Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(10), 3048-3060
Published Online October 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1310315

抛物方程*Dirichlet*边界控制问题的控制稀疏性

文小进，罗贤兵*

贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳

收稿日期：2023年9月18日；录用日期：2023年10月19日；发布日期：2023年10月31日

摘　要

本文考虑了一个凸区域上受限于线性抛物方程的 *Dirichlet* 边界稀疏最优控制问题，其中目标泛函由一个线性二次泛函 $F(\cdot,\cdot)$ 和一个作用于满足盒子约束的控制 u 上的凸， *Lipschitz* 连续和 *Fréchet* 不可微泛函 $j(\cdot)$ 组成。首先，在转化意义下证明状态方程转化解和控制问题解存在唯一，并给出最优性系统。然后，针对不同情形下的泛函 $j(\cdot)$ 给出其次微分及控制的稀疏性质。最后给出一个正则性结果。

关键词

盒子约束， *Dirichlet* 边界，控制问题，转化解，稀疏性质

The Sparsity of Control for the Dirichlet Boundary Control Problem is Limited by the Parabolic Equation

Xiaojin Wen, Xianbing Luo*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Sep. 18^{th}, 2022; accepted: Oct. 19^{th}, 2023; published: Oct. 31^{st}, 2023

* 通讯作者。

文章引用: 文小进, 罗贤兵. 抛物方程*Dirichlet*边界控制问题的控制稀疏性[J]. 理论数学, 2023, 13(10): 3048-3060. DOI: 10.12677/pm.2023.1310315

Abstract

In this paper, we consider a Dirichlet boundary sparse optimal control problem limited by the linear parabolic equation on convex regions. The goal functional consists of a linear quadratic functional $F(\cdot,\cdot)$ and a convex, Lipschitz continuous and Fréchet non-differentiable functional $j(\cdot)$ acting on the control u that satisfies the box constraint. Firstly, we proved the existence and uniqueness of the solution of the state equation in the transformation sense and the control problem, as well as the optimality system. Then, we give the subdifferential of functional $j(\cdot)$ and sparse properties of the control in different cases. Finally, a additional regularity result is given.

Keywords

Box Constraints, Dirichlet Bounday, Optimal Control Problem, Transformed Solution, Sparse Properties

1. 引言

在这篇文章中, 我们考虑如下的 *Dirichlet* 边界稀疏最优控制问题模型

$$\min_{u\in U_{ad}} \; J(y,u) := F(y,u) + \beta j(u), \tag{1.1}$$

其中 y,u 满足抛物方程

$$\begin{cases} y_t + Ay = f, \; in\ \Omega_T, \\ y = u, \qquad on\ \Sigma_T, \\ y(0) = y_0, \quad in\ \Omega. \end{cases} \tag{1.2}$$

和容许控制集

$$U_{ad} := \{u \in L^\infty(0,T;L^\infty(\Gamma)) : u_a \le u(x,t) \le u_b,\ a.e.\ (x,t) \in \Sigma_T\}. \tag{1.3}$$

其中 $u_a,\ u_b \in \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为凸多边形区域且 $\partial\Omega := \Gamma, \Omega_T = \Omega \times (0,T], \Sigma_T = \Gamma \times (0,T]$, A 为二阶线性散度型椭圆算子, 即

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{2} \partial_{x_j}(a_{ij}(x)\partial_{x_i} y) + a_0(x)y,$$

其中, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ 满足 $a_0 \geq 0$, $a_{ij} \in C^{0,1}(\bar{\Omega})$ 对称(即 $a_{ij} = a_{ji}$)和满足一致椭圆条件

$$\exists \gamma_A \ \ s.t \ \ \gamma_A|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\xi_i\xi_j, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \ \ a.e.\ x \in \Omega.$$

注1.1. 为了方便起见, 这里我们仅考虑二阶散度形式微分算子 A 的系数 a_{ij} 对空间变量 x 的依赖性, 抑制其对时间的依赖性(见 [1], P164).

泛函 $F(y,u)$ 为

$$F(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))}, \tag{1.4}$$

促使控制控制稀疏性质的泛函 $j(\cdot)$ 有如下三种选择

$$j_1 : L^1(\Sigma_T) \to \mathbb{R}, \ \ j_1(u) = \|u\|_{L^1(\Sigma_T)} = \int_{\Sigma_T} |u(x,t)| ds dt, \tag{1.5}$$

$$j_2 : L^2(0,T;L^1(\Gamma)) \to \mathbb{R}, \ \ j_2(u) = \|u\|_{L^2(0,T;L^1(\Gamma))} = \left[\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(\Gamma)} dt\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

$$j_3 : L^1(\Gamma;L^2(0,T)) \to \mathbb{R}, \ \ j_3(u) = \|u\|_{L^1(\Gamma;L^2(0,T))} = \int_\Gamma \|u(x)\|_{L^2(0,T)} ds. \tag{1.7}$$

当 $j = j_1$ 时, 相应的最优控制问题 (P) 记为 (P_1) , 其余两个类似, 分别记为 (P_2) 和 (P_3). 为了下文方便, 我们对上述问题所涉及的数据做如下假设.

