Pure Mathematics 理论数学, 2023, 13(11), 3204-3209
Published Online November 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2023.1311333

有界无穷维Hamilton算子的数值半径上下界估计

阿如汉，耿　真，李健龙，田孟森，吴德玉

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2023年10月8日；录用日期：2023年11月9日；发布日期：2023年11月16日

摘　要

本文研究了有界无穷维Hamilton算子的数值半径不等式问题，利用数值半径的酉相似不变性得到了有界无穷维Hamilton算子的数值半径上下界的估计式，为刻画有界无穷维Hamilton算子谱的分布问题奠定了理论基础。

关键词

数值半径，有界Hamilton算子，Hilbert空间

Upper and Lower Bounds Estimation of Numerical Radius of Bounded Infinite-Dimensional Hamilton Operator

Aruhan, Zhen Geng, Jianlong Li, Mengsen Tian, Deyu Wu

School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: Oct. 8th, 2023; accepted: Nov. 9th, 2023; published: Nov. 16th, 2023

Abstract

In this paper, Numerical Radius Inequalities of bounded infinite dimensional Hamiltonian operator are studied. By applying unitary similarity invariance of numerical radius, the numerical radius upper and lower estimations of bounded infinite dimensional Hamiltonian operator are obtained, and which provides a theoretical foundation for characterizing the spectra of bounded infinite dimensional Hamiltonian operator.

文章引用: 阿如汉, 耿真, 李健龙, 田孟森, 吴德玉. 有界无穷维 Hamilton 算子的数值半径上下界估计[J]. 理论数学, 2023, 13(11): 3204-3209. DOI: 10.12677/pm.2023.1311333

Keywords

Numerical Radius, Bounded Hamiltonian Operator, Hilbert Space

1. 引言

20 世纪 60 年代，Arnold，Magri 等学者为了研究 Maxwell 方程，Schrödinger 方程和 KdV 方程等以力学问题为应用背景的偏微分方程，引进了无穷维 Hamilton 正则系统，在此基础上 Gel’fand 等人引进了无穷维 Hamilton 算子的概念。直到 1991 年，钟万勰院士利用结构力学与最优控制的模拟理论，将无穷维 Hamilton 系统与弹性力学方程相结合，利用无穷维 Hamilton 算子特征函数系的辛正交性对无穷维 Hamilton 正则系统进行分离变量导出横向本征值问题，开创了弹性力学求解新体系，为解决应用力学中的非对称问题提供了统一方法(见[1])。然而，在 Hamilton 体系下采用分离变量法是否可行问题的理论基础是无穷维 Hamilton 算子谱分布问题。于是，无穷维 Hamilton 算子谱理论研究受到了国内外学者的广泛关注(见[2] [3] [4] [5])。在线性算子谱理论的研究中，线性算子数值域是刻画算子谱集分布范围的有力工具。因为有界线性算子数值域闭包包含谱集。类似于有界线性算子的谱半径，可以定义刻画有界线性算子数值域分布的数值半径，并利用有界线性算子的数值半径可以刻画该算子的谱集分布范围。因此，本文研究了有界无穷维 Hamilton 算子的数值半径不等式问题，利用数值半径的酉相似不变性得到有界无穷维 Hamilton 算子的数值半径上下界估计式，为刻画有界无穷维 Hamilton 算子谱的分布问题奠定了理论基础。

2. 预备知识

下面给出一些在本文中所用到的符号和定义。

本文中 H 代表 Hilbert 空间，$B(H)$ 代表 H 中有界线性算子的全体。若 $X\in B(H)$，则 $\omega(X)$ 为其数值半径，$\|X\|$ 为算子范数，定义如下：

$$\omega(X)=\sup_{\|x\|=1}\left|\langle Xx,x\rangle\right|,\|X\|=\sup_{\|x\|=1}\|Xx\|.$$

对于有界线性算子而言，数值半径描述的是包含有界线性算子数值域的最小闭圆盘半径，利用数值半径可以刻画有界线性算子谱集分布范围。

例 2.1 令 $X=\begin{bmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{bmatrix}$，其中 I 表示 Hilbert 空间 H 中的恒等算子。经计算，易得算子 X 的谱集为 $\sigma(X)=\{1\}$。数值半径为 $\omega(X)=\frac{3}{2}$。很显然，算子 X 的谱集包含于 $\frac{3}{2}$ 为半径的圆盘内。

