left\{\varphi(u,v)+\frac{2}{c+\tilde{c}}h(u-\tilde{x},v-\tilde{y})\right\}=\{(\tilde{x},\tilde{y})\}. \tag{3.7}$$

由(3.6)可知，$(\tilde{x},\tilde{y})\in gph\,G\cap\left(\mathbb{B}_\eta(\bar{x})\times\mathbb{B}_\eta(\bar{y})\right)$，因此，$\|\tilde{y}-y\|\le\|y_\nu-y\|$。由三角不等式，我们有

$$\|\tilde{y}-\bar{y}\|\le\|\tilde{y}-y\|+\|y-\bar{y}\|\le\|y_\nu-y\|+\|y-\bar{y}\|\le\|y_\nu-\bar{y}\|+2\|y-\bar{y}\|\le3\eta. \tag{3.8}$$

由(3.5)，可以得到$\|\tilde{x}-x_v\| \le \frac{c+\tilde{c}}{2}\frac{\lambda}{\tilde{c}} < \lambda \le 2\tilde{c}\eta$，由三角不等式，我们有

$$\|\tilde{x}-\bar{x}\| \le \|\tilde{x}-x_v\| + \|x_v-\bar{x}\| \le (2\tilde{c}+1)\eta. \tag{3.9}$$

于是，我们有 $\tilde{y} \ne y$，事实上，如果 $\tilde{y}=y$，则有

$$d\left(x_v, G^{-1}(y)\right) = d\left(x_v, G^{-1}(\tilde{y})\right) \le \|\tilde{x}-x_v\| < \lambda,$$

与(3.4)矛盾。定义$\psi(u,v) := \|v-y\| + \frac{2}{c+\tilde{c}}\left(\|u-\tilde{x}\| + \lambda\|v-\tilde{y}\|\right)$，于是由广义费马引理和(3.7)，我们有

$$(0,0) \in \partial\left(\psi + \delta_{gph\,G}\right)(\tilde{x},\tilde{y}). \tag{3.10}$$

容易验证，ψ 为凸函数，ψ 在 $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 上是 Lipschitz 连续的。且有

$$\partial\psi(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{2}{c+\tilde{c}}\mathbb{B}^1 \times \left(\frac{\tilde{y}-y}{\|\tilde{y}-y\|} + \frac{2\lambda}{c+\tilde{c}}\mathbb{B}^2\right). \tag{3.11}$$

由 Lipschitz 函数的次梯度微分和法则，从而(3.10)可以改写为

$$(0,0) \in \partial\psi(\tilde{x},\tilde{y}) + N_{gph\,G}(\tilde{x},\tilde{y}).$$

由(3.11)，存在$(z_1,z_2) \in \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$，使得

$$\left(x_0^*, -y_0^*\right) \in \hat{N}_{gph\,G}(\tilde{x},\tilde{y}) \subset N_{gph\,G}(\tilde{x},\tilde{y}),$$

其中 $x_0^* = \frac{2}{c+\tilde{c}}z_1$，$y_0^* = -\frac{\tilde{y}-y}{\|\tilde{y}-y\|} - \frac{2\lambda}{c+\tilde{c}}z_2$。

因为，$(\tilde{x},\tilde{y}),(x,y) \in gph\,G$ 且 $\tilde{y} \ne y$，所以，我们设

$$w := \frac{y-\tilde{y}}{\|y-\tilde{y}\|}, \ \|w\| = 1.$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}
\left\langle y_0^*, w\right\rangle - c\|x_0^*\| &= \left\langle -\frac{\tilde{y}-y}{\|\tilde{y}-y\|} - \frac{2\lambda}{c+\tilde{c}}z_2, w\right\rangle - \frac{2c}{c+\tilde{c}}\|z_1\| \\
&= 1 - \frac{2\lambda}{c+\tilde{c}}\langle z_2, w\rangle - \frac{2c}{c+\tilde{c}}\|z_1\| \\
&\ge 1 - \frac{2\lambda}{c+\tilde{c}} - \frac{2c}{c+\tilde{c}} \\
&\ge 1 - \frac{4\tilde{c}\eta + 2c}{c+\tilde{c}} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

