

玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数

张瑜洁

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2023年9月15日; 录用日期: 2023年10月16日; 发布日期: 2023年10月26日

摘要

1738年, 瑞典数学家欧拉解决了哥尼斯堡七桥问题, 图论由此诞生。图的交叉数是图论中一个重要的部分, 近百年来, 国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究, 但由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。本文主要对玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数进行研究。首先根据好的画法得到 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数上界, 再利用反证法和数学归纳法, 将 $R(3k, 3, 2)$ 的边集分成边不相交的 $3k$ 组, 讨论所有可能情况, 证得 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数下界至少是 $3k$, 从而证得 $cr(R(3k, 3, 2)) = 3k, k \geq 4$ 。

关键词

玫瑰花窗图, 交叉数, 好画法

The Crossing Number of Rose Windows Graph $R(3k, 3, 2)$

Yujie Zhang

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Sep. 15th, 2023; accepted: Oct. 16th, 2023; published: Oct. 26th, 2023

Abstract

In 1738, the Swedish mathematician Euler solved the problem of seven bridges in Königsberg, and graph theory was born. Crossing number of graphs is an important part of graph theory, and many scholars at home and abroad have studied the problem of crossing number of graphs in the past hundred years, but due to the difficulty of the proof, the research progress in the field of crossing number of graphs at home and abroad has been slow. In this paper, we mainly study the crossing number of rose window graph $R(3k, 3, 2)$. Firstly, we get the upper bound of the crossover number of $R(3k, 3, 2)$ based on the well-drawn method, and then we use the inverse method and the mathematical induction method to divide the set of edges of $R(3k, 3, 2)$ into the $3k$ groups whose

edges do not intersect, and discuss all the possible cases, so that we can prove that the lower bound of the crossover number of $R(3k, 3, 2)$ is at least $3k$, and thus we can prove that $cr(R(3k, 3, 2)) = 3k$, $k \geq 4$.

Keywords

Rose Windows Graph, Crossing Number, Good Drawing

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

众所周知, 图论起源于一个非常经典的问题——哥尼斯堡七桥问题。1738年, 瑞典数学家欧拉解决了哥尼斯堡七桥问题, 图论由此诞生。图的交叉数是图论中一个重要的部分, 近百年来, 国内外很多学者都对图的交叉数这一问题进行研究。图的交叉数问题的研究, 起源于20世纪40年代砖厂遇到的难题。第二次世界大战时期, Turan [1]发现运砖车沿铁轨向仓库运砖时, 车很容易在铁轨交点的位置脱节。他因此想到通过减少铁轨交叉个数来降低损失的方法, 交叉数的概念由此而来。研究图的交叉数是一项富有意义但充满挑战性的工作, 多年来, 国内外众多学者潜心于图的交叉数课题的研究, 但到目前为止, 仍有众多图类的交叉数尚未解决, 并且尚未找到能用来确定任意图的交叉数的有效算法。其实, 在1983年, Garey 和 Johnson [2]已经证明了确定一个图的交叉数是 NP-完全问题。由于证明难度较大, 国内外关于图的交叉数领域的研究进展缓慢。下面主要介绍几类图的研究成果。

1.1. 完全图 K_n

1960年, R. K. Guy [3]对 n 个顶点的完全图 K_n 的交叉数提出以下猜想:

$$cr(K_n) = Z(n) = \frac{1}{4} \frac{n}{2} \frac{n-1}{2} \frac{n-2}{2} \frac{n-3}{2}.$$

其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过任意实数 x 的最大整数。1969年, R. K. Guy [4]对完全图的交叉数进一步研究, 验证了当 $n \leq 10$ 时, 上式成立。1970年, Kieitman [5]给出了当 n 足够大时, 完全图 K_n 交叉数的下界:

$$cr(K_n) \geq n(n-1)(n-2)(n-3)/80.$$

Richter 等人[6] [7]证明了和 K_n 和 K_{n-1} 之间的关系: $cr(K_n) \geq \left\lceil \frac{n}{n-4} \cdot cr(K_{n-1}) \right\rceil$ 。