关于数值半径，首先提及的一个性质是它与算子范数是等价范数，即，对于 $X\in B(H)$，有

$$\frac{\|X\|}{2}\le\omega(X)\le\|X\| \tag{2.1}$$

且

$$\omega(X)\le\frac{\|X\|+\|X^2\|^{\frac{1}{2}}}{2}. \tag{2.2}$$

特别的，当 $X^2=0$ 时，有 $\omega(X)=\dfrac{\|X\|}{2}$ 。当 X 为正常算子时 $\omega(X)=\|X\|$ 。

给定 $X,Y\in B(H)$，如果存在一个酉算子 $U\in B(H)$ 使得

$$B=U^*AU\ ,$$

则称算子 X 和 Y 是酉相似。数值半径的另外一个非常重要的性质就是酉相似不变性，即，令 $X\in B(H)$，则

$$\omega(U^*XU)=\omega(X), \tag{2.3}$$

其中 $U\in B(H)$ 是酉算子。

定义[6]：如果 $X,Y,Z\in B(H)$ 且 Y，Z 为自伴算子，则称分块算子矩阵

$$H=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}$$

为有界无穷维 Hamilton 算子。如果 $Y\ge 0, Z\ge 0$，则称 H 为非负 Hamilton 算子。

3. 主要结论

引理 3.1 $X,Y\in B(H)$，则有

1) $\omega\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}\right)=\max\left(\omega(X),\omega(Y)\right)$；

2) $\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ e^{i\theta}Y & 0 \end{bmatrix}\right)=\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)(\forall\theta\in R)$；

3) $\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)=\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}\right)$；

4) $\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix}\right)=\max\left(\omega(X+Y),\omega(X-Y)\right)$；

特别的 $\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)=\omega(Y)$。

引理 3.2. 若 $X,Y\in B(H)$，则 $\dfrac{\max\left(\omega(X+X),\omega(X-Y)\right)}{2}\le\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)\le\dfrac{\omega(X+Y)+\omega(X-Y)}{2}$ 。

证明：首先证明左边的不等式。由引理 3.1 (4)及引理 3.1 (3)可知

$$\begin{aligned}\omega(X+Y)&=\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X+Y \\ X+Y & 0 \end{bmatrix}\right)=\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}\right)\le\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)+\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ X & 0 \end{bmatrix}\right)\\&=\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)+\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right)=2\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

所以有

$$\frac{\omega(X+Y)}{2}\le\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right).$$

同理对于 $\omega(X-Y)$ 有

$$\frac{\omega(X-Y)}{2} \le \omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ -Y & 0 \end{bmatrix}\right) = \omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right).$$

故而，综上所述有

$$\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right) \ge \frac{\max\left(\omega(X+Y),\omega(X-Y)\right)}{2}.$$

下面证明右边的不等式，令酉算子 $U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} I & -I \\ I & I \end{bmatrix}$，则

$$\begin{aligned}
\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}\right) &= \omega\left(U^*\begin{bmatrix} 0 & X \\ Y & 0 \end{bmatrix}U\right) \\
&= \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} X+Y & X-Y \\ -(X-Y) & -(X+Y) \end{bmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2}\omega\left(\begin{bmatrix} X+Y & 0 \\ 0 & -(X+Y) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & X-Y \\ -(X-Y) & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&\le \frac{1}{2}\left(\omega\left(\begin{bmatrix} X+Y & 0 \\ 0 & -(X+Y) \end{bmatrix}\right)+\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & X-Y \\ -(X-Y) & 0 \end{bmatrix}\right)\right) \\
&= \frac{\omega(X+Y)+\omega(X-Y)}{2}
\end{aligned}$$

证毕。

引理 3.3. 若 $X,Y,Z,W \in B(H)$，则有 $\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}\right) \ge \omega\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}\right)$ 且 $\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}\right) \ge \omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{bmatrix}\right)$。

