Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 2968-2977
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310305

Hans汉斯

半群 I_n^k 的秩和平方幂等元秩

肖 坚，余江慧，罗永贵

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年9月15日；录用日期：2023年10月16日；发布日期：2023年10月26日

摘 要

设自然数 $n \geq 3$， I_n 和 S_n 是有限集 $X_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 上的对称逆半群和置换群。对任意的正整数**k**满足 $1 \leq k \leq n$，令 $S_k = \{\alpha \in S_n : \forall x \in \{k+1,\cdots,n\}, x\alpha = x\}$。易见， S_k 是 S_n 的子群，则称 S_k 是 X_n 上的**k-**局部置换群，再令 $I_n^k = S_k \cup (I_n \setminus S_n)$。易证， I_n^k 是对称逆半群 I_n 的子半群。通过分析半群 I_n^k 的格林关系和平方幂等元，获得了半群 I_n^k 的极小生成集和平方幂等元极小生成集。进一步，确定了半群 I_n^k 的秩和平方幂等元秩。

关键词

格林关系，(平方幂等元)极小生成集，(平方幂等元)秩

On the Rank and Quasi-Idempotent Rank of Semigroup I_n^k

Jian Xiao, Jianghui Yu, Yonggui Luo

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Sep. 15th, 2023; accepted: Oct. 16th, 2023; published: Oct. 26th, 2023

Abstract

Let I_n and S_n be symmetric inverse semigroup and permutation group on the finite set $X_n = \{1,2,\cdots,n\}$ if nature number $n \geq 3$, respectively. For any positive integer k that satisfies $1 \leq k \leq n$, let $S_k = \{\alpha \in S_n : \forall x \in \{k+1,\cdots,n\}, x\alpha = x\}$. It is easy to prove that S_k is a subgroup of

文章引用: 肖坚, 余江慧, 罗永贵. 半群 I_n^k 的秩和平方幂等元秩[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 2968-2977.
DOI: 10.12677/pm.2023.1310305

S_n, then S_k is called the *k*-local permutation group on X_n, and then let $I_n^k = S_k \bigcup (I_n \setminus S_n)$, it is easy to prove that I_n^k is a subsemigroup of symmetric inverse semigroup I_n. By analyzing the Green's relations and the quasi idempotent of the semigroup I_n^k, the minimal generating set and the minimal generating set of quasi idempotent be obtained, respectively. Further, the rank and quasi idempotent rank are definite, respectively.

Keywords

Green's Relations, (Quasi-Idempotent) Minimal Generating Set, (Quasi-Idempotent) Rank

1. 引言

设 S 是半群，A 是 S 的非空子集且 $a,e \in S$。若对任意 $s \in S$ 存在 $a_1,a_2,\cdots,a_m \in A$ 使得 $s = a_1a_2\cdots a_m$ 称 A 为半群 S 的生成集，记为 $S = \langle A \rangle$。对半群 S 的任意的生成集 B，如果 $|A| \le |B|$ 称 A 为半群 S 的极小生成集，进而称 $|A|$ 为半群 S 的秩，记为 $\operatorname{rank}S = \min\{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$。若 $e^2 = e$，则称 e 为半群 S 的幂等元，S 中所有的幂等元之集记为 $E(S)$。类似的，A 中所有的幂等元之集记为 $E(A)$。若 $a^2 \ne a$ 且 $(a^2)^2 = a^2$ 则称 a 是半群 S 的平方幂等元，S 中所有平方幂等元之集记为 $E^2(S)$。类似的，A 中所有平方幂等元之集记为 $E^2(A)$。若 $A \subseteq E^2(S)$ 且对任意 $s \in S$ 存在 $b_1,b_2,\cdots,b_t \in A$ 使得 $s = b_1b_2\cdots b_t$，则称 A 为半群 S 的平方幂等元生成集。对半群 S 的任意的平方幂等元生成集 B，如果 $|A| \le |B|$，称 A 为半群 S 的平方幂等元极小生成集。进而称 $|A|$ 为半群 S 的平方幂等元秩，记为 $\operatorname{rank}^2 S = \min\{|A| : A \subseteq E^2(S), \langle A \rangle = S\}$。对于有限半群的秩，平方幂等元秩的研究一直以来都是半群代数理论的研究热点之一[1]-[12]。

设 $X_n = \{1,2,\cdots,n\}$，并赋予自然序。I_n，S_n 是 X_n 上的对称逆半群和置换群。对任意的正整数 k 满足 $1 \le k \le n$，令 $S_k = \{\alpha \in S_n : \forall x \in \{k+1,\cdots,n\}, x\alpha = x\}$。易见，$S_k$ 是 S_n 的子群，则称 S_k 是 X_n 上的 k-局部置换群，再令 $I_n^k = S_k \bigcup (I_n \setminus S_n)$。易证，$I_n^k$ 是对称逆半群 I_n 的子半群。

1982 年，喻方元[1]证明了交错群及对称群的生成元组；2012 年，罗永贵，游泰杰和高荣海[2]确定了 $K_D(n,r)$ 的秩为 C_n^r；2013 年至 2017 年，文[3] [4] [5]获得了若干类型半群的秩；2019 年，李晓敏等[6]研究了双边 k 型－保序严格部分一一变换半群 OI_n^k 的双边理想 $OI_{(n,r)}^k$ 的秩和相关秩；2021 年，龙伟锋和涂晨[7]证明了保序且保距严格部分一一变换半群 ODI_n 的秩为 n；2021 年，吕会等[8]确立了半群 CI_n 的秩为 2 或 3；1990 年，GARBA G U [9]获得了部分变换半群 P_n 的理想的幂等元秩；1995 年，Howie J M [13]证明了部分变换半群 PI_n 和 SI_n 的相关秩为 $S(n,r)$；在文献[1]-[14]的基础上研究半群 I_n^k 的(平方幂等元)极小生成集和(平方幂等元)秩。得到了如下结果：