与(3.3)矛盾，于是，对于任意$(x,y),(x_v,y_v) \in gph\,G \cap \left(\mathbb{B}_\eta(\bar{x}) \times (\mathbb{B}_\eta(\bar{y})\right)$满足 $y_v \ne y$，都有

$$\|x_v - x\| \le \tilde{c}\|y_v - y\|.$$

命题 3.1 证闭。

接下来，我们给出此类参数变分系统具有静态性质的充分条件。

定理 3.1 设 P 为度量空间，$p \in P$ 为参向量，$F: P \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ 为集值映射，考虑点$(\bar{p},\bar{x}) \in gph\,S$，假设如下条件成立：

(i) $gph\,F_{\overline{p}}$ 在点 $(\overline{x},0)$ 附近是局部闭的，

(ii) 存在 $\ell>0$，$0<\delta<\dfrac{1}{4}$ 使得

$$F(p,x)\subseteq F(\overline{p},x)+\ell d(p,\overline{p})\mathbb{B},\ \forall x\in\mathbb{B}_\delta(\overline{x}),\forall p\in\mathbb{B}_\delta(\overline{p});\tag{3.12}$$

(iii) $\left\|D^*F_{\overline{p}}(\overline{x}\,|\,\overline{y})^{-1}\right\|^+<c<\infty$。

则对于任意的 $\tilde{c}>\dfrac{c}{1-4\delta}$，集值映射 S 在点 $(\overline{p},\overline{x})$ 处具有静态性质，且静态系数为 $\ell\tilde{c}$。

证明：下面我们证明

$$S(p)\cap\mathbb{B}_\delta(\overline{x})\subset S(\overline{p})+\ell\tilde{c}d(p,\overline{p})\mathbb{B},\ \forall\, d(p,\overline{p})<\delta.\tag{3.13}$$

设任意 $p\in P$ 满足 $d(p,\overline{p})<\delta$，任意 $x\in S(p)\cap\mathbb{B}_\delta(\overline{x})$，则 $p\in\mathbb{B}_\delta(\overline{p})$，$x\in\mathbb{B}_\delta(\overline{x})$，$0\in F(p,x)$。于是，要证(3.13)，只需要证明，对 $x\in S(p)\cap\mathbb{B}_\delta(\overline{x})$，存在 $\hat{x}\in S(\overline{p})$ 使得

$$\|\hat{x}-x\|\le\ell\tilde{c}d(p,\overline{p}).\tag{3.14}$$

由(3.12)可知，存在 $y\in F_{\overline{p}}(x)\cap\mathbb{B}_\delta(0)$ 使得

$$\|y\|\le\ell d(p,\overline{p}).\tag{3.15}$$

情形 1：当 $y=0$ 时，则 $0\in F(\overline{p},x)$，对于上述任意 x，都有 $x\in S(\overline{p})$，于是，存在 $\hat{x}=x\in S(\overline{p})$，使得(3.14)成立。

情形 2：当 $y\neq0$ 时，取 $\hat{x}=\overline{x}$，于是 $(\overline{x},0),(x,y)\in gph\,F_{\overline{p}}\cap\left(\mathbb{B}_\delta(\overline{x})\times\mathbb{B}_\delta(0)\right)$，由命题 3.1 可得

$$\|\overline{x}-x\|\le\tilde{c}\|y-0\|.\tag{3.16}$$

结合(3.15)，从而(3.14)成立

定理 3.1 证闭。

注：文献[13]中指出：当 G 为有限维 Hilbert 空间之间的集值映射，且 $gph\,G$ 在参考点 $(\overline{x},\overline{y})$ 是局部闭的时，有 $\limsup\limits_{\substack{(x,y)\to(\overline{x},\overline{y})\\(x,y)\in gph\,G}}\left\|DG(x\,|\,y)^{-1}\right\|^-<\infty$ 等价于 G 在点 $(\overline{x},\overline{y})$ 处是度量正则的。因此，结合定理 3.1，我们可以从度量正则性的角度出发，得到如下推论。

