Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 3007-3012
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310310

Hans汉斯

关于三角形等周问题的讲授思路研究

王亚丹

新疆师范大学数学科学学院，新疆 乌鲁木齐

收稿日期：2023年9月19日；录用日期：2023年10月20日；发布日期：2023年10月30日

摘　要

三角形等周问题是非常古老的问题，在维吉尔的史诗《埃涅阿斯纪》中就出现了等周问题的影子。三角形等周问题是中学中经常用到的知识点，在一些中考，高考中会涉及三角形等周问题的变式。三角形等周问题的本质就是最值问题，但是大多数学生只知道这个知识点的结论，没有掌握其思想，这对于学生在面对一些相关变式题时会无从下手。本文基于这个问题，进行教学设计，对三角形等周问题这个知识点的进行详细证明，旨在让学生“知其所以然”，激发学生的好奇心。

关键词

三角形等周问题

Research on Teaching Ideas about Triangular Isoperimetric Problems

Yadan Wang

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Sep. 19th, 2023; accepted: Oct. 20th, 2023; published: Oct. 30th, 2023

Abstract

The triangle isoperimetric problem is a very old problem. The shadow of the isoperipheral problem appears in Virgil's epic "Aeneid", and the triangle is the simplest of the isoperipheral problems. The problem of triangle isosperimeter is a knowledge point often used in middle schools. In some high school entrance examinations and college entrance examinations, variations of the problem of triangle isosperimeter will be involved. The essence of the triangle isosperimeter problem is the optimal value problem, but most students only know the conclusion of this knowledge point and do not grasp its ideas. This makes it difficult for students to start when facing some related variant questions. Based on this problem, this article carries out teaching design and

文章引用: 王亚丹. 关于三角形等周问题的讲授思路研究[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 3007-3012.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310310

provides detailed proof of the knowledge point of the triangle isosperimeter problem, aiming to let students "know why" and stimulate students' curiosity.

Keywords

Triangular Isoperimetric Problem

1. 问题背景

相传在古罗马时期，有一个国家发生叛乱，这个国家的公主逃到非洲，向当地的酋长寻求一块地，以生存，这位酋长不愿赐予太多，就给了这位公主一张牛皮纸，说：你能用它为围多大的土地，这块土地就送给你。这位公主把牛皮纸剪成细条打结成一条细绳，以海岸线为直径，围出了一个半圆形的土地。这就是著名的等周问题，最早尝试证明这个问题的是芝诺多罗斯，但是在那个时期人们对极限，无穷小都不清楚，所以人们认为这样证明是不严格的。在近现代 1839 年，德国的数学家 Steinter，他给出了这个定理真正意义上的证明，但是人们仍然认为这个证明不严谨；Edler 在 Steinter 的基础上给出了严谨完整的证明，之后数学家们也相续给出了不同证明[1]。

在等周问题中，三角形等周问题是最简单的[2]。

三角形等周定理：周长一定的三角形中，等边三角形的面积最大。

本文要讲解的问题是：周长一定的三角形中，为什么等边三角形的面积最大？

本文研究的目标是：理解三角形等周问题的本质是最值问题，理解三角形等周问题的证明过程。能利用三角形等周问题解决相关题型。培养学生对数学问题的好奇心和求知欲。预期取得成果：学生能够清楚的理解三角形等周问题的本质和思想。学生能够熟练运用证明方法解决三角形等周问题。学生对数学问题产生浓厚的兴趣，主动思考和探索数学问题的解决方法。

2. 问题结论

ΔABC 的三条边为 a，b，c 并且满足 $a+b+c=L$ (定值)，当 $a=b=c$ 时，其面积最大为 $\frac{L^3}{12\sqrt{3}}$。

3. 两个基本公式

1) 均值不等式：如果 a，b，c 是正数，那么 $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ (当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立)。

均值不等式在解题中应用广泛，如均值不等式求极限、均值不等式求最值、均值不等式求函数值域等[3]；本文用到的是用均值不等式求最值。

2) 海伦公式：$S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 其中：a，b，c 为 ΔABC 三边长，$p=\frac{a+b+c}{2}$ 表示三角形周长的一半。

海伦公式主要用于对于任意三角形，已知三角形的三边长求其面积[4]。本文用到就是这一知识点。

4. 问题在课堂中怎样讲授

【情景引入】

师：现在有一条 10 cm 长的细软绳，你们现在用这条绳子任意围一个三角形，看谁围的面积最大[5]。

(学生活动)