1.2. 完全二部图 $K_{m,n}$

1960年, Zarankiewicz [8]给出了完全二部图 $K_{m,n}$ 交叉数的猜想:

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

1970年, Kieitman [5]证明了当 $\min(m, n) \leq 6$ 时, Zarankiewicz 的猜想成立。1993年, Woodall [9]验证了 Zarankiewicz 的猜想对于 $K_{7,7}$ 和 $K_{7,9}$ 成立。2003年, N. H. Nahas [10]进一步研究当足够大时完全二部图的交叉数:

$$cr(K_{m,n}) \geq \frac{1}{5}m(m-1) \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 9.9 \times 10^{-6} m^2 n^2.$$

2007年, Klerk 等人[11]给出了完全二部图 $K_{m,n}$ 的新下界:

$$cr(K_{m,n}) \geq 0.8594Z(m,n).$$

1.3. 广义 Petersen 图

最早研究广义 Petersen 图在 1981 年, Kabel 等人[11]和 Exoo C, Harary, Schrijver [12]对图的交叉数进行研究, 得出:

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, h \geq 4, \\ cr(P(3h+1,3)) \geq h+3, h \geq 3, \\ cr(P(3h+2,3)) = h+2, h \geq 2. \end{cases}$$

1986年 Fiorini [13]给出广义 Petersen 图 $P(n,3)$ 的交叉数的证明, 但是, Richter 和 Salazar [14]随后指出其证明存在错误, 他们证明广义 Petersen 图 $P(n,3)$ 的交叉数为:

$$\begin{cases} cr(P(3h,3)) = h, h \geq 4, \\ cr(P(3h+1,3)) \geq h+3, h \geq 3, \\ cr(P(3h+2,3)) = h+2, h \geq 2. \end{cases}$$

2004年, 林晓惠[15]得出了 $P(4k+2,2k)$ 等部分广义 Petersen 图的交叉数的上界; 2005年, 马登举等人证明了 $G(2m+1,m)$ 的交叉数[16]; 2009年, 杨元生等人利用算法给出了 $n \geq 16$ 时 $P(n,k)$ 的交叉数的精确值[17]; Fiorini 和黄元秋等人分别用不同方法证明了 $P(3k,k)$ 的交叉数[18]; 2013年, 郑百功证明了 $P(10,3)$ 的交叉数[19]。2019年, Gauci 和 Xuereb [20]证明了当 $k \geq 3$ 时有:

$$\begin{aligned} cr(GP(3k-1,k)) &= k+1, \\ cr(GP(3k+1,k)) &= k+3. \end{aligned}$$

2020年, 历莹[21]通过研究 $P(12,5)$ 的子图的性质, 证明得出 $P(12,5)$ 的交叉数的下界至少是 6, 进而提出猜想: 当 $k \geq 5$ 时, $cr(P(2k+2,k)) \geq k+1$ 。

2. 玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数

2.1. 玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的定义

在广义 Petersen 图 $P(3k,3)$ 的基础上添加一类边, 得到玫瑰花窗图 $R(3k,3,2)$ 。

设玫瑰花窗图 $R(3k,3,2)$ 的顶点集为 $V(R(3k,3,2)) = \{a_i, b_i | 1 \leq i \leq 3k\}$, 边集为 $E(R(3k,3,2)) = \{a_i a_{i+1}, a_i b_i, b_i b_{i+3}, b_i a_{i+2}\}, k \geq 4$, 其中下标取模 $3k$ 。取玫瑰花窗图 $R(3k,3,2)$ 的子集 H_i , 且有 $V(H_i) = \{a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+3}, a_{i+2}\}$, $E(H_i) = \{a_i a_{i+1}, a_i b_i, b_i b_{i+3}, b_i a_{i+2}\}$, $1 \leq i \leq 3k, k \geq 4$, 可得 H_i 是 $R(3k,3,2)$ 的一个可传递分解, 其中 $E(R(3k,3,2)) = \bigcup_{i=1}^{3k} H_i$ 。又有 $H_{i,j}$ 是 H_i, H_{i+1}, \dots, H_j 的并集, 且 $f_D(H)$ 是 H 到所有非负实数集合的映射: $f_D(H) = cr_D(H) + cr_D(H, G \setminus E(H))/2$ 。画法 D 下的交叉数用 $cr(D)$ 或 $cr_D(G)$ 表示。