推论 3.1 设 P 为度量空间，$p\in P$ 为参向量，$F:P\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 为集值映射，考虑点 $(\overline{p},\overline{x})\in gph\,S$，假设如下条件成立：

(i) $gph\,F_{\overline{p}}$ 在点 $(\overline{x},0)$ 附近是局部闭的；

(ii) 存在 $\ell>0$ 以及 $\delta>0$ 使得

$$F(p,x)\subseteq F(\overline{p},x)+\ell d(p,\overline{p})\mathbb{B},\ \forall x\in\mathbb{B}_\delta(\overline{x}),\forall p\in\mathbb{B}_\delta(\overline{p});$$

(iii) $F_{\overline{p}}$ 在点 $(\overline{x},0)$ 处是度量正则的，正则系数为 $\kappa>reg\left(F_{\overline{p}};\overline{x}\,|\,0\right)$。

则集值映射 S 在点 $(\overline{p},\overline{x})$ 处具有静态性质，且静态系数为 $\ell\kappa$。

证明：由文献[13]以及定理 3.1，直接可以得到。

推论 3.1 证闭。

下面，我们讨论一种具体特殊结构的参数变分系统在参考点具有静态性质的充分条件。它在优化问题中有着重要作用[7]。

考虑 $F(p,x)=f(p,x)+H(p)$，于是，参数变分系统(1.1)可以表示为

$$S(p)=\left\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,0\in f(p,x)+H(p)\right\}.\tag{3.17}$$

其中 $f:P\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 为向量映射，$H:P\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 为集值映射。给出以下两个条件：

(a) f 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 处严格可微；

(b) H 在点 $\bar{p}$ 处是局部上 Lipschitz 的。

注意到，由条件(a)：f 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 处严格可微，可知 f 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 附近是局部 Lipschitz 的，即，存在 $(\bar{p},\bar{x})$ 的邻域 $U_{px}=U_p\times U_x$ 和常数 $\kappa_1\ge 0$，满足

$$\left\|f(p,x)-f(\tilde{p},\tilde{x})\right\|\le\kappa_1 d\left((p,x),(\tilde{p},\tilde{x})\right),\ \forall p,\tilde{p}\in U_p,\forall x,\tilde{x}\in U_x$$

特别地，取 $\tilde{p}=\bar{p},\tilde{x}=x$，我们有

$$\left\|f(p,x)-f(\bar{p},x)\right\|\le\kappa_1 d(p,\tilde{p}),\ \forall p\in U_p,\forall x\in U_x \tag{3.18}$$

由(3.18)我们得到 $f(p,x)-f(\bar{p},x)\in\kappa_1 d(p,\bar{p})\mathbb{B},\forall p\in U_p,\forall x\in U_x$，即

$$f(p,x)\in f(\bar{p},x)+\kappa_1 d(p,\bar{p})\mathbb{B},\ \forall p\in U_p,\forall x\in U_x. \tag{3.19}$$

由条件(b)可以得到，存在 $\kappa_2,\gamma>0$，对于任意的 $p\in\mathbb{B}_\gamma(\bar{p})$，都有

$$H(p)\subset H(\bar{p})+\kappa_2 d(p,\bar{p})\mathbb{B}. \tag{3.20}$$

结合(3.19)，(3.20)，我们可以得到

$f(p,x)+H(p)\subset f(\bar{p},x)+H(\bar{p})+(\kappa_1+\kappa_2)d(p,\bar{p})\mathbb{B},\ \forall x\in U_x,\forall p\in U_p\cap\mathbb{B}_\gamma(\bar{p})$，即

$$F(p,x)\subset F(\bar{p},x)+(\kappa_1+\kappa_2)d(p,\bar{p})\mathbb{B}. \tag{3.21}$$

于是，选取合适的 $\delta>0$ 使得 $\mathbb{B}_\delta(\bar{x})\subset U_x$，$\mathbb{B}_\delta(\bar{p})\subset U_p\cap\mathbb{B}_\gamma(\bar{p})$，以及 $\ell\ge\kappa_1+\kappa_2$，便可以得到(3.12)的结果。于是条件(a)，(b)蕴含定理 3.1 中的条件(ii)。从而，可以给出具有这种特殊结构的参数变分系统在参考点具有静态性质的充分条件。