定理 1 设 $n \ge 3$，$1 \le k \le n$，$K = \{\alpha_{(1,k+1)}, \alpha_{(k+1,k+2)}, \alpha_{(k+2,k+3)}, \cdots, \alpha_{(n-1,n)}, \alpha_{(n,1)}^*\}$，则

$$I_n^k = \langle S_k \cup D_{n-1} \rangle = \begin{cases} \langle \{g_k\} \cup D_{n-1} \rangle, & k=1; \\ \langle \{(12)\} \cup K \rangle, & k=2; \\ \langle \{g_k,(23)\} \cup K \rangle, & 3 \le k \le n. \end{cases}$$

定理 2 设 $n\ge 3$，$1\le k\le n$，则

$$\mathrm{rank}I_n^k=\begin{cases} n-k+2, & k=2;\\ n-k+3, & k=1,3\le k\le n.\end{cases}$$

定理 3 设 $n\ge 3$，$2\le k\le n$，$W=\left\{\alpha_{(k,k+1)},\alpha_{(k+1,k+2)},\alpha_{(k+2,k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1,n)},\alpha_{(n,1)}^{**}\right\}$，则

$$I_n^k=\left\langle S_k\cup D_{n-1}\right\rangle=\left\langle\left\{(12)(23)\cdots(k-1\ k)\right\}\cup W\right\rangle.$$

注： 当 $k=1$ 时，I_n^k 不可由平方幂等元生成。

定理 4 设 $n\ge 3$，$2\le k\le n$，则 $\mathrm{rank}^2 I_n^k=n$。

2. 预备知识

以下给出本文将用到的基本概念及符号。

设 $\alpha\in I_n^k$ 分别用 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 和 $\mathrm{im}(\alpha)$ 表示 α 的原象集和象集。$\ker(\alpha)$ 表示在 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 上的等价关系：$\ker(\alpha)=\left\{(x,y)\in\mathrm{dom}\alpha\times\mathrm{dom}\alpha{:}x\alpha=y\alpha\right\}$。

为了方便叙述，在这里引入 Green's-等价关系[13] [14]，在半群 I_n^k 中 L,R,H,J 有如下刻划：对任意的 $\alpha,\beta\in I_n^k$，有：

1) $(\alpha,\beta)\in L\Leftrightarrow \mathrm{im}\alpha=\mathrm{im}\beta$；
2) $(\alpha,\beta)\in R\Leftrightarrow \ker(\alpha)=\ker(\beta)$；
3) $(\alpha,\beta)\in J$ 当且仅当 $|\mathrm{im}\alpha|=|\mathrm{im}\beta|$；
4) $(\alpha,\beta)\in H$ 当且仅当 $\ker(\alpha)=\ker(\beta)$，$\mathrm{im}\alpha=\mathrm{im}\beta$；
5) $D=J$。

令 $D_r=\left\{\alpha\in I_n^k:|\mathrm{im}\alpha|=r\right\}$ 则 $I_n^k=D_0\cup D_1\cup\cdots\cup D_{n-1}\cup D_n$，其中，$D_n=S_k$。

对任意 $i,j\in X_n$，在 D_{n-1} 中定义下列符号：

$$R_i=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{dom}\alpha=X_n\setminus\{i\}\right\};L_j=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{im}\alpha=X_n\setminus\{j\}\right\};H_{ij}=R_i\cap L_j;$$

$$\Theta=\left\{X_n\setminus\{i\}:1\le i\le k\right\},\Lambda=\left\{X_n\setminus\{i\}:k+1\le i\le n\right\};$$

$$\alpha(\Theta,\Theta)=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{dom}\alpha\in\Theta,\mathrm{im}\alpha\in\Theta\right\};$$

$$\alpha(\Theta,\Lambda)=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{dom}\alpha\in\Theta,\mathrm{im}\alpha\in\Lambda\right\};$$

$$\alpha(\Lambda,\Theta)=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{dom}\alpha\in\Lambda,\mathrm{im}\alpha\in\Theta\right\};$$

$$\alpha(\Lambda,\Lambda)=\left\{\alpha\in D_{n-1}:\mathrm{dom}\alpha\in\Lambda,\mathrm{im}\alpha\in\Lambda\right\};$$

则 $D_{n-1}=\alpha(\Theta,\Theta)\cup\alpha(\Theta,\Lambda)\cup\alpha(\Lambda,\Theta)\cup\alpha(\Lambda,\Lambda)$。

$$\alpha_{ij}=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-1&i+1&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&n-1&n\\1&2&\cdots&i-1&i&\cdots&j-2&j-1&j+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}, & i<j.\\[2ex] \begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-2&i-1&i+1&i+2&\cdots&\cdots&n-2&n-1&n\\1&2&\cdots&i-2&i-1&i+1&i+2&\cdots&\cdots&n-2&n-1&n\end{pmatrix}, & i=j;\\[2ex] \begin{pmatrix}1&2&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n-1&n\\1&2&\cdots&j-1&j+1&j+2&\cdots&i&i+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}, & i>j.\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}^{*}=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-1&i+1&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&i&i+1&\cdots&j-1&j+1&j+2&\cdots&n-1&1\end{pmatrix}, & i<j.\\ \begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-2&i-1&i+1&i+2&\cdots&\cdots&n-2&n-1&n\\2&3&\cdots&i-1&i+1&i+2&i+3&\cdots&\cdots&n-1&n&1\end{pmatrix}, & i=j;\\ \begin{pmatrix}1&2&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&j+1&j+2&j+3&\cdots&i+1&i+2&\cdots&n&1\end{pmatrix}, & i>j.\end{cases}$$