假设 1.2. 假设 $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $y_\Omega \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, $u_a < 0 < u_b$ 及最终时刻 $T > 0$.

注1.3. 显然当 $0 < u_a < u_b$ 和 $u_a < u_b < 0$ 时, $j_i(\cdot)$ 是 $Fréchet$ 可微的, 所以为了寻找稀疏最优控制, 必须假设 $u_a < 0 < u_b$.

2009年, $Stadler$ 教授在文献 [2] 中首次提出椭圆分布稀疏最优控制并对其进行了数值求解, 近年来, 众多研究学者在该领域取得较多的进展, 例如, $Wachsmuth$ 等人基于 $Stadler$ 的工作在文献 [3] 中首次分析了椭圆分布稀疏最优控制的误差; $Cassa$ 教授等人在文献 [4,5] 和 [6] 中对线性, 半线性椭圆带 $Borel$ 测度分布稀疏最优控制问题和半线性椭圆带 L^1 成本的分布稀疏最优控制问题进行了研究, 在文献 [5,7–9] 和 [10] 中将上述研究推广到线性抛物时间或空间带 $Borel$ 测度和半线性抛物带 L^1 成本的分布稀疏最优控制问题.

2021年, $Mateos$ 教授在文献 [11] 中首次研究了线性椭圆 $Dirichlet$ 边界稀疏控制问题. 目前, 国内外关于偏微分方程 $Dirichlet$ 边界稀疏控制可查阅的文献较少, 尤其是抛物方程 $Dirichlet$ 边界

稀疏控制未能查到相关的文献.

基于上述的研究基础, 本文使用文献 [10] 中所提出的三种形式的稀疏项 (即 $j_i(\cdot)$, $i=1,2,3$) 开展线性抛物 *Dirichlet* 边界稀疏最优控制问题控制稀疏性质的研究. 首先, 在转化意义下 (看下面定义 2.2) 处理状态方程 (1.2) (见 [12–14]), 其次给出上述控制问题的最优性系统和针对不同稀疏项给出控制的稀疏模式.

本文结构安排如下. 在第 2 节, 给出 (1.2) 和控制问题解存在唯一性以及最优性系统. 第 3 节, 给出不同形式泛函 $j(\cdot)$ 的次微分和利用一阶必要条件推导控制的稀疏性质. 第4节, 给出总结.

2. 连续控制问题

首先介绍几个常用的空间, $W^{k,p}(\Omega)$, $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$表示 *Sobolev* 空间和其标准范数, 其中 $k\geq 0$, $1\leq p\leq\infty$. 当 $p=2$ 时, 记 $H^k(\Omega):=W^{k,2}(\Omega)$ 和 $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}:=\|\cdot\|_{W^{k,2}(\Omega)}$, 当 $k=0$ 时, 记 $L^2(\Omega)=H^0(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)=\{v\in H^1(\Omega):v=0\ \ on\ \ \Gamma\}$. 时空 *Sobolev* 空间 $L^r(0,T;W^{k,p}(\Omega))$ 表示所有从 $[0,T]$ 到 $W^{k,p}(\Omega)$ 的 r 方可积函数全体, 当 $0\leq r<\infty$ 时其标准范数为 $\|v\|_{L^r(0,T;W^{k,p}(\Omega))}=\left(\int_0^T\|v\|_{k,p,\Omega}^r dt\right)^{\frac{1}{r}}$, $r=\infty$ 时只需做简单修改即可 (见 [15], 第 5 章).

对于 *Banach* 空间 Y, 我们简记 $L^2(0,T;Y):=L^2(Y)$, $H^s(0,T;Y):=H^s(Y)$, 并用 $(\cdot,\cdot)_{\Omega_T}$, $(\cdot,\cdot)_{\Sigma_T}$, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 分别表示 $L^2(\Omega_T)$, $L^2(\Sigma_T)$, $L^2(\Omega)$ 的标准内积.除特别说明外 c 和 C 都表示非负常数.

我们定义如下形式的双线性泛函

$$a[y,v]=\int_\Omega a_{ij}\partial_{x_i}y\partial_{x_j}vdx+\int_\Omega a_0yvdx,\ i,j=1,2.$$

当 $u\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ 时, 抛物方程 (1.2) 的标准弱形式为寻找 $y\in L^2(H^1(\Omega))\cap H^1(H^{-1}(\Omega))$ 满足 $y\mid_\Sigma=u$ 和 $y(\cdot,0)\mid_\Omega=y_0(\cdot)$ 使得

$$(y_t,v)_\Omega+a[y,v]=(f,v)_\Omega,\ \ a.e\,t\in(0,T]\,,\ \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{2.1}$$

成立. 然而, 出于实际考虑(见 [16]), 我们仅考虑满足容许控制集的控制, 即 $u\in U_{ad}$, 这说明 (2.1) 对我们的情况并不适用, 所以, 为了正确地处理 (1.2) , 我们使用 *Lions* 和 *Magenes* 等人在文献([12] 和 [13], 第 2 章) 中引入的转换技术去证明 (1.2) 转换解的存在唯一性, 为此, 首先我们引入下面引理.