推论 3.2 设 P 为度量空间，$p\in P$ 为参向量，$F:P\times\mathbb{R}^n\rightrightarrows\mathbb{R}^m$ 为集值映射，且 $F(p,x)=f(p,x)+H(p)$，考虑点 $(\bar{p},\bar{x})\in gph\,S$，假设条件(a)，(b)成立，并且如下条件也成立：

(i) $gph\,F_{\bar{p}}$ 在点 $(\bar{x},0)$ 附近是局部闭的；

(ii) $\left\|D^*F_{\bar{p}}(\bar{x}\,|\,\bar{y})^{-1}\right\|^+<c<\infty$。

则对于任意的 $\tilde{c}>\dfrac{c}{1-4\delta}$，集值映射 S 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 处具有静态性质，且静态系数为 $\ell\tilde{c}$。

证明：由条件(a)，(b)蕴含定理 3.1 中的条件(ii)，因此，根据定理 3.1 的结论直接可以推出 S 在点 $(\bar{p},\bar{x})$ 处具有静态性质。

推论 3.2 证闭。

参考文献

[1] Clarke, F.H. (1976) A New Approach to Lagrange Multipliers. *Mathematics of Operations Research*, **1**, 165-174. https://doi.org/10.1287/moor.1.2.165

[2] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J.-B. (1998) Variational Analysis, Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02431-3

[3] Henrion, R. and Outrata, J. (2001) A Subdifferential Condition for Calmness of Multifunctions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **258**, 110-130. https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7363

[4] Henrion, R. and Outrata, J. (2005) Calmness of Constraint Systems with Applications. *Mathematical Programming*, **104**, 437-464. https://doi.org/10.1007/s10107-005-0623-2

[5] Zheng, X.Y. and Ng, K.F. (2010) Metric Subregularity and Calmness for Nonconvex Generalized Equation in Banach Spaces. *SIAM Journal on Optimization*, **20**, 2119-2139. https://doi.org/10.1137/090772174

[6] Gfrerer, H. (2011) First Order and Second Order Characterizations of Metric Subregularity and Calmness of Constraint

Set Mappings. *SIAM Journal on Optimization*, **21**, 1439-1474. https://doi.org/10.1137/100813415

[7] Chuong, T.D., Kruger, A.Y. and Yao, J.C. (2011) Calmness of Efficient Solution Maps in Parametric Vector Optimization. *Journal of Global Optimization*, **51**, 677-688. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9651-z

[8] 邓杰, 寇喜鹏. 含参向量优化问题有效解映射的平静性[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 2014, 51(5): 868-872.

[9] Cánovas, M.J., Hantoute, A., Parra, J. and Toledo, F.J. (2014) Calmness of the Argmin Mapping in Linear Semi-Infinite Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **160**, 111-126. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0371-z

[10] Gisbert, M.J., Cánovas, M.J., Parra, J. and Toledo, F.J. (2018) Calmness of the Optimal Value in Linear Programming. *SIAM Journal on Optimization*, **28**, 2201-2221. https://doi.org/10.1137/17M112333X

[11] Dontchev, A.L. and Frankowska, H. (2013) On Derivative Criteria for Metric Regularity. In: Bailey, D.H., Bauschke, H.H., Borwein, P., Garvan, F., Théra, M., Vanderwerff, J., Wolkowicz, H., eds., *Computational and Analytical Mathematics*, Vol. 50, Springer, Berlin, 365-374. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7621-4_16

[12] Mordukhovich, B.S. (2013) Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory. Springer, Berlin, 2 Edition.

[13] Dontchev, A.L., Quincampoix, M. and Zlateva, N. (2006) Aubin Criterion for Metric Regularity. *Journal of Convex Analysis*, **13**, 281-297.

[14] Ekeland, I. (1974) On the Variational Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **47**, 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0