$$\alpha_{ij}^{**}=\begin{cases}\begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-1&i+1&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&i&i+1&\cdots&j-1&j+1&j+2&\cdots&n-1&1\end{pmatrix}, & i<j.\\ \begin{pmatrix}1&2&\cdots&i-2&i-1&i+1&i+2&\cdots&\cdots&n-2&n-1&n\\2&3&\cdots&i-1&i+1&i+2&i+3&\cdots&\cdots&n-1&n&1\end{pmatrix}, & i=j;\\ \begin{pmatrix}1&2&\cdots&j-1&j&j+1&\cdots&i-1&i+1&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&j+1&j+2&j+3&\cdots&i+1&i+2&\cdots&n&1\end{pmatrix}, & i>j.\end{cases}$$

注：当 $i=j$ 时，$\alpha_{ij}=\alpha_{ij}^{**}$。

$$K=\left\{\alpha_{(1,k+1)},\alpha_{(k+1,k+2)},\alpha_{(k+2,k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1,n)},\alpha_{(n,1)}^{*}\right\}$$

$$W=\left\{\alpha_{(k,k+1)},\alpha_{(k+1,k+2)},\alpha_{(k+2,k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1,n)},\alpha_{(n,1)}^{**}\right\}$$

$$M=\left\{\alpha_{(12)},\alpha_{(23)},\cdots\alpha_{(k-1\ k)},\alpha_{(k\ k+1)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha_{(n\ 1)}\right\}$$

其中 M 中元素分别位于不同的 L-类和 R-类。易证：

$$g_k=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k-1&k&k+1&\cdots&n-1&n\\2&3&\cdots&k&1&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in S_k.$$

本文未定义的术语及符号参见文[13] [14]。

3. 半群 I_n^k 的秩

为完成定理 1 和定理 2 的证明需要引入下列引理和推论。

引理 1 [1] 设 $n\ge 2$，S_n 是 X_n 上的对称群，$(i_1i_2\cdots i_n)$ 为 X_n 上任一长为 n 的轮换，$(i_si_t)(s<t)$ 为对换，满足 $t-s$ 与 n 互素，即有 $S_n=\langle(i_1i_2\cdots i_n),(i_si_t)\rangle$。

引理 2 [1] 设 $n\ge 3$，$1\le k\le n$ 有 $S_k=\begin{cases}\langle g_k\rangle, & k=1;\\ \langle(12)\rangle, & k=2;\\ \langle g_k,(23)\rangle, & 3\le k\le n.\end{cases}$

推论 3 [1] 设 $n\ge 3$，$1\le k\le n$ 有 $\mathrm{rank}S_k=\begin{cases}1, & k=1,2;\\ 2, & 3\le k\le n.\end{cases}$。

证 由引理 2 可知，当 $k=1$ 时，$S_k=\{\langle g_k\rangle\}$，易见 $\mathrm{rank}S_k=1$；当 $k=2$ 时，由 $S_k=\langle(12)\rangle$ 可知 $\mathrm{rank}S_k\le 1$，又因为 S_k 中至少有一个元素，即 $\mathrm{rank}S_k\ge 1$，故 $\mathrm{rank}S_k=1$；当 $3\le k\le n$ 时，$S_k=\langle g_k,(23)\rangle$，则 $\mathrm{rank}S_k\le 2$，假设 $\mathrm{rank}S_k=1$，则 S_k 为循环群进而是交换群与 S_k 是非交换群矛盾，即有 $\mathrm{rank}S_k=2$。

引理 4 [13] 设 $0\le r\le n-2$，则 $D_r\subseteq D_{r+1}\cdot D_{r+1}$。

结合 $I_n^k=D_0\cup D_1\cup\cdots\cup D_{n-1}\cup D_n$ 及引理 4 可得

推论 5 半群 $I_n^k=\langle D_n\cup D_{n-1}\rangle$。

引理 6 设 A 与 B 是有限集且 $A \subseteq B$，$|A| = |B|$，则 $A = B$。

证 若 A 真包含于 B，则 $|A| \neq |B|$ 与 $|A| = |B|$ 矛盾，故 $A = B$。

引理 7 设 $n \geq 3$，$1 \leq k \leq n$，

1) 对任意的 ξ，$\eta \in S_k$，$\alpha_{ij} \in H_{ij} \subseteq \alpha(\Theta,\Theta)$，则存在 $1 \leq t_1$，$t_2 \leq k$ 使得 $\xi\alpha_{ij}\eta \in H_{t_1 t_2} \subseteq \alpha(\Theta,\Theta)$；

2) 对任意的 $\xi \in S_k$，$\alpha_{ij} \in H_{ij} \subseteq \alpha(\Lambda,\Theta)$，则存在 $1 \leq t_3 \leq k$ 使得 $\xi\alpha_{ij} \in H_{t_3 j} \subseteq \alpha(\Lambda,\Theta)$；

3) 对任意的 $\eta \in S_k$，$\alpha_{ij} \in H_{ij} \subseteq \alpha(\Theta,\Lambda)$，则存在 $1 \leq t_4 \leq k$ 使得 $\alpha_{ij}\eta \in H_{i\,t_4} \subseteq \alpha(\Theta,\Lambda)$；

4) 对任意的 ξ，$\eta \in S_k$，$\alpha_{ij} \in H_{ij} \subseteq \alpha(\Lambda,\Lambda)$ 有 $\xi\alpha_{ij}\eta \in H_{ij} \subseteq \alpha(\Lambda,\Lambda)$。