引理2.1. 对 $\forall\, g\in L^2(L^2(\Omega))$, 抛物方程

$$\begin{cases}-z_t+Az=g, & in\ \Omega_T,\\ z=0, & on\ \Sigma_T,\\ z(T)=0, & in\ \Omega,\end{cases} \tag{2.2}$$

有唯一解 $z\in L^2(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\cap H^1(L^2(\Omega))$, 且 $\partial_{\nu_A}z\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\cap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$ 且

$$\|\partial_{\nu_A}z\|_{L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\cap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))}\leq\|g\|_{L^2(L^2(\Omega))}, \tag{2.3}$$

其中 $\partial_{\nu_A} z$ 表示 z 关于 ν_A 的法向量导数, $\nu_A = a \cdot \nu$, ν 为单位法向量, a 为系数 a_{ij} 组成的矩阵, 即

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

证明: 采用 ([1], P157) 的思路, 设 $\tau \in [0,T]$, 令 $\tilde{z}(\tau) := z(T-\tau)$, 则 $\tilde{z}(0) = z(T)$, $\tilde{z}(T) = z(0)$, $\tilde{g}(\cdot,t) = g(\cdot, T-\tau)$, 所以上述 (2.2) 可以等价的转化为如下的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau} + A\tilde{z} = \tilde{g} & in\ \Omega_T, \\ \tilde{z} = 0 & on\ \Sigma_T, \\ \tilde{z}(0) = 0 & in\ \Omega. \end{cases}$$

由([15], 第 7 章)得关于 $\tilde{z}$ 的方程存在唯一解 $\tilde{z} \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$, 又 Ω 为凸区域且上述方程为齐次初边值, 进一步由 ([15], 第 7 章, 定理 5) 有$\tilde{z} \in L^2(H^2 \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$. 进而 (2.2) 有唯一解 $z \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$. 由([13], 定理 2.1, 或者 [17], 定理 3.2 和 [18], 引理 A.2) 可得 $\partial_{\nu_A} z \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$ 及 (2.3). □

基于上述**引理 2.1**, 我们可以定义抛物方程 (1.2) 的转换解如下.

定义2.2. 对 $\forall\, f \in L^2(L^2(\Omega))$, $u \in L^2(L^2(\Gamma))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, 若 $y \in L^2(L^2(\Omega))$ 满足

$$(y,g)_{\Omega_T} = (f,z)_{\Omega_T} - (u, \partial_{\nu_A} z)_{\Sigma_T} + (y_0, z(\cdot,0))_\Omega, \forall g \in L^2(L^2(\Omega)), \tag{2.4}$$

则称 y 为状态方程 (1.2) 的转换解, 其中 z 为 (2.2) 的弱解.

定理2.3. 对 $\forall\ f \in L^2(L^2(\Omega))$, $u \in L^2(L^2(\Gamma))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$, 抛物方程 (1.2) 有唯一的转换解 $y \in L^2(L^2(\Omega))$ 且有

$$\|y\|_{L^2(L^2(\Omega))} \le C(\|f\|_{L^2(L^2(\Omega))} + \|u\|_{L^2(L^2(\Gamma))} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}). \tag{2.5}$$

证明: ([14], 引理 1) 证明了当 $A = -\triangle$ 时的情形, 该证明对我们的情形(即散度型算子 A) 也成立.

□

基于**定理 2.3**, 我们可以得到如下结果.

推论2.4. 控制到状态算子$G : L^2(L^2(\Gamma)) \to L^2(L^2(\Omega))$, $G(u) = y$是线性连续的,其中y 是方程(1.2)的转化解. 泛函$F(u) := F(G(u), u) = F(y, u)$在$L^2(L^2(\Gamma))$上$Fréchet$可微, 即对$\forall\, u, v \in L^2(L^2(\Gamma))$有

$$F'(u)v = (\alpha u - \partial_{\nu_A}\varphi, v)_{\Sigma_T}, \tag{2.6}$$

其中伴随状态 $\varphi \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$ 满足

$$\begin{cases} -\varphi_t + A\varphi = y - y_\Omega, & in\ \Omega_T, \\ \varphi = 0, & on\ \Sigma_T, \\ \varphi(T) = 0, & in\ \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

证明: $G(\cdot)$ 连续性和线性性分别由 (2.5) 式和解的叠加原理得出. 伴随状态 φ 的正则性由**引理2.1**给出. 显然 F 是 $Fréchet$ 可微的, 且由链式法则和分部积分即得 (2.6).