Jordan 曲线定理 任意一条简单(自身不相交)闭曲线 J 把平面分成两个区域, 在不同区域的两点若要相连, 则连结的弧必与 J 相交。

根据 Jordan 曲线定理, 我们有以下引理:

引理 1 在图 G 中, 设 C 和 C' 为两个顶点不相交的圈, $P_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ 为 k 阶路径且 $V(P_k) \cap V(C) = \emptyset$. 假设 D 是 G 的一个好画法, 那么 $cr_D(C, C')$ 是偶数; 当 a_1 和 a_k 在 $D(C)$ 的同一区域时, $cr_D(C, P_k)$ 为偶数, 否则为奇数。

引理 2 设 c 是一个正整数, 对于 $1 \leq i \leq t$, 若存在一个正整数 l_i 满足 $f_D(H_{i, i+1+l_i}) \geq l_i c$, 则令 L_i^D 为 l_i 的最小值使 $f_D(H_{i, i+1+l_i}) \geq l_i c$; 若不存在这样的正整数 l_i , 则令 $L_i^D = +\infty$ 。

2.2. 玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数的上界

引理 3 对于玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$, 当 $k \geq 4$ 时, $cr_D(R(3k, 3, 2)) \leq 3k$ 。

证明: 图 1 给出了玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的一个有 $3k$ 个交叉点的好的画法, 因此, 当 $k \geq 4$ 时, $cr_D(R(3k, 3, 2)) \leq 3k$ 。

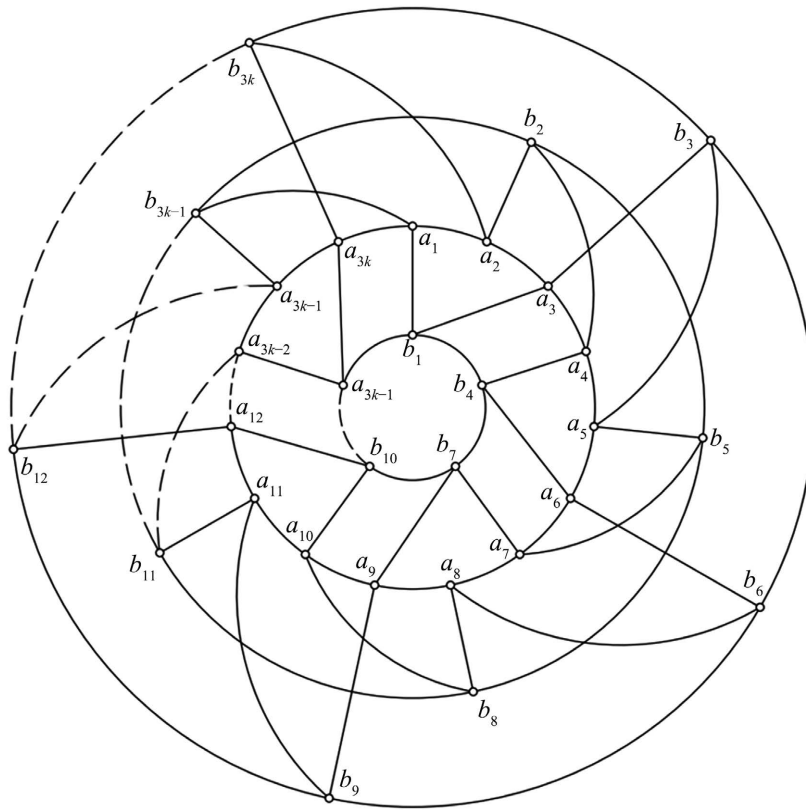


Figure 1. A good drawing of with $3k$ crossings
图 1. 有 $3k$ 个交叉点的好的画法

2.3. 玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数的下界

令 C_i 为圈 $a_i a_{i+1} b_{i+1} a_{i+3} b_{i+3} b_i a_i$, 路径 $P_0 = a_1 a_2 \cdots a_{3k}$, $P_j = b_j b_{j+3} \cdots b_{3k-3+j}$, 其中 $1 \leq j \leq 3$, 对于路径 P , 如果 $a, b \in V(P)$, 则 aPb 表示 P 从 a 到 b 的连续顶点。