证 对任意的 $H_{ij} = \{\alpha \in D_{n-1} : i \notin \mathrm{dom}\alpha, j \notin \mathrm{im}\alpha\}$，有

1) 若 $\mathrm{dom}\alpha \in \Theta$ 且 $\mathrm{im}\alpha \in \Theta$，即是 $H_{ij} \in \alpha(\Theta,\Theta)$。因为 $g_k \in S_k$，经验证，当 $1 \leq l \leq i-1$，$1 \leq s \leq k-j$ 时，有 $g_k^l H_{ij} g_k^s = H_{i-l\ j+s} \in \alpha(\Theta,\Theta)$；当 $1 \leq l \leq i-1$，$1 \leq s \leq j$ 时，有 $g_k^l H_{ij} g_k^{k-j+s} = H_{i-l\ s} \in \alpha(\Theta,\Theta)$；当 $1 \leq l \leq k-i-1$，$1 \leq s \leq k-j$ 时，有 $g_k^{i+l} H_{ij} g_k^s = H_{k-l\ j+s} \in \alpha(\Theta,\Theta)$；当 $1 \leq l \leq k-i-1$，$1 \leq s \leq j$ 时，有 $g_k^{i+l} H_{ij} g_k^{k-j+s} = H_{k-l\ s} \in \alpha(\Theta,\Theta)$。当 $i=2$ 时，$(23)H_{ij}(23) = H_{3j} \in \alpha(\Theta,\Theta)$；当 $i=3$ 时，$(23)H_{ij}(23) = H_{2j} \in \alpha(\Theta,\Theta)$；当 $i \neq 2$ 且 $i \neq 3$ 时，$(23)H_{ij}(23) = H_{ij} \in \alpha(\Theta,\Theta)$。由引理 2 可知对任意的 $\xi,\eta \in S_k = \langle g_k,(23)\rangle$，则存在 $l,s,p,q \in X_n$，$1 \leq t_1$，$t_2 \leq k$ 满足 $\xi = g_k^l (23)^p$，$\eta = g_k^s (23)^q$ 使得 $\xi H_{ij}\eta = g_k^l (23)^p H_{ij} g_k^s (23)^q \in H_{t_1 t_2} \subseteq \alpha(\Theta,\Theta)$。

2) 若 $\mathrm{dom}\alpha \in \Lambda$ 且 $\mathrm{im}\alpha \in \Theta$，即是 $H_{ij} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$。因为 $g_k \in S_k$，经验证，当 $1 \leq l \leq i$ 时，有 $g^{i-l}_k H_{ij} = H_{lj} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$；当 $0 \leq l \leq k-i-1$ 时，有 $g^{i+l}_k H_{ij} = H_{k-l\ j} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$。当 $j=2$ 时，$(23)H_{ij} = (23)H_{i2} = H_{i3} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$；当 $j=3$ 时，$(23)H_{ij} = (23)H_{i3} = H_{i2} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$；当 $j \neq 2$ 且 $j \neq 3$ 时，$(23)H_{ij} = H_{ij} \in \alpha(\Lambda,\Theta)$，由引理 2 可知对任意的 $\xi \in S_k = \langle g_k,(23)\rangle$，则存在 $l,p \in X_n$，$1 \leq t_3 \leq k$ 满足 $\xi = g_k^l (23)^p$ 使得 $\xi H_{ij} = g_k^l (23)^p H_{ij} \in H_{t_3 j} \subseteq \alpha(\Lambda,\Theta)$。

3) 若 $\mathrm{dom}\alpha \in \Theta$ 且 $\mathrm{im}\alpha \in \Lambda$，即是 $H_{ij} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$。因为 $g_k \in S_k$，经验证，当 $1 \leq s \leq j$ 时，有 $H_{ij} g_k^{k-j+s} = H_{i\,s} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$；当 $0 \leq s \leq k-j$ 时，有 $H_{ij} g_k^s = H_{s\ j+s} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$。当 $i=2$ 时，$H_{ij}(23) = H_{2j}(23) = H_{3j} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$；当 $i=3$ 时，$H_{ij}(23) = H_{3j}(23) = H_{2j} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$；当 $i \neq 2$ 且 $i \neq 3$ 时，$H_{ij}(23) = H_{ij} \in \alpha(\Theta,\Lambda)$，由引理 2 可知对任意的 $\eta \in S_k = \langle g_k,(23)\rangle$，则存在 $s,q \in X_n, 1 \leq t_4 \leq k$ 满足 $\eta = g_k^s (23)^q$ 使得 $H_{ij}\eta = H_{ij} g_k^s (23)^q \in H_{i\,t_4} \subseteq \alpha(\Theta,\Lambda)$。

4) 若 $\mathrm{dom}\alpha \in \Lambda$ 且 $\mathrm{im}\alpha \in \Theta$，即是 $H_{ij} \in \alpha(\Lambda,\Lambda)$。由 $g_k \in S_k$，经验证，$g_k^l H_{ij} g_k^s = H_{ij} \in \alpha(\Lambda,\Lambda)$；$(23)H_{ij}(23) = H_{ij} \in \alpha(\Lambda,\Lambda)$。由引理 2 可知对任意的 $\xi,\eta \in S_k = \langle g_k,(23)\rangle$，有 $\xi H_{ij}\eta \in H_{t_1 t_2} \subseteq \alpha(\Lambda,\Lambda)$。