师：看见同学们围出了各式各样的三角形，那怎么在你们围出的这些三角形中找出面积最的得呢？

生 1：用直尺一个一个量出这些三角形的边长，然后计算它们的面积，最后比较一下。

师：请坐，用测量的方法求这些三角形的面积的方法可取，但是一个一个的计算，计算量是不是太大了，你任意改变一下三角形的边长，它就不是原来的那个三角形了，这样下来三角形多得数不胜数，怎么能比较的完呢？

(学生思考讨论)

生 2：我们可以把三角形分为三大类：等腰三角形，等边三角形，一般的三角形。10 cm 长的绳子，对于等腰三角形的三边可以是 3 cm，3 cm，4 cm；等边三角形可以是 $\frac{10}{3}$ cm，$\frac{10}{3}$ cm，$\frac{10}{3}$ cm；一般的三角形的三边可以是 2.7 cm，2.8 cm，4.5 cm；然后根据三角形面积的计算公式，代入计算一下，就可以知道那一个三角形面积最大了。

师：很好，这三类三角形三边长满足任意两边之和大于第三遍，思路不错，那我们就按着这位同学的思路计算一下吧。

师：在求解面积之前我们先来回顾一下都学过哪些计算三角形面积公式?

生：计算三角形面积公式有：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times$底$\times$高；$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$；

师：很好，那现在分别计算这三种三角形的面积吧。

师：等腰三角形怎样求它的面积呢？

【板书】如图等腰三角形 ΔABC 三边 a，b，c 分别为：3 cm，3 cm，4 cm；

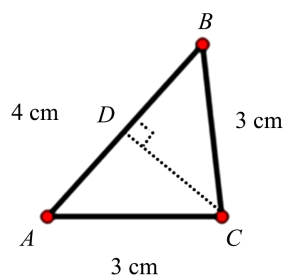

Figure 1. Isosceles triangle
图 1. 等腰三角形

生 3：过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D (图 1)，因为等腰三角形底边上的中线与底边上的高重合了(三线合一)，所以 $AD=2\text{ cm}$，在 ΔACD 中，由勾股定理得：$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}\text{ cm}$，因为 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times$底$\times$高，所以求得 $S_{\text{等腰三角形}}=\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}\text{ cm}^2$。

师：很好，讲的很仔细。现在等腰三角形的面积求出来了，那么等边三角形怎样求它的面积呢？

【板书】如图 2 等边三角形 ΔABC 三边 a，b，c 分别为：$\frac{10}{3}$ cm，$\frac{10}{3}$ cm，$\frac{10}{3}$ cm；

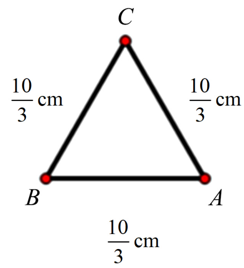

Figure 2. Equilateral triangle
图 2. 等边三角形

生 4：因为等边三角形是特殊的等腰三角形，所以计算等边三角形面积我们可以类比等腰三角形求解的方式，所以求得 $S_{等边三角形}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{3}=\frac{25\sqrt{3}}{9}\text{ cm}^2$。

师：很好，除了上面我们用到的方法，还有其他方法求等边三角形面积吗？

生 2：还可以用 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$；已知等边三角形三个内角都为 60°，边长也是已知的，则 $S_{等边三角形}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times\frac{10}{3}\times\sin 60^\circ=\frac{25\sqrt{3}}{9}\text{ cm}^2$。

师：很好，补充的很完善。如何求解一般三角形的面积呢？

【板书】如图 3，一般三角形三边 ΔABC 三边 a，b，c 分别为：2.7 cm，2.8 cm，4.5 cm；

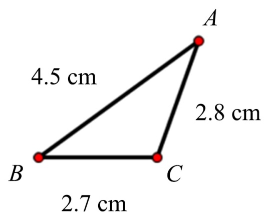

Figure 3. General triangle
图 3. 一般三角形

生 5：求解一般三角形面积要用的公式为：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$；我们先用余弦公式：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ 求出 $\cos C=\frac{2.7^2+2.8^2-4.5^2}{2\times2.7\times2.8}=-\frac{515}{1512}$，根据 $\sin^2 C+\cos^2 C=1$，求出 $\sin C$，最后得出 $S_{一般三角形}=\frac{1}{2}\times2.7\times2.8\times\sin C=\frac{\sqrt{1265}}{10}\text{ cm}^2$；