引理 4 如果 $cr_D(C_1) = 1$, 且 $cr_D(a_1 a_2, b_2 a_4) = 1$, 则 $l_1^D \leq 4$ 。

证明: 反证法。假设 $l_1^D \geq 5$, 则 $f_D(H_{1,i}) < i$, $1 \leq i \leq 5$ 。若 $cr_D(a_1 a_2, b_2 a_4) = 1$, 则 $D(C_1)$ 同构于图 2(a)。由 $f_D(H_1) < 1$ 可知, 在画法 D 下 H_1 中的其他边不能再被交叉, 因此 $b_1 a_3$ 干净, 故 $a_3 \in R_2 \cup R_0$ 。

若 a_3 在区域 R_2 中, b_1a_3 干净, 由引理 1 及 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 知 a_2a_3 只能与 a_4b_4 相交, $D(C_1 \cup a_2a_3)$ 同构于图 2(b), 再由引理 1 可知, 路径 $a_4a_5b_5b_2$ 与圈 $a_1a_2a_3b_1$ 相交一次, 与 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 相矛盾。

若 a_3 在区域 R_0 中, b_1a_3 干净, 由引理 1 知 a_2a_3 与 a_4b_4 相交至少相交两次, 而 D 是一个好的画法, 因此 a_2a_3 干净, $D(C_1 \cup a_2a_3 \cup b_1a_3)$ 同构于图 2(c), 根据引理 1 可知, 路径 $a_4a_5b_3b_{3k}a_{3k}a_{3k-1}b_{3k-1}b_2$ 和 $b_4b_7a_7b_5b_2$ 与 $a_1a_2a_3b_1$ 相交, 与 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 相矛盾。

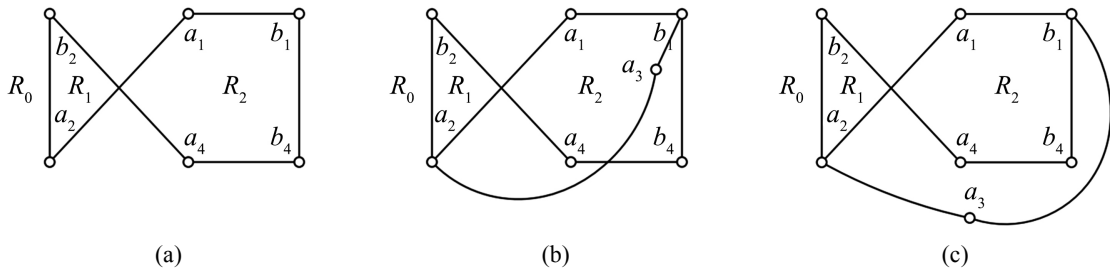


Figure 2. Subdrawings of D
图 2. D 的子画法

引理 5 如果 $cr_D(C_1) = 1$, 且 $cr_D(a_1a_2, a_4b_4) = 1$, 则 $l_1^D \leq 6$ 。

证明: 反证法。假设 $l_1^D \geq 7$, 则 $f_D(H_{1,i}) < i$, $1 \leq i \leq 7$ 。若 $cr_D(a_1a_2, a_4b_4) = 1$, 则 $D(C_1)$ 同构于图 3(a)。由 $f_D(H_1) < 1$ 可知, 在画法 D 下 H_1 中的其他边不能再被交叉, 因此 b_1a_3 干净, 故 $a_3 \in R_1 \cup R_0$ 。

若 a_3 在区域 R_1 中, b_1a_3 干净, 由引理 1 及 D 是一个好的画法可知, a_3a_4 不能与相邻边 a_4b_4 相交, a_3a_4 必定与圈 $b_4b_1a_1a_2$ 相交, 与 $f_D(H_1) < 1$ 相矛盾。