引理 8 [13] 设 a,b 是 D-类 D 中的元素，则 $ab \in R_a \cap L_b$ 当且仅当 $R_b \cap L_a$ 中有幂等元。

引理 9 设 $n \geq 3$，$2 \leq k \leq n$，则 $D_{n-1} \subseteq \langle K \cup S_k\rangle = \begin{cases} \langle K \cup \{(12)\}\rangle, & k=2; \\ \langle K \cup \{(12),(12\cdots k)\}\rangle, & 3 \leq k \leq n. \end{cases}$

证 当 $n \geq 3$，$k=2$ 时，$K = \{\alpha_{(13)},\alpha_{(34)},\alpha_{(45)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha^*_{(n\ 1)}\} \subseteq D_{n-1}$。

易证，$\alpha^*_{(n1)}\alpha_{(13)}\alpha_{(34)}\alpha_{(45)}\cdots\alpha_{(n-1\ n)} = (12\cdots n-1) \in H_{nn}$。存在

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in S_k,$$

$$\alpha_{nn} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix} \in D_{n-1}$$

使得 $(12) = \alpha_{nn}\beta \in H_{nn}$，即

$$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix} \in H_{nn}$$

由引理 1 可得群 $H_{nn}=\left\langle(12)(12\cdots n-1)\right\rangle$。再由引理 7 及引理 8 可得 $M=\left\{\alpha_{(12)},\alpha_{(23)},\cdots\alpha_{(k-1\ k)},\alpha_{(k\ k+1)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha_{(n\ 1)}\right\}$，其中 M 中元素分别位于不同的 L-类和 R-类。即 $D_{n-1}\subseteq\left\langle\left\{(12)(12\cdots n-1)\right\}\cup M\right\rangle\subseteq\left\langle\left\{\alpha_{(13)},\alpha_{(34)},\alpha_{(45)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha^{*}_{(n1)}\right\},\beta\right\rangle\subseteq\left\langle K\cup S_k\right\rangle$。

当 $3\le k\le n$ 时，$K=\left\{\alpha_{(1\ k+1)},\alpha_{(k+1\ k+2)},\alpha_{(k+2\ k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha^{*}_{(n\ 1)}\right\}\subseteq D_{n-1}$。

易证 $\alpha_{(1\ k+1)}\alpha_{(k+1\ k+2)}\alpha_{(k+2\ k+3)}\cdots\alpha_{(n-1\ n)}\alpha^{*}_{(n\ 1)}=(23\cdots n)\in H_{11}$，

$$\alpha_{11}=\begin{pmatrix}2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in D_{n-1},$$

令

$$\alpha_{12}=\begin{pmatrix}2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in D_{n-1}$$

则存在

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\2&1&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in S_k,$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&3&2&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\3&2&1&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in S_k,$$

使得 $\alpha_{12}=\alpha_{11}\beta$ 且 $(23)=\alpha_{12}\sigma=\alpha_{11}\beta\sigma\in H_{11}$，即

$$(23)=\begin{pmatrix}2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\3&2&1&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in H_{11},$$

由引理 1 可得群 $H_{11}=\left\langle(23)(23\cdots n)\right\rangle$。再由引理 7 及引理 8 可得 $M=\left\{\alpha_{(12)},\alpha_{(23)},\cdots\alpha_{(k-1\ k)},\alpha_{(k\ k+1)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha_{(n\ 1)}\right\}$，其中 M 中元素分别位于不同的 L-类和 R-类。即 $D_{n-1}\subseteq\left\langle\left\{(23)(23\cdots n)\right\}\cup M\right\rangle\subseteq\left\langle\left\{\alpha_{(1\ k+1)},\alpha_{(k+1\ k+2)},\alpha_{(k+2\ k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha^{*}_{(n\ 1)}\right\},\beta,\sigma\right\rangle\subseteq\left\langle K\cup S_k\right\rangle$。

由引理 2 以及上述证明可得

$$D_{n-1}\subseteq\left\langle K\cup S_k\right\rangle=\begin{cases}\left\langle K\cup\left\{(12)\right\}\right\rangle, & k=2;\\ \left\langle K\cup\left\{(12),(12\cdots k)\right\}\right\rangle, & 3\le k\le n.\end{cases}$$

因为当 $k=2$，$\left|\left\langle K\cup\left\{(12)\right\}\right\rangle\right|=n-k+2$；$3\le k\le n$，$\left|\left\langle K\cup\left\{(12),(12\cdots k)\right\}\right\rangle\right|=n-k+3$，再结合引理 9 得出如下推论：

推论 10 设 $n\ge3$，$2\le k\le n$，有 $\operatorname{rank}I_n^k\le\begin{cases}n-k+2, & k=2;\\ n-k+3, & 3\le k\le n.\end{cases}$

引理 11 [13] 对任意的 $\alpha,\beta\in S_n$，有 $\operatorname{dom}(\alpha\beta)\subseteq\operatorname{dom}\alpha$，$\operatorname{im}(\alpha\beta)\subseteq\operatorname{im}\beta$。

引理 12 设 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in D_n$ 使得 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ 则 $(\alpha,\alpha_1)\in R$，$(\alpha,\alpha_s)\in L$。

证 第一步：证明 $(\alpha,\alpha_1)\in R$。

对任意 $(x,y)\in\ker(\alpha_1)$ 有 $x\alpha_1=y\alpha_1$ 可知 $x\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s=y\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$，即是 $(\alpha,\alpha_s)\in D$，$(x,y)\in\ker(\alpha)$，$x\alpha=y\alpha$，易见 $\ker(\alpha_1)\subseteq\ker(\alpha)$。对任意的 $a\in\operatorname{dom}\alpha$，有 $a\ker(\alpha_1)\in\operatorname{dom}\alpha/\ker(\alpha_1)$。对任意的 $x\in a\ker(\alpha_1)$，有 $(x,a)\in\ker(\alpha_1)$，所以 $(x,a)\in\ker(\alpha)$，