引理 3.4. 若 $X,Y \in B(H)$ 且非负，则 $\|X+Y\|=\|X\|+\|Y\|$ 当且仅当 $\|XY\|=\|X\|\|Y\|$。

定理 3.5. 若 $X,Y,Z \in B(H)$，且 Y,Z 为自伴算子，则

$$\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}\right) \ge \max\left\{\omega(X),\frac{Y+Z}{2},\frac{Y-Z}{2}\right\}。$$

且

$$\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}\right) \le \omega(X)+\frac{\omega(Y+Z)+\omega(Y-Z)}{2}。$$

证明：由引理 3.3 可知

$$\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}\right) \ge \max\left(\omega\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^* \end{bmatrix}\right),\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{bmatrix}\right)\right)。$$

由引理 3.1 (1)有

$$=\max\left(\max\left(\omega(X),\omega(-X^*)\right),\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{bmatrix}\right)\right)$$

又由定理 3.2 有

$$\omega\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix} \ge \max\left(\max\left(\omega(X),\omega(-X^*)\right),\frac{\max\left(\omega(X+Y),\omega(X-Y)\right)}{2}\right)$$
$$=\max\left(\omega(X),\frac{Y+Z}{2},\frac{Y-Z}{2}\right).$$

由引理 3.1 (1)以及定理 3.2 我们可以得到

$$\omega\left(\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}\right)\le\omega\left(\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & -X^* \end{bmatrix}\right)+\omega\left(\begin{bmatrix} 0 & Y \\ Z & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$\le\omega(X)+\frac{Y+Z+Y-Z}{2}.$$

考虑到 $X,Y\in B(H)$ 是自伴算子，结论得证。

定理 3.6 设 $X,Y,Z\in B(H)$，$H=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & -X^* \end{bmatrix}$ 为非负 Hamilton 算子，且 $\|YZ\|=\|Y\|\|Z\|$，则 H 的数值半径不等式满足

$$\omega(H)\ge\max\{\omega(X),Y+Z\}$$

且

$$\omega(H)\le\omega(X)+\omega(Y)+\omega(Z)\text{。}$$

证明：由引理 3.4 可知

$$\|X+Y\|=\|X\|+\|Y\|,$$

即 $\omega(X+Y)=\omega(X)+\omega(Y)$。再由定理 3.5，结论得证。

下面将给出具体例子加以说明判别准则的有效性。

例 3.1 给定无穷维 Hamilton 算子 $H=\begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$，则由定理 3.5 可知

$$1\le\omega(H)\le 2\text{。}$$

另一方面，由于 H 是自伴算子，故数值半径与算子范数相等，即

$$\omega(H)=\sqrt{2}\text{。}$$

结论吻合。

4. 总结

本文主要发现点是利用数值半径的酉相似不变性得到了有界无穷维 Hamilton 算子的数值半径上下界的估计式。该结论为刻画有界无穷维 Hamilton 算子谱的分部范围提供了重要依据。关于无穷维 Hamilton 算子数值半径有很多问题可以进一步研究。比如，二次数值半径的上下界估计以及二次数值半径的幂不等式等等。

基金项目

内蒙古大学大创项目资金支持，项目编号为 202211215。

参考文献

[1] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.

[2] Azizov, T.Ya., Dijksma, A. and Ggridneva, I.V. (2002) On the Boundness of Hamiltonian Operators. *Proceedings American Mathematical Society*, **131**, 563-576. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06565-6

[3] Kurina, G.A. (2001) Invertibility of Nonnegatively Hamiltonian Operators in a Hilbert Space. *Differential Equations*, **37**, 880-882. https://doi.org/10.1023/A:1019259107760

[4] Langer, H., Ran, A.C.M. and van de Rotten, B.A. (2001) Invariant Subspaces of Infinite Dimensional Hamiltonians and Solutions of the Corresponding Riccati Equations. *Operator Theory*: *Advances and Applications*, **130**, 235-254. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8181-4_18

[5] Wyss, C. (2012) Hamiltonians with Riesz Bases of Generalised Eigenvectors and Riccati Equations. *Eprint Arxiv*, **60**, 1723-1766. https://doi.org/10.1512/iumj.2011.60.4407

[6] 吴德玉, 阿拉坦仓, 黄俊杰, 海国君. Hilbert 空间中线性算子数值域及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2018.