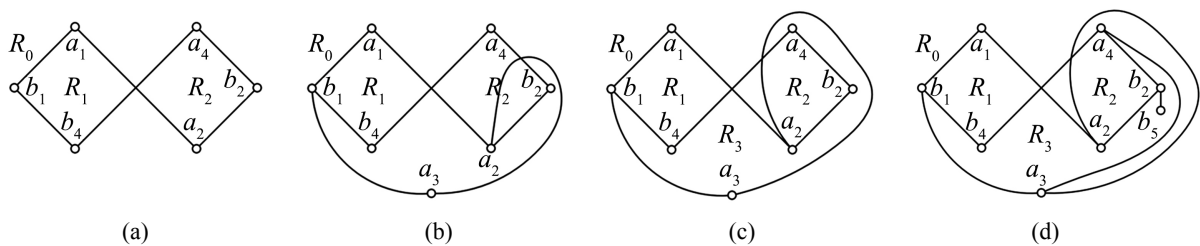
若 a_3 在区域 R_0 中, b_1a_3 干净, 此时有 $f_D(H_{1,4}) \geq 1$, 考虑 a_2a_3 , 由 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 显然有以下四种情形: a_2a_3 与 a_4b_2 相交, a_2a_3 与 a_4b_4 相交, a_2a_3 同时与 a_4b_2 和 a_4b_4 相交以及 a_2a_3 干净, 下面分别讨论这几种情形。

若 a_2a_3 与 a_4b_2 相交, 则 $D(C_1 \cup a_2a_3 \cup b_1a_3)$ 同构于图 3(b), 此时有 $f_D(H_{1,2}) \geq 1.5$, 根据引理 1 可知, 路径 $b_4a_6a_5a_4$ 与圈 $b_1a_1a_2a_3$ 相交, 与 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 相矛盾。

若 a_2a_3 与 a_4b_4 相交, 则 $D(C_1 \cup a_2a_3 \cup b_1a_3)$ 同构于图 3(c), 根据引理 1 可知, 路径 $a_1a_{3k}b_{3k}a_2$ 与 $a_1b_{3k-1}b_2$ 和 $C_1 \cup b_1a_3 \cup a_2a_3$ 相交, 此时有 $f_D(H_{1,4}) \geq 3$, 考虑 b_2b_5 , 由 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 可知, b_2b_5 与 $C_1 \cup b_1a_3 \cup a_2a_3$ 不能相交, 即 b_2b_5 干净, 因此有, $b_5 \in R_2 \cup R_3$ 。

若 $b_5 \in R_2$, b_2b_5 干净, 根据引理 1 有路径 $b_3b_8a_8a_9b_7b_4$ 和 $b_5a_5a_6b_4$ 与 $C_1 \cup b_1a_3 \cup a_2a_3$ 相交, 与 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 相矛盾。

若 $b_5 \in R_3$, b_2b_5 干净, 此时由 $f_D(H_{1,4}) \geq 3$ 可知 a_3a_4 是干净的, $D(C_1 \cup b_1a_3 \cup a_2a_3 \cup a_3a_4 \cup b_2b_5)$ 同构于图 3(d)。考虑 $C_2: a_2a_3b_3a_5b_5b_2a_2$, 对于 $a_3b_3a_5b_5$ 而言, $D(C_{1,2} \cup a_3a_4)$ 同构于图 3(e)、图 3(f)、图 3(g)和图 3(h)。