因此 $x\in a\ker(\alpha)\in\operatorname{dom}\alpha/\ker(\alpha)$。所以 $a\ker(\alpha_1)\subseteq a\ker(\alpha)$，则 $\left|a\ker(\alpha_1)\right|\le\left|a\ker(\alpha)\right|$，由于 $\alpha_1\in D_{n-1}$，则 $\ker(\alpha_1)$ 有 $n-1$ 个不同的同余类，设为 $a_1\ker(\alpha_1),a_2\ker(\alpha_1),\cdots a_{n-1}\ker(\alpha_1)$，则 $a_1\ker(\alpha),a_2\ker(\alpha),\cdots,a_{n-1}\ker(\alpha)\in\operatorname{dom}\alpha/\ker(\alpha)$。

另一方面 $a_1\ker(\alpha_1)\cup a_2\ker(\alpha_1)\cup\cdots\cup a_{n-1}\ker(\alpha_1)=\mathrm{dom}(\alpha_1), a_1\ker(\alpha)\cup a_2\ker(\alpha)\cup\cdots\cup a_{n-1}\ker(\alpha)$ 由 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$，可知 $\mathrm{dom}\alpha\subseteq\mathrm{dom}\alpha_1$ 即有 $|\mathrm{dom}\alpha|\le|\mathrm{dom}\alpha_1|$。因 $\alpha_1\in D_{n-1}$ 则 $|\mathrm{dom}\alpha|=|\mathrm{dom}\alpha_1|=n-1$ 在这种条件下，存在 $|a_i\ker(\alpha_1)|<|a_i\ker(\alpha)|$，

$$\begin{aligned}|\mathrm{dom}\alpha_1|&=|a_1\ker(\alpha_1)|+\cdots+|a_i\ker(\alpha_1)|+\cdots+|a_{n-1}\ker(\alpha_1)|\\&<|a_1\ker(\alpha)|+\cdots+|a_i\ker(\alpha)|+\cdots+|a_{n-1}\ker(\alpha)|=|\mathrm{dom}\alpha|\end{aligned}$$

与假设矛盾，则 $|a_i\ker(\alpha_1)|=|a_i\ker(\alpha)|$，所以 $\ker(\alpha_1)=\ker(\alpha)$，即 $(\alpha,\alpha_1)\in R$。

第二步：证明 $(\alpha,\alpha_s)\in L$。

由 $\alpha=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s$ 可知 $\mathrm{im}\alpha\le\mathrm{im}\alpha_s$，因为 $\alpha,\alpha_s\in D_{n-1}$ 则 $|\mathrm{im}\alpha|=|\mathrm{im}\alpha_s|=n-1$，所以 $\mathrm{im}\alpha=\mathrm{im}\alpha_s$，再由格林 L 关系可知 $(\alpha,\alpha_s)\in L$。

由以上引理 12 可知以下推论：

推论 13 设 $A\subseteq D_{n-1}$ 使得 $D_{n-1}\subseteq\langle A\rangle$，则 A 覆盖 D_{n-1} 中的每一个 R-类，每一个 L-类。

引理 14 令 $R_1^*=\bigcup_{i=1}^{k}R_i$，$R_j^*=R_j$，$j=k+1,\cdots,n$；$L_1^*=\bigcup_{i=1}^{k}L_i$，$L_j^*=L_j$，$j=k+1,\cdots,n$。

设 $A\subseteq S_k\cup D_{n-1}$ 且 $S_k\cup D_{n-1}\subseteq\langle A\rangle$，则

1) 当 $k\ge3$ 时，$|A\cap S_k|\ge2$；当 $k=2$ 时，$|A\cap S_k|\ge1$；

2) $A\cap R_1^*\ne\varnothing$，$A\cap R_j^*\ne\varnothing$，$j=k+1,\cdots,n-1,n$；

3) $A\cap L_1^*\ne\varnothing$，$A\cap L_j^*\ne\varnothing$，$j=k+1,\cdots,n-1,n$。

证

1) 若 $A\cap S_k=\varnothing$，由 $A\subseteq S_k\cup D_{n-1}$，则 $A\subseteq D_{n-1}$，故 $\langle A\rangle\subseteq\langle D_{n-1}\rangle=T_n\setminus S_n$ 与 $\langle A\rangle=I_n^k$ 矛盾，即 $A\cap S_k\ne\varnothing$，故当 $k=2$ 时，$|A\cap S_k|\ge1$；当 $k=3$ 时，若 $|A\cap S_k|=1$，不妨设 $A\cap S_k=\alpha$，则 $\langle A\cap S_k\rangle=\langle\alpha\rangle$ 是循环群，即 $\langle\alpha\rangle$ 是交换群与 S_k 是非交换群矛盾。则 $|A\cap S_k|\ge2$。

2) 若 $A\cap R_1^*=\varnothing$，由引理 7 有 $\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\cup S_k\right\rangle\cap R_1^*=\varnothing$，则 $\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\cup S_k$ 为 I_n^k 真子半群，则 $\langle A\rangle\subseteq\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\cup S_k\right\rangle$，$I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle\subseteq\langle A\rangle\subseteq\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\cup S_k\right\rangle$ 矛盾，则 $A\cap R_1^*\ne\varnothing$；若 $A\cap R_j^*=\varnothing$，$j=k+1,\cdots,n$，由引理 7 有 $\left\langle R_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\setminus R_j\right\}\right\rangle\cap R_j^*=\varnothing$，则 $\left\langle R_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\setminus R_j\right\}\right\rangle$ 为 I_n^k 真子半群，则 $\langle A\rangle\subseteq\left\langle R_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\setminus R_j\right\}\right\rangle$，$I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle\subseteq\langle A\rangle\subseteq\left\langle R_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}R_j^*\setminus R_j\right\}\right\rangle$，矛盾，则 $A\cap R_j^*=\varnothing$；