师：很好，学生们回答的很不错。

师：我们经过计算，最后比较得 $\frac{25\sqrt{3}}{9}>2\sqrt{5}>\frac{\sqrt{1265}}{10}$，所以得出：周长 10 cm 的三角形中等边三角形面积最大，学生 2 的思路是正确的，如果是个证明题，我们怎样严格的证明这个结论呢？

将问题一般化：ΔABC 满足 $a+b+c=L$ (定值)求证：当 $a=b=c$ 时，其面积最大。

(学生思考讨论)

师：我们在计算一般三角形面积时，方法就是一般化的，我们可以参照计算一般三角形的方法证明这个问题。

具体证明过程：首先利用余弦定理表示出 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

因为 $\cos^2 C+\sin^2 C=1$

所以求出 $\sin C=\dfrac{\sqrt{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}}{2ab}$，利用 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ 得：

$$\begin{aligned}S_{\Delta ABC}&=\frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}}{2ab}\\&=\frac{\sqrt{4a^2b^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}}{4}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right]}\\&=\frac{1}{4}\sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b+c)(a+b-c)}\end{aligned}$$

师：接下来怎么进行？

(学生思考)

师：我们令 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ 则 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ 这是海伦公式，我们在中学期间不太常用这个公式，所以你们会有些陌生。

由均值不等式，我们知道 $(p-a)(p-b)(p-c)\le\left[\dfrac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3$，

又因为 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$，所以 $(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$

故 $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\le\sqrt{p\cdot\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}=\sqrt{\dfrac{p^4}{3^3}}=\dfrac{p^2}{3^{\frac{3}{2}}}$

因为 $a+b+c=L$，所以 $P=\dfrac{L}{2}$

所以 $S_{\Delta ABC}\le\dfrac{L^3}{12\sqrt{3}}$ 当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立。

也就是说当 $a=b=c$，即三角形为等边三角形时，面积取得最大值即为 $\dfrac{L^3}{12\sqrt{3}}$。所以周长一定的三角形中，等边三角形面积最大，这就是三角形等周问题。

【总结】首先这道题涉及到三角形面积，并且三角形类型不定，所以我们在证明过程中用到求解三角形面积公式为 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，这个公式更一般化，用到这个公式的前提是已知三角形的三条边，然后我们可以根据余弦定理，求出 $\cos C$，再根据 $\cos^2 C+\sin^2 C=1$，求出 $\sin C$，接着根据 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，然后再利用海伦公式和均值不等式，求出：

当周长一定时，等边三角形时面积最大。

【学以致用】

用长度分别为 2 cm，3 cm，4 cm，5 cm，6 cm 的 5 根细木棒围成一个三角形(不允许折断)能够得到的三角形的最大面积是多少[5]？

分析：我们通过分析知道，这个三角形的周长一定是 20 cm，我们刚才学习了周长一定时，等边三角形面积最大；但是通过给出的数据，我们不能拼出一个等边三角形，我们要调整三边长，使他们尽量相等，所以拼出的三角形三边是 7 cm，7 cm，6 cm 即等腰三角形，根据 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ 求出此三角形的面积为 $6\sqrt{10}\ \mathrm{cm}^2$。

【课堂小结】通过本节课向学生证明了三角形等周问题，让学生不仅知道结论，还知道怎样证明过程，希望学生学会应用这个结论；本节课也希望学生明白，数学知识不仅要知道结论，还要知道背后的证明，“要知其所以然”，养成一个爱思考、勤钻研的学生。

【作业布置】设 $\Delta A_nB_nC_n$ 的三边长分别是的面积为 a_n，b_n，c_n，$\Delta A_nB_nC_n$ 的面积为 $S_n \quad n=1,2,3,\cdots$，若 $b_1>c_1$，$b_1+c_1=2a_1$，$a_{n+1}=a_n$，$b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2}$，$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}$ 则 $\{S_n\}$ 是什么数列[5]？

参考文献

[1] 张江华. 等周定理证明史[J]. 广西民族学院学报(自然科学版), 1995(1): 111-116.

[2] 康云夫. 三角形等周问题证明新探[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2000(4): 59-61.

[3] 张侨平, 严启平. 关于数学与应用数学专业课程设置与教学方法的调查报告[J]. 湖北大学学报(自然科学版), 2006(3): 244-247.

[4] 宋银苗. 海伦公式在面积问题中的应用[J]. 中学生数学, 2011(16): 41-42.

[5] 王芝平, 王坤. 从两道高考试题到等周问题的变式研究[J]. 数学通报, 2014, 53(10): 38-41.