□

控制问题 (1.1)-(1.3) 至少存在一解 $\bar{u} \in U_{ad}$ 是经典结论 (见 [12], 第 3 章和 [1], 第 2 章)并且由 (2.5) 式可知从控制到状态的算子 G 是单射, 故解存在且唯一.

记 $\partial j(u)$ 为 $j(\cdot)$ 在 u 处的凸次微分, 下面我们给出控制问题 (1.1)-(1.3) 的最优性系统.

定理2.5. 设 $\bar{u} \in U_{ad}$ 是最优控制问题 (1.1)-(1.3) 的解, 则存在唯一 $\bar{y} \in L^2(L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi} \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, $\bar{\lambda} \in \partial j(\bar{u})$ 满足

$$\begin{cases} \bar{y}_t + A\bar{y} = f, & in\ \Omega_T, \\ \bar{y} = \bar{u}, & on\ \Sigma_T, \\ \bar{y}(0) = y_0, & in\ \Omega, \end{cases} \tag{2.8a}$$

$$\begin{cases} -\bar{\varphi}_t + A\bar{\varphi} = \bar{y} - y_\Omega, & in\ \Omega_T, \\ \bar{\varphi} = 0, & on\ \Sigma_T, \\ \bar{\varphi}(T) = 0, & in\ \Omega, \end{cases} \tag{2.8b}$$

$$(\alpha\bar{u} - \partial_{\nu_A}\bar{\varphi} + \beta\bar{\lambda}, u - \bar{u})_{\Sigma_T} \geq 0, \ \ \forall u \in U_{ad}. \tag{2.8c}$$

证明: (2.8a), (2.8b) 显然. (2.8c) 的证明, 我们采用 ([10], 定理 3.1) 中的方法, 因 $\bar{u}$ 为最优解, 所以对 $\forall\, u \in U_{ad}$ 有

$$F(\bar{u} + t(u - \bar{u})) - F(\bar{u}) + \beta(j(\bar{u} + t(u - \bar{u})) - j(\bar{u})) \geq 0.$$

两则同除 t, 由 $j(\cdot)$ 的凸性 和令 $t \to 0$ 得

$$F'(\bar{u})(u - \bar{u}) + \beta(j(u) - j(\bar{u})) \geq 0.$$

即 $\bar{u}$ 是下列优化问题的解

$$\min_{u \in U_{ad}} I_\beta(u) = F'(\bar{u})u + \beta j(u) + I_{U_{ad}}(u),$$

其中, $I_{U_{ad}}$ 为 U_{ad} 的指示函数, 即

$$I_{U_{ad}} = \begin{cases} 0, & u \in U_{ad}, \\ \infty, & u \notin U_{ad}, \end{cases}$$

又由于 $F'(\bar{u}), j(\cdot)$ 连续, 故利用 $Moreau - Rockafellar$ 定理 (参考 [19] 第 I 章, 性质 5.6) 可知

$$0 \in \partial I_\beta(\bar{u}) = F'(\bar{u}) + \beta\partial j(\bar{u}) + \partial I_{U_{ad}}(\bar{u}),$$

所以 $\exists\, \bar{\lambda} \in \partial j(\bar{u}), \bar{\iota} \in \partial I_{U_{ad}}(\bar{u})$ 满足

$$F'(\bar{u}) + \beta\bar{\lambda} + \bar{\iota} = 0,$$

所以, 由 (2.6) 和次微分定义得

$$I_{U_{ad}}(u) - I_{U_{ad}}(\bar{u}) \geq (-(\alpha\bar{u} - \partial_{\nu_A}\varphi + \beta\bar{\lambda}), u - \bar{u})_{\Sigma_T},$$

由 $I_{U_{ad}}(\cdot)$ 的定义及 $\bar{u}$, $u \in U_{ad}$ 可得

$$(\alpha\bar{u} - \partial_{\nu_A}\varphi + \beta\bar{\lambda}, u - \bar{u})_{\Sigma_T} \geq 0.$$

$\square$

3. 控制的稀疏性质

下面我们将使用上述最优性系统 (2.8) 推导选择不同 $j_i(\cdot)$, $i = 1, 2, 3$ 时最优控制 $\bar{u}$ 的稀疏性质.

3.1. 控制问题 P_1

由 (1.5) 有

$$j_1(u) = \|u\|_{L^1(\Sigma_T)} = \int_{\Sigma_T} |u(x,t)| dsdt,$$

通过简单的计算, 我们有 $\lambda \in \partial j_1(u)$ 当且仅当 $\lambda \in L^\infty(\Sigma_T)$ 且对于 $a.e.$ $(x,t) \in \Sigma_T$ 有

$$\lambda(x,t) \begin{cases} = +1, & \text{若 } u(x,t) > 0, \\ = -1, & \text{若 } u(x,t) < 0, \\ \in [-1, +1], & \text{若 } u(x,t) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

基于此, 当 $j = j_1$ 时, 从**定理 2.5**可得出如下的结论.