3) 若 $A\cap L_1^*=\varnothing$，由引理 7 有 $\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\cup S_k\right\rangle\cap L_1^*=\varnothing$，则 $\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\cup S_k$ 为 I_n^k 真子半群，则 $\langle A\rangle\subseteq\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\cup S_k\right\rangle$，$I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle\subseteq\langle A\rangle\subseteq\left\langle\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\cup S_k\right\rangle$ 矛盾，则 $A\cap L_1^*\ne\varnothing$；若 $A\cap L_j^*=\varnothing$，$j=k+1,\cdots,n$，由引理 7 $\left\langle L_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\setminus L_j\right\}\right\rangle\cap L_j^*=\varnothing$，则 $\left\langle L_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\setminus L_j\right\}\right\rangle$ 为 I_n^k 真子半群，则 $\langle A\rangle\subseteq\left\langle L_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\setminus L_j\right\}\right\rangle$，$I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle\subseteq\langle A\rangle\subseteq\left\langle L_1^*\cup S_k\cup\left\{\bigcup_{j=k+1}^{n}L_j^*\setminus L_j\right\}\right\rangle$，矛盾，则

$A\bigcap L_j^*=\varnothing$；

定理 1 的证明：

由 I_n^k 的定义可知，$I_n^k=\langle S_k\bigcup D_{n-1}\rangle$。当 $k=1$ 时，由引理 2 可知 $S_k=\langle g_k\rangle$，由推论 5 可知 $I_n^k=\langle D_n\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle S_k\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle g_k\rangle$；当 $k=2$ 时，由引理 2 可知 $S_k=\langle(12)\rangle$，由推论 5 和引理 9 可知，$I_n^k=\langle D_n\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle S_k\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle K\bigcup S_k\rangle=\langle K\bigcup(12)\rangle$，当 $3\le k\le n$ 时，由引理 2 可知 $S_k=\langle g_k,(23)\rangle$，由推论 5 和引理 9 可 $I_n^k=\langle D_n\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle S_k\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle K\bigcup S_k\rangle=\langle K\bigcup\{(23),g_k\}\rangle$，从而

$$I_n^k=\langle S_k\bigcup D_{n-1}\rangle=\begin{cases}\langle\{g_k\}\bigcup D_{n-1}\rangle, & k=1;\\ \langle\{(12)\}\bigcup K\rangle, & k=2;\\ \langle\{g_k,(23)\}\bigcup K\rangle, & 3\le k\le n.\end{cases}$$

定理 2 的证明：

当 $k=1$ 时，$I_n^k=\langle D_n\bigcup D_{n-1}\rangle=\langle g_k\bigcup D_{n-1}\rangle$，故 rank $I_n^k=n+2$，由 K 的定义可知 $|K|=n-k-1+2=n-k+1$。根据推论 3，推论 10 可知 $2\le k\le n$，有

$$\mathrm{rank}I_n^k\le\begin{cases}n-k+3, & 3\le k\le n;\\ n-k+2, & k=2.\end{cases}$$

由推论 10，引理 12，推论 13，引理 14 可知

$$\mathrm{rank}I_n^k\ge\begin{cases}n-k+3, & 3\le k\le n;\\ n-k+2, & k=2.\end{cases}$$

从而

$$\mathrm{rank}I_n^k=\begin{cases}n-k+3, & 3\le k\le n;\\ n-k+2, & k=2.\end{cases}$$

4. 半群 I_n^k 的平方幂等元秩

为完成定理 3 和定理 4 的证明需要引入下列引理。

引理 15 [1] 设 S_k 是 X_n 上的 k-局部对称群，S_k 可由 $k-1$ 个对换 $(12),(23),\cdots,(k-1\ \ k)$ 生成，则 $S_k=\langle(12)(23)\cdots(i\ \ i+1)\ldots(k-1\ \ k)\rangle$。

引理 16 [1] $\mathrm{rank}^2S_k=k-1$。

引理 17 设 $n\ge3$，$2\le k\le n$，则 $D_{n-1}\subseteq\langle W\bigcup S_k\rangle=\langle W\bigcup\{(12)(23)\cdots(k-1\ k)\}\rangle$。

证 当 $n\ge3$，$2\le k\le n$ 时，$W=\{\alpha_{(k,k+1)},\alpha_{(k+1,k+2)},\alpha_{(k+2,k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1,n)},\alpha_{(n,1)}^{**}\}\subseteq D_{n-1}$。易证 $g^{k-1}\alpha_{(k,k+1)}=\alpha_{(1,k+1)}$ 及 $\alpha_{(1,k+1)}\alpha_{(k+1,k+2)}\cdots\alpha_{(n-1,n)}\alpha_{(n,1)}^{**}=g^{k-1}\alpha_{(k,k+1)}\alpha_{(k+1,k+2)}\cdots\alpha_{(n-1,n)}\alpha_{(n,1)}^{**}=(n\ n-1\cdots32)$；

$$(n\ n-1\cdots32)^{n-1}=(23\cdots n-1\ \ n)\in H_{11}。$$

由

$$\alpha_{11}=\begin{pmatrix}2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in H_{11},$$

令

$$\alpha_{12}=\begin{pmatrix}2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in D_{n-1},$$

存在

$$\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\2&1&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in S_k,$$

使得 $\alpha_{12}=\alpha_{11}\beta$ 且存在

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\1&3&2&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in S_k,$$