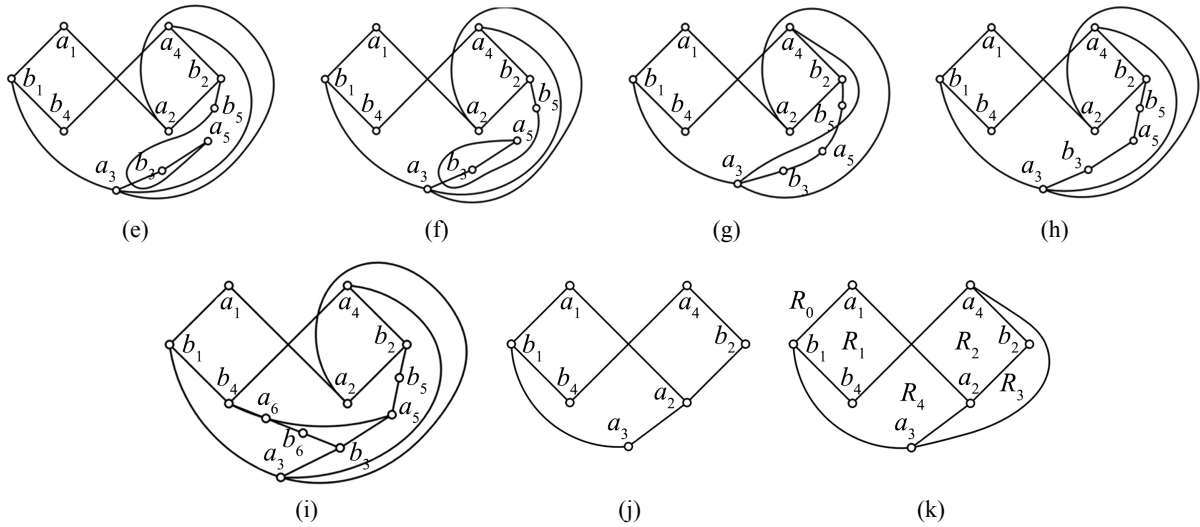


Figure 3. Subdrawings of D
图 3. D 的子画法

情况 1 在图 3(e)情形下, 根据 $f_D(H_{1.5}) \geq 3$ 且由引理 1 知路径 $a_1 a_{3k} b_{3k} a_2$, $a_1 b_{3k-1} b_2$, $b_3 b_6 a_6 b_4$ 和 $b_3 b_{3k} P_3 b_9 a_9 b_7 b_4$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1.5}) < 5$ 相矛盾。

情况 2 在图 3(f)情形下, 根据 $f_D(H_{1.5}) \geq 3$ 且由引理 1 知 $a_4 a_5$ 有边必然与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 因此 $f_D(H_{1.5}) \geq 4$, 再由引理 1 知路径 $a_1 a_{3k} b_{3k} a_2$ 和 $a_1 b_{3k-1} b_2$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1.5}) < 5$ 相矛盾。

情况 3 在图 3(g)情形下, 根据 $f_D(H_{1.5}) \geq 3$ 且由引理 1 知路径 $a_1 a_{3k} b_{3k} a_2$, $a_1 b_{3k-1} b_2$, $b_3 b_6 a_6 b_4$ 和 $b_3 b_{3k} P_3 b_9 a_9 b_7 b_4$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1.5}) < 5$ 相矛盾。

情况 4 在图 3(h)情形下, 根据引理 1 可知路径 $a_1 b_{3k-1} P_2 b_8 b_5$ 和 $a_1 a_{3k} b_{3k-2} P_1 b_7 a_7 b_5$ 与 $H_{1,4}$ 相交, 此时 $f_D(H_{1,4}) \geq 3$, 因此在画法 D 下 $H_{1,4}$ 中的其他边干净, 继续考虑 $b_3 b_6, a_4 a_5, b_4 a_6, b_4 b_7$ 这几条边, 如果相交的话是只能与 $a_5 b_5$ 相交, 由 D 是好的画法可知 $a_4 a_5$ 不能与相邻边 $a_5 b_5$ 相交; 若 $b_3 b_6$ 与 $a_5 b_5$ 相交, 则 $f_D(H_{1,5}) \geq 4$, 根据引理 1 可知路径 $b_4 a_6 b_6$ 和 $b_4 b_7 b_{10} a_{10} a_9 b_9 b_6$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1,5}) < 5$ 相矛盾; 若 $b_4 a_6$ 与 $a_5 b_5$ 相交, 则 $f_D(H_{1,5}) \geq 4$, 根据引理 1 可知路径 $b_3 b_6 a_6$ 和 $b_3 b_{3k} a_{3k} a_{3k-1} a_{3k-2} P_0 a_7 a_6$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1,5}) < 5$ 相矛盾; 若 $b_4 b_7$ 与 $a_5 b_5$ 相交, 则 $f_D(H_{1,5}) \geq 4$, 根据引理 1 可知路径 $b_3 b_6 a_8 a_9 a_{10} b_{10} b_7$ 和 $b_3 b_{3k} P_3 b_9 a_9 b_7$ 与 $C_{1,2} \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1,5}) < 5$ 相矛盾, 因此 $b_3 b_6, b_4 a_6, b_4 b_7$ 都是干净的。继续考虑 $C_3: a_3 a_4 b_4 a_6 b_6 b_3 a_3$, 根据引理 1 及 D 是一个好的画法可知, 路径 $b_4 a_6 b_6 b_3$ 及 $a_5 a_6$ 干净, $D(C_{1,3} \cup a_5 a_6)$ 同构于图 3(i)。又由引理 1 可知, 路径 $b_6 P_3 b_{3k} a_{3k} a_1$ 与 $b_6 a_8 b_8 P_2 b_{3k-1} a_1$ 和 $C_{1,3} \cup a_5 a_6$ 相交至少交两次, 又有路径 $b_1 b_{3k-2} a_{3k-2} a_{3k-1} b_{3k-1} b_2$ 与 $b_3 b_{3k} a_2$ 和 $C_{1,3} \cup a_5 a_6$ 相交, 与 $f_D(H_{1,5}) < 5$ 相矛盾。