推论3.1. 设 $\bar{y} \in L^2(L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi} \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, $\bar{\lambda} \in \partial j_1(\bar{u})$, 则对 $a.e.$ $(x,t) \in \Sigma_T$ 下列描述成立.

$$\text{当 } \alpha > 0 \text{ 时, 有} \begin{cases} \bar{u}(x,t) = Proj_{[u_a,u_b]}\left(-\dfrac{1}{\alpha}[-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t) + \beta\bar{\lambda}(x,t)] \right), \\ \bar{u}(x,t) = 0 \text{ 当且仅当 } |\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)| \leq \beta, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\text{当 } \alpha = 0 \text{ 时,} \begin{cases} \text{若 } |\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)| < \beta, & \text{则 } \bar{u}(x,t) = 0, \\ \text{若 } \partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t) > \beta, & \text{则 } \bar{u}(x,t) = u_b, \\ \text{若 } \partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t) < -\beta, & \text{则 } \bar{u}(x,t) = u_a, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\bar{\lambda}(x,t) = Proj_{[-1,+1]}\left(\frac{1}{\beta}\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)\right), \tag{3.4}$$

此外, $\bar{\lambda} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$ 且唯一, 又 $\alpha > 0$ 时 $\bar{u} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$. 其中, $Proj_{[a,b]}(c)$ 表示 c 在 $[a,b]$ 上的投影, 即 $Proj_{[a,b]}(c) = min\{b, max\{a,c\}\}$.

证明: (3.2) 的第一个式子是 (2.8c) 的直接结果(见 [1], 第 3 章), (3.2) 第二个式子和 (3.4) 的证明参考 [6] 的推论 3.2. (3.3) 的证明参考 [20]. 尽管文献 [6, 20] 的控制问题是椭圆的, 但只需将证明中的变量 x 和伴随状态替换为 (x,t) 和 $-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)$ 即可得证. 又由**引理 2.1**可知 $\partial_{\nu_A}\bar{\varphi} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$, 故由投影算子 $Proj_{[a,b]}$ 的性质(见 [1], P114) 得 $\bar{\lambda} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$, 对于 $\bar{u}$ 同理.

□

注3.2. 当 $\alpha > 0$ 时, (3.2) 的第一个, 第二个式子分别给出了最优控制 $\bar{u}$ 的稀疏性质及正则性, 当 $\alpha = 0$ 时, 若集合 $\{(x,t) \in \Omega_T : |\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)| = \beta\}$ 的 *Lebesgue* 测度为 0, 则对 $\forall(x,t) \in \Omega_T$ 有 $\bar{u}(x,t) \in \{u_a, 0, u_b\}$, 即控制有 *bang-bang-bang* 结构 (见 [1], P70).

3.2. 控制问题 P_2

由 (1.6) 有

$$\begin{aligned} j_2(u) = \|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))} &= \left[\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(\Gamma)}dt\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^T \left(\int_\Gamma |u(x,t)|ds\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由 ([21], 定理 8.20.3)可知 $L^2(L^1(\Gamma))$ 的对偶空间是 $L^2(L^\infty(\Gamma))$. 所以, 我们有如下的命题.

命题3.3. 当 $u \neq 0$ 时, $\lambda \in \partial j_2(u)$ 当且仅当 $\lambda \in L^2(L^\infty(\Gamma))$ 且对于 $a.e.$ $(x,t) \in \Sigma_T$ 有

$$\lambda(x,t)\begin{cases} = \dfrac{\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}, & 若\ u(x,t) > 0, \\ = -\dfrac{\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}, & 若\ u(x,t) < 0, \\ \in \left[-\dfrac{\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}, +\dfrac{\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}\right], & 若\ u(x,t) = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

当 $u = 0$ 时, 有 $\partial j_2(u) = \{\lambda \in L^2(L^\infty(\Gamma)) : \|\lambda\|_{L^2(L^\infty(\Gamma))} \leq 1\}$.

证明:由([22], 引理 2.1)有

$$\partial j_2(u) = \left\{\lambda \in L^2(L^\infty(\Gamma)) : \|\lambda\|_{L^2(L^\infty(\Gamma))} \leq 1 和 \int_{\Sigma_T} \lambda u ds dt = \|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}\right\}. \tag{3.6}$$

首先, 证明 (3.5) 满足 (3.6). 显然 $\lambda \in L^2(L^\infty(\Gamma))$ 且有 $\|\lambda\|_{L^2(L^\infty(\Gamma))} \leq 1$ 和

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_T} \lambda u ds dt &= \frac{1}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}} \int_{\Sigma_T} \|u(t)\|_{L^1(\Gamma)} u ds dt \\ &= \frac{1}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}} \int_0^T \left[\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)} \int_\Gamma u ds\right] dt \\ &= \frac{1}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}} \int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(\Gamma)} dt \\ &= \frac{\|u\|^2_{L^2(L^1(\Gamma))}}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}} \\ &= \|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}.\end{aligned}$$

下证当 $\lambda \in \partial j_2$ 和 $u \neq 0$ 时, (3.5) 成立, 由 (3.6) 及$Hölder$ 不等式可得

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))} &= \int_{\Sigma_T} \lambda u ds dt, \\ &\leq \int_0^T \|\lambda(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{L^1(\Gamma)} dt, \qquad (3.7)\\ &\leq \left(\int_0^T \|\lambda(t)\|^2_{L^\infty(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \|\lambda\|_{L^2(L^\infty(\Gamma))} \|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}, \\ &\leq \|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}, \qquad (3.8)\end{aligned}$$

即有

$$\int_0^T \|\lambda(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u(t)\|_{L^1(\Gamma)} dt = \left(\int_0^T \|\lambda(t)\|^2_{L^\infty(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \|u(t)\|^2_{L^1(\Gamma)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

所以对 $a.e.\ t \in (0,T)$, $\exists\, c \in R$ 满足 $\|\lambda(t)\|_{L^\infty(\Gamma)} = c\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}$. 从 (3.8) 可推出 $\|\lambda\|_{L^2(L^\infty(\Gamma))} = 1$, 故选择 $c = \frac{1}{\|u\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}$. 从 (3.7) 得 $\int_\Gamma \lambda(x,t)u(x,t)ds = \|\lambda(t)\|_{L^\infty(\Gamma)}\|u(t)\|_{L^1(\Gamma)}$, 这就证明了(3.5).

最后, 再从 (3.6) 推出 $\partial j(0)$.

□

基于此, 当 $j = j_2$ 时, 从**定理 2.5** 可得出如下的结论.

推论3.4. 设 $\bar{y} \in L^2(L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi} \in L^2(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, $\bar{\lambda} \in \partial j_2(\bar{u})$, 则对 $a.e.\ (x,t) \in \Sigma_T$ 下列描述成立.

$$\text{当}\ \ \alpha > 0\ \text{时, 有} \begin{cases} \bar{u}(x,t) = Proj_{[u_a,u_b]}\left(-\dfrac{1}{\alpha}[-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t) + \beta\bar{\lambda}(x,t)]\right), \\ \bar{u}(x,t) = 0\ \text{当且仅当}\ |\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)| \leq \beta\bar{\gamma}(t), \end{cases} \qquad (3.9)$$

$$\text{当}\ \ \alpha=0\,\text{时},\begin{cases}\text{若}\ |\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)|<\beta\bar{\gamma}(t),\ \text{则}\ \bar{u}(x,t)=0,\\ \text{若}\ \partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)>+\beta\bar{\gamma}(t),\ \text{则}\ \bar{u}(x,t)=u_b,\\ \text{若}\ \partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)<-\beta\bar{\gamma}(t),\ \text{则}\ \bar{u}(x,t)=u_a,\end{cases}\tag{3.10}$$

$$\bar{\lambda}(x,t)=Proj_{[-\bar{\gamma}(t),+\bar{\gamma}(t)]}\left(\frac{1}{\beta}\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)\right),\tag{3.11}$$

其中, 当 $\bar{u}\neq 0$ 时, $\bar{\gamma}(t)=\frac{\|\bar{u}(t)\|_{L^1(\Gamma)}}{\|\bar{u}\|_{L^2(L^1(\Gamma))}}$, 否则 $\bar{\gamma}(t)=1$. 此外, $\bar{\lambda}\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$ 且唯一, 又 $\alpha>0$ 时有 $\bar{u}\in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))\bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$.

证明 (3.9) 的第一个式子在**推论 3.1**中已证明. (3.9) 的第二个式子、(3.10) 和 (3.11) 的证明参考文献 [10] 的推论 3.6. 证明过程中只需将伴随状态替换为 $-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)$ 即可得证. $\bar{\lambda}$ 和 $\bar{u}$ 的正则性证明在**推论 3.1**中已证.

□

3.3. 控制问题 P_3

由 (1.7) 有

$$j_3(u)=\|u\|_{L^1(\Gamma;L^2(0,T))}=\int_\Gamma\|u(x)\|_{L^2(0,T)}ds.$$

首先, 我们有如下的命题.

命题3.5. $\lambda\in\partial j_3(u)$ 当且仅当 $\lambda\in L^\infty(\Gamma;L^2(0,T))$ 和

$$\begin{cases}\|\lambda(x)\|_{L^2(0,T)}\leq 1, & a.e.\ x\in\Gamma_u^0,\\ \lambda(x,t)=\dfrac{u(x,t)}{\|u(x)\|_{L^2(0,T)}}, & a.e.\ x\in\Gamma_u\ \text{和}\ t\in(0,T),\end{cases}\tag{3.12}$$

其中, $\Gamma_u=\{x\in\Gamma:\|u\|_{L^2(0,T)}\neq 0\}$, $\Gamma_u^0=\Gamma\setminus\Gamma_u$.