满足 $\gamma\beta=(23)(12)=(123)$，$(\gamma\beta)^2=(123)^2=(132)$，

不防令

$$\tau=\begin{pmatrix}2&3&4&5&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\3&2&4&5&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in H_{11},$$

则 $\tau=\alpha_{12}(\gamma\beta)^2=\alpha_{11}\beta(\gamma\beta)^2$，即

$$\tau=(23)=\begin{pmatrix}2&3&4&5&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\1&3&4&5&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\\3&2&1&4&\cdots&k&k+1&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}\in H_{11}$$

由引理 1 可得群 $H_{11}=\langle(23)(23\cdots n)\rangle$。再由引理 7 及引理 8 可得 $M=\{\alpha_{(12)},\alpha_{(23)},\cdots\alpha_{(k-1\ k)},\alpha_{(k\ k+1)},\cdots,\alpha_{(n-1\ n)},\alpha_{(n\ 1)}\}$，其中 M 中元素分别位于不同的 L-类和 R-类。

即 $D_{n-1}\subseteq\langle\{(23)(23\cdots n)\}\cup M\rangle\subseteq\langle\{\alpha_{(k,k+1)},\alpha_{(k+1,k+2)},\alpha_{(k+2,k+3)},\cdots,\alpha_{(n-1,n)},\alpha^{**}_{(n,1)}\},\beta,\gamma\rangle\subseteq\langle W\cup S_k\rangle$。再结合引理 15 有 $D_{n-1}\subseteq\langle W\cup S_k\rangle\langle W\cup\{(12)(23)\cdots(k-1\ k)\}\rangle$。

引理 18 设 $A\subseteq E^2(S_k\cup D_{n-1})$ 且 $\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle\subseteq A$，则

1) 当 $k\ge 3$ 时，$|A\cap S_k|=k-1$；

2) 当 $k=2$ 时，$|A\cap S_k|\ge 1$。

证 证明过程类似于引理 14 可得。

定理 3 的证明：

由 I_n^k 的定义可知 $I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle$。由引理 15 可知 $S_k=\langle(12)(23)\cdots(i\ \ i+1)\cdots(k-1\ \ k)\rangle$。由引理 17 可知 $D_{n-1}\subseteq\langle W\cup S_k\rangle$，从而 $I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle=\langle\{(12)(23)\cdots(k-1\ k)\}\cup W\rangle$。

定理 4 的证明：

由 W 的定义可知 $|W|=n-k+1$。再由定理 3 可知，当 $2\le k\le n$ 时，$I_n^k=\langle S_k\cup D_{n-1}\rangle=\langle W\cup\{(12)(23)\cdots(k-1\ k)\}\rangle$，故 $\operatorname{rank}^2 I_n^k\le n-k+1+k-1=n$。结合引理 13，引理 18 可知 $\operatorname{rank}^2 I_n^k\ge n-k+1+k-1=n$，即 $\operatorname{rank}^2 I_n^k=n-k+1+k-1=n$。

5. 结语

本文通过分析半群 I_n^k 的格林关系和平方幂等元，当 $0\le r\le n-2$ 时，秩为 r 的元素可由秩为 $r+1$ 的元素生成，获得了半群 I_n^k 的极小生成集和平方幂等元极小生成集，从而确定了半群 I_n^k 的秩和平方幂等元秩。本文的研究方法对于其他非幂等元生成的半群的研究具有一定的借鉴意义。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金项目(黔师新苗[2021] B08 号)}；国家自然科学基金项目(11861022)。

参考文献

[1] 喻方元. 对称群及交代群的生成元组[J]. 武汉师范学院学报(自然科学版), 1982(2): 67-61.

[2] 罗永贵, 游泰杰, 高荣海, 等. 关于 OI_n 和 DOI_n 的理想的生成集及其秩[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版),

2012, 30(2): 54-58

[3] 罗永贵. 半群 $W(n,r)$的非群元秩和相关秩[J]. 山东大学学报(理学版), 2013, 48(12): 70-74+79.

[4] 吴金艳, 赵平, 游泰杰, 等. 半群 OI_n 的偏度秩[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(10): 67-71.

[5] 罗永贵. 半群 $W_D(n,r)$的非群元秩和相关秩[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(3): 308-312.

[6] 李晓敏, 罗永贵, 赵平, 等. 半群 $OPD(n,r)$的秩和相关秩[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2019, 42(6): 770-778.

[7] 龙伟锋, 涂晨. 保序且保距严格部分一一变换半群[J]. 嘉应学院学报, 2021, 39(6): 6-9.

[8] 吕会, 罗永贵, 赵平. 半群 CT_n 的秩[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(1): 63-66.

[9] Garba, G.U. (1990) Idempotents in Partial Transformation Semigroups. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A*, **116**, 359-366. https://doi.org/10.1017/S0308210500031553

[10] Araújo, J., Bentz, W. and Janusz, K. (2015) The Commuting Graph of the Symmetric Inverse Semigroup. *Israel Journal of Mathematics*, **207**, 103-149. https://doi.org/10.1007/s11856-015-1173-9

[11] Ebru, Y., Gonca, A. and Hayrullah, A. (2019) Relative Ranks of Some Partial Transformation Semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, **43**, 2218-2225. https://doi.org/10.3906/mat-1902-23

[12] Pérez, J. and Uzcátegui, C. (2022) Topologies on the Symmetric Inverse Semigroup. *Semigroup Forum*, **104**, 398-414. https://doi.org/10.1007/s00233-021-10242-6

[13] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford University Press, Oxford.

[14] Ganyushkin, O. and Mazorchuk, V. (2009) Classical Finite Transformation Semigroups. Springer-Verlag, London. https://doi.org/10.1007/978-1-84800-281-4