若 $a_2 a_3$ 同时与 $a_4 b_2$ 和 $a_4 b_4$ 相交, 根据引理 1, 此时与 $f_D(H_{1,2}) < 2$ 相矛盾。

若 $a_2 a_3$ 干净, 则 $D(C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3)$ 同构于图 3(j), 此时根据引理 1 有路径 $b_4 a_6 a_5 a_4$ 与 $b_4 P_1 b_{3k-2} b_1 a_3 a_4$ 和圈 $a_1 a_2 a_3 b_1$ 相交, 此时 $f_D(H_{1,2}) \geq 1.5$, 因此在画法 D 下 $H_{1,2}$ 的其他边干净, 故 $a_3 a_4$ 也是干净的, $D(C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4)$ 同构于图 3(k)。根据引理 1 可知, 路径 $b_2 b_5 a_7 b_7 P_1 b_{3k-2} b_1$, $b_2 b_{3k-1} a_1$, $a_1 a_{3k} b_{3k} a_2$ 和 $b_4 a_6 a_5 a_4$ 与 $C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4$ 相交, 因此 $f_D(H_{1,4}) \geq 3$, 考虑路径 $b_2 b_5 a_7 b_7 P_1 b_{3k-2} b_1$ 中的边 $b_2 b_5$, 若边 $b_2 b_5$ 与 $C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4$ 相交, 则 $f_D(H_{1,4}) \geq 3.5$, 即在画法 D 下 $H_{1,4}$ 的其他边干净; 若边 $b_2 b_5$ 不与 $C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4$ 相交, 则 $b_5 \in R_2 \cup R_3$, 由引理 1 知 b_5 不论在区域 R_2 或区域 R_3 , 都有路径 $a_7 b_7 P_1 b_{3k-2} b_1$ 与 $b_8 a_{10} a_9 b_9 b_4$ 和 $C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4$ 相交, 则 $f_D(H_{1,4}) \geq 3.5$, 因此在画法 D 下 $H_{1,4}$ 的其他边干净; 同理考虑路径 $b_4 a_6 a_5 a_4$ 中的边 $b_4 a_6$ 和 $a_4 a_5$, 由 $f_D(H_{1,4}) \geq 3.5$ 可知边 $b_4 a_6$ 和 $a_4 a_5$ 干净, 则 $a_6 \in R_1 \cup R_4$,

$a_5 \in R_0 \cup R_2 \cup R_3$, 显然 a_5, a_6 不在同一区域, 根据引理 1, $a_5 a_6$ 与 $C_1 \cup b_1 a_3 \cup a_2 a_3 \cup a_3 a_4$ 相交, 与 $f_D(H_{1,4}) < 4$ 相矛盾。证毕。

3. 结论

本文利用反证法和数学归纳法证明玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数。根据好的画法, 得到了交叉数为 $3k$ 的一个好的画法, 从而得到玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数上界, 进而利用玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 特有的结构, 结合不同的计数公式, 对其边集进行分类, 利用所得的限制条件, 探究每组边上的交叉计数, 最终证得图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数下界, 由此得到玫瑰花窗图 $R(3k, 3, 2)$ 的交叉数为 $3k$ 。