证明: 由于 $L^1(\Gamma;L^2(0,T))$ 的对偶空间为 $L^\infty(L^2(0,T))$, 故类似于 (3.6), 我们有

$$\partial j_3(u)=\{\lambda\in L^\infty(\Gamma;L^2(0,T)):\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma;L^2(0,T))}\leq 1\text{和}\int_{\Sigma_T}\lambda udsdt=\|u\|_{L^1(\Gamma;L^2(0,T))}\}.\tag{3.13}$$

若 $\lambda\in\partial j_3(u)$, 则由 (3.13) 的 $\|\lambda\|_{L^\infty(\Gamma;L^2(0,T))}\leq 1$ 容易推出 (3.12) 的第一个关系.利用 (3.13) 和 $H\ddot{o}lder$ 不等式得

$$\|u\|_{L^1(\Gamma;L^2(0,T))}=\int_{\Sigma_T}\lambda udsdt\leq\int_\Gamma\|\lambda(x)\|_{L^2(0,T)}\|u(x)\|_{L^2(0,T)}ds\leq\|u\|_{L^1(\Gamma;L^2(0,T))},$$

即有 $\|\lambda(x)\|_{L^2(0,T)}=1$ 和对 $a.e.\ x\in\Gamma_u$ 和 $t\in(0,T)$ 有 $\lambda(x,t)=c(x)u(x,t)$, 其中 $c(x)=\frac{1}{\|u(x)\|_{L^2(0,T)}}>0$.

反之, 若 λ 满足 (3.12), 则利用 (3.13) 容易检验 $\lambda \in \partial j_3(u)$.

□

基于此, 当 $j = j_3$ 时, 从定理 2.5 可得出如下的结论.

推论3.6. 设 $\bar{y} \in L^2(L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi} \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, $\bar{\lambda} \in \partial j_3(\bar{u})$, 则对 $a.e.\ (x,t) \in \Sigma_T$ 下列描述成立.

$$\text{当}\ \ \alpha > 0\ \text{时, 有} \begin{cases} \bar{u}(x,t) = Proj_{[u_a,u_b]}\left(-\dfrac{1}{\alpha}[-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t) + \beta\bar{\lambda}(x,t)] \right), \\ \|u(x)\|_{L^2(0,T)} = 0\ \text{当且仅当}\ \|\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)\|_{L^2(0,T)} \le \beta, \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\text{当}\ \ \alpha = 0\ \text{时,} \begin{cases} \text{若}\ \|\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)\|_{L^2(0,T)} < \beta,\ \text{则}\ \|u(x)\|_{L^2(0,T)} = 0, \\ \text{若}\ \|u(x)\|_{L^2(0,T)} = 0, \qquad \text{则}\ \|\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)\|_{L^2(0,T)} \le \beta, \end{cases} \tag{3.15}$$

$$\bar{\lambda}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta}\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t), & x \in \Gamma_{\bar{u}}^0, \\ \dfrac{\bar{u}(x,t)}{\|\bar{u}\|_{L^2(0,T)}}, & x \in \Gamma_{\bar{u}}. \end{cases} \tag{3.16}$$

此外, $\bar{\lambda} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$ 且唯一, 又 $\alpha > 0$ 时有 $\bar{u} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \bigcap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma))$.

证明: (3.14) 的第一个式子在**推论 3.1**中已证. (3.14) 的第二个式子, (3.15) 和 (3.16) 的证明参考文献 [10] 的推论 3.9. 证明过程中只需将伴随状态替换为 $-\partial_{\nu_A}\bar{\varphi}(x,t)$ 即可得证. $\bar{u}, \bar{\lambda}$ 的正则性在**推论 3.1**中已证.

□

对于凸区域 Ω, 我们有如下的正则性结果, 它的证明参考 [14]的定理 2 和 [23]的定理 2.1.

推论3.7. 设 $\bar{y} \in L^2(L^2(\Omega))$, $\bar{\varphi} \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, $\bar{\lambda} \in \partial j_3(\bar{u})$, $y_\Omega \in L^2(L^2(\Omega))$, 则有

$$\begin{aligned} \bar{y} \in L^2(H^1(\Omega)) \cap H^{\frac{1}{2}}(L^2(\Omega)),\ \bar{u} \in L^2(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) \cap H^{\frac{1}{4}}(L^2(\Gamma)), \\ z \in L^2(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

4. 结论

由**推论3.1.**, **推论3.4.**, **推论3.6.** 的结论可以看出当我们选择不同稀疏项时, 所得的稀疏模式是不相同的, 当 $j = j_1(\cdot)$ 时, 最优控制的时空稀疏模式结构不受其控制; 当 $j = j_2(\cdot)$ 时, 在几乎所有时间点均促进空间稀疏性, 但这种稀疏模式可能会随着时间的推移而变化; 当 $j = j_3(\cdot)$ 时, 在整个时间间隔(即 $(0,T]$)均有恒定不变的空间稀疏模式. 这为后续数值求解文中所提出的边界稀疏最优控制问题奠定了基础, 下一步的主要工作可以围绕上述模型的数值近似求解, 离散格式的误差分析和构造数值示例验证上述所得的控制稀疏性和后续的误差结果等方面展开.

基金项目

国家自然基金项目(11961008)资助.

参考文献

[1] Tröltzsch, F. (2010) Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods, and Applications. American Mathematical Society, Providence, RI.

[2] Stadler, G. (2009) Elliptic Optimal Control Problems with L^1-Control Cost and Applications for the Placement of Control Devices. *Computational Optimization and Applications*, **44**, 159-181. https://doi.org/10.1007/s10589-007-9150-9

[3] Wachsmuth, G. and Wachsmuth, D. (2011) Convergence and Regularization Results for Optimal Control Problems with Sparsity Functional. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **17**, 858-886. https://doi.org/10.1051/cocv/2010027

[4] Casas, E., Clason, C. and Kunisch, K. (2012) Approximation of Elliptic Control Problems in Measure Spaces with Sparse Solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, 1735-1752. https://doi.org/10.1137/110843216

[5] Casas, E. and Kunisch, K. (2014) Optimal Control of Semilinear Elliptic Equations in Measure Spaces. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **52**, 339-364. https://doi.org/10.1137/13092188X

[6] Casas, E., Herzog, R. and Wachsmuth, G. (2012) Optimality Conditions and Error Analysis of Semilinear Elliptic Control Problems with L^1 Cost Functional. *SIAM Journal on Optimization*, **22**, 795-820. https://doi.org/10.1137/110834366

[7] Casas, E. and Kunisch, K. (2016) Parabolic Control Problems in Space-Time Measure Spaces. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **22**, 355-370. https://doi.org/10.1051/cocv/2015008

[8] Casas, E., Clason, C. and Kunisch, K. (2013) Parabolic Control Problems in Measure Spaces with Sparse Solutions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **51**, 28-63. https://doi.org/10.1137/120872395

[9] Kunisch, K., Pieper, K. and Vexler, B. (2014) Measure Valued Directional Sparsity for Parabolic Optimal Control Problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **52**, 3078-3108. https://doi.org/10.1137/140959055

[10] Casas, E., Herzog, R. and Wachsmuth, G. (2017) Analysis of Spatio-Temporally Sparse Optimal Control Problems of Semilinear Parabolic Equations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **23**, 263-295. https://doi.org/10.1051/cocv/2015048

[11] Mateos, M. (2021) Sparse Dirichlet Optimal Control Problems. *Computational Optimization and Applications*, **80**, 271-300. https://doi.org/10.1007/s10589-021-00290-7

[12] Lions, J.L. (1971) Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer, Berlin.

[13] Lions, J.L. and Magenes, E. (1972) Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Volume II. Springer, Berlin, Heidelberg.

[14] Gong, W., Hinze, M. and Zhou, Z. (2016) Finite Element Method and a Priori Error Estimates for Dirichlet Boundary Control Problems Governed by Parabolic PDEs. *Journal of Scientific Computing*, **66**, 941-967. https://doi.org/10.1007/s10915-015-0051-2

[15] Evans, L.C. (2022) Partial Differential Equations. American Mathematical Society, Providence, RI.

[16] Berggren, M. (2004) Approximations of Very Weak Solutions to Boundary-Value Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **42**, 860-877. https://doi.org/10.1137/S0036142903382048

[17] Kunisch, K. and Vexler, B. (2007) Constrained Dirichlet Boundary Control in L^2 for a Class of Evolution Equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **46**, 1726-1753. https://doi.org/10.1137/060670110

[18] Casas, E., Mateos, M. and Raymond, J.P. (2009) Penalization of Dirichlet Optimal Control Problems. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **15**, 782-809. https://doi.org/10.1051/cocv:2008049

[19] Ekeland, I. and Temam, R. (1999) Convex Analysis and Variational Problems. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA. https://doi.org/10.1137/1.9781611971088

[20] Casas, E. (2012) Second Order Analysis for Bang-Bang Control Problems of PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, 2355-2372. https://doi.org/10.1137/120862892

[21] Edwards, R.E. (2012) Functional Analysis: Theory and Applications. Dover, Mineola, NY.

[22] Herzog, R., Obermeier, J. and Wachsmuth, G. (2015) Annular and Sectorial Sparsity in Optimal Control of Elliptic Equations. *Computational Optimization and Applications*, **62**, 157-180. https://doi.org/10.1007/s10589-014-9721-5

[23] Gong, W. and Li, B. (2020) Improved Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Solutions of Parabolic Dirichlet Boundary Control Problems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **40**, 2898-2939. https://doi.org/10.1093/imanum/drz029