参考文献

- [1] Turan, P. (1997) A Note of Welcome. *Journal of Graph Theory*, **1**, 7-9. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190010105>
- [2] Garey, M.R. and Johnson, D.S. (1993) Crossing Number Is NP-Complete. *SIAM Journal on Algebraic & Discrete Methods*, **4**, 312-316. <https://doi.org/10.1137/0604033>
- [3] Guy, R.K. (1960) A Combinatorial Problem. *Malaysian Mathematical Society*, **7**, 68-72.
- [4] Guy, R.K. (1969) *Proof Techniques in Graph Theory*. Academic Press, New York.
- [5] Kleitman, D.J. (1970) The Crossing Number of $K_{5,n}$. *Journal of Combinatorial Theory*, **9**, 315-325. [https://doi.org/10.1016/S0021-9800\(70\)80087-4](https://doi.org/10.1016/S0021-9800(70)80087-4)
- [6] Pan, S. and Richter, R.B. (2007) The Crossing Number of K_{11} Is 100. *Journal of Graph Theory*, **56**, 128-134. <https://doi.org/10.1002/jgt.20249>
- [7] Dan, M.Q., Pan, S. and Richter, R.B. (2015) On the Crossing Number of $K_{1,3}$. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, **115**, 224-235.
- [8] Zarankiewicz, K. (1954) On a Problem of P. Turan Concerning Graphs. *Fundamenta Mathematicae*, **41**, 137-145. <https://doi.org/10.4064/fm-41-1-137-145>
- [9] Woodall, D.R. (1993) Cyclic-Order Graphs and Zarankiewicz's Crossing Number Conjecture. *Journal of Graph Theory*, **17**, 657-671. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190170602>
- [10] Nahas, N. (2003) On the Crossing Number of $K_{m,n}$. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **10**, 1-6. <https://doi.org/10.37236/1748>
- [11] Klerk, E.D., Pasechnik, D.V. and Schrijver, A. (2007) Reduction of Symmetric Semidefinite Programs Using the Regular*-Representation. *Mathematical Programming*, **109**, 613-624. <https://doi.org/10.1007/s10107-006-0039-7>
- [12] Exoo, G., Harary, F. and Kabell, J. (1981) The Crossings of Some Generalized Petersen Graphs. *Mathematica Scandinavica*, **48**, 184-188. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-11910>
- [13] Fiorini, S. (1986) On the Crossing Number of Generalized Petersen Graph. *Discrete Mathematics*, **30**, 221-242.
- [14] Richter, R.B. and Salazar, G. (2002) The Crossing Number of $P(N, 3)$. *Graphs and Combinatorics*, **18**, 381-394. <https://doi.org/10.1007/s003730200028>
- [15] 林晓惠. 图论中若干难题的研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2004.
- [16] 马登举, 任韩, 卢俊杰. 广义 Petersen 图 $G(2m+1, m)$ 的交叉数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2005(1): 34-39.
- [17] Lin, X.H., Yang, Y.S., Zheng, W.P., Shi, L. and Lu, W.M. (2009) The Crossing Number of Generalized Petersen Graphs with Small Order. *Discrete Applied Mathematics*, **157**, 1016-1023. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.01.012>
- [18] Fiorini, S. and Gauci, J.B. (2003) The Crossing Number of the Generalized Petersen Graph $P[3k, k]$. *Mathematica Bohemica*, **128**, 337-347. <https://doi.org/10.21136/MB.2003.134001>
- [19] 郑百功. 冒泡排序图 B_n 和广义 Petersen 图 $P(10, 3)$ 的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2013.
- [20] Gauci, J.B. and Xuereb, C.Z. (2019) A Note on Isomorphic Generalized Petersen Graphs with an Application to the Crossing Number of $GP(3k-1, k)$ and $GP(3k+1, k)$. *Discrete Mathematics Letters*, **2**, 44-46.
- [21] 历莹. 一类无限图的交叉数